PROCEEDINGS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 85, Number 3, July 1982

UN THEOREME DE DENJOY-CARLEMAN SUR UNE COURBE DU PLAN COMPLEXE

RAYMOND COUTURE

SOMMAIRE. Nous nous proposons d'étendre à certains compacts du plan, le théorème de Denjoy-Carleman. Une des implications de ce théorème a été démontrée dans un article de Dales et Davie [**1**] dans le cas d'un arc uniformément régulier. La preuve de leur résultat est une adaptation de celle du Bang, qui était originellement valable dans le cas d'un intervalle fini de **R**. Nous nous sommes inspirés d'un travail de Erkama [**2**] qui a démontré le théorème dans un cas particulier. Nous montrerons ailleurs comment ce résultat s'applique à la théorie de l'approximation par des exponentielles. Voir à ce sujet [**4**].

1. Définitions et énoncé des résultats. Soit K un compact parfait du plan complexe et $f\colon K \to C$ une fonction. Elle est dérivable en $w_0 \in K$ et de dérivée $f'(w_0)$ si la limite suivante existe

$$\lim_{w \to w_0} \frac{f(w) - f(w_0)}{w - w_0} = f'(w_0) \quad \text{où}\, w \in K - \{w_0\}.$$

On définit de même les dérivées d'ordre supérieur. Un arc de Jordan est dit r-lipschitz, s'il est donné par le graphe d'une fonction lipschitzienne, ou obtenu de ce graphe par translation, rotation ou homotétie.

Nous allons démontrer le résultat suivant:

THÉORÈME. *Soit γ un arc de Jordan r-lipschitz, w_0 le point initial de γ et M_n une suite de nombres positifs* (> 0) *telle que*

$$\frac{1}{M_n^{1/n}} \leq r(n) \quad si\, n \gg \, (n\, suffisamment\, grand)$$

où $r(t) > 0$ est une fonction continue, intégrable au voisinage de l'infini, et satisfaisant à $tr(t) \downarrow$ (i.e. décroissante) si $t \gg$.

On a alors une fonction f non identiquement nulle et analytique dans un ouvert contenant $\gamma - \{w_0\}$ telle que $\forall n \geq 0$,

$$\lim_{w \to w_0} f^{(n)}(w) = 0 \quad \text{où}\, w \in \gamma - \{w_0\}$$

et pour une constante $C \gg$,

$$|f^{(n)}(w)| \leq C^n M_n \quad \text{si}\, \varsigma \in \gamma\, \text{et}\, n \geq 1.$$

Une telle fonction est indéfiniment dérivable sur γ.

Received by the editors March 27, 1981.
1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 26A93.

0002-9939/81/0000-0221/$02.50

REMARQUE 1. Ce théorème a été obtenu par Erkama [**2**] dans le cas d'un arc avec un point régulier et la suite M_n égale à $[n \log n (\log \log n)^2]^n$.

REMARQUE 2. La condition classique de non quasi-analyticité est $r(t) \downarrow$ et $\int^\infty r(t)\,dt < \infty$. Nous avons dû imposer à $r(t)$ la restriction suplémentaire $tr(t) \downarrow$.

2. Un lemme préliminaire. On pourra supposer dans la preuve du théorème, que $t^2 r(t) \uparrow$ si $t \gg$, grâce au lemme suivant:

LEMME. *Soit $\epsilon > 0$, on a alors avec les hypothèses du théorème pour $r(t)$, une fonction $r_1(t)$ telle que si $t \gg$, $r(t) \leq r_1(t)$, $tr_1(t) \downarrow$ et $t^{1+\epsilon} r_1(t) \uparrow$, et telle que*

$$\int^\infty r_1(t)\,dt < \infty.$$

PREUVE. Soit $h(t) = \sup_{s \leq t} s^{1+\epsilon} r(s)$, la plus petite fonction croissante et $\geq t^{1+\epsilon} r(t)$. On prendra pour $r_1(t)$, $h(t)/t^{1+\epsilon}$. C'est la plus petite fonction telle que $r(t) \leq r_1(t)$ et $t^{1+\epsilon} r_1(t) \uparrow$. Elle est continue.

Si $U = \{t | r(t) < r_1(t)\}$, U est alors ouvert, donc réunion disjoint d'intervalles (t_0, t_1).

Si $t_0 < t < t_1$, $r(t) \leq r_1(t)$, donc $t^{1+\epsilon} r(t) < h(t)$ et comme $h(t)$ est croissante minimale, $h(t) = \text{const}$, une constante, dans cet intervalle et $r_1(t) = \text{const}/t^{1+\epsilon}$ si $t_0 < t < t_1$.

Comme $r = r_1$ aux extrémités t_0 et t_1,

$$r_1(t) = \frac{t_0^{1+\epsilon} r(t_0)}{t^{1+\epsilon}} = \frac{t_1^{1+\epsilon} r(t_1)}{t^{1+\epsilon}}$$

si $t_0 < t < t_1$ et on voit que $tr_1(t)\downarrow$. Il reste à montrer que $\int^\infty r_1(t)\,dt < \infty$. Vu que r est intégrable, il suffit de montrer que $\int_U r_1(t)\,dt < \infty$. Mais cette inégrale est la somme de termes de la forme

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \frac{r(t_0) t_0^{1+\epsilon}}{t^{1+\epsilon}} &= \frac{1}{\epsilon} r(t_0) t_0 \left(1 - \left(\frac{t_0}{t_1}\right)^\epsilon\right) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{r(t_1) t_1^{1+\epsilon}}{t^{1+\epsilon}}\,dt \\ &= \frac{1}{\epsilon} r(t_1) t_1^{1+\epsilon} \left(\frac{1}{t_0^\epsilon} - \frac{1}{t_1^\epsilon}\right) \leq r(t_1)(t_1 - t_0) \left(\frac{t_1}{t_0}\right)^{1+\epsilon} \end{aligned} \tag{1}$$

par l'inégalité de la moyenne.

On considère séparément la somme des termes correspondant aux intervalles (t_0, t_1) avec $t_1 \leq et_0$ et à ceux pour lesquels $t_1 > et_0$.

D'abord si $t_1 \leq et_0$, en utilisant la dernière expression dans (1):

$$\sum{}' r(t_1)(t_1 - t_0) \left(\frac{t_1}{t_0}\right)^{1+\epsilon} \leq e^{1+\epsilon} \sum{}' r(t_1)(t_1 - t_0) \leq e^{1+\epsilon} \int^\infty r(t)\,dt < \infty,$$

vu que $r(t) \downarrow$.

Enfin si $t_1 > et_0$, on peut énumérer ces intervalles $(t_0^{(k)}, t_1^{(k)})$, de sorte que $t_1^{(k)} \leq t_0^{(k+1)}$ et, en supposant $t_0^{(0)} \geq 1$, on obtient $e^n \leq t_0^{(n)}$ et par suite de (1)

$$\sum{}'' \frac{1}{\epsilon} r(t_0^{(n)}) t_0^{(n)} \left(1 - \left(\frac{t_0^{(n)}}{t_1^{(n)}}\right)^\epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon} \sum{}'' r(t_0^{(n)}) t_0^{(n)} \leq \frac{1}{\epsilon} \sum_n r(e^n) e^n$$

vu que $tr(t)\downarrow$; on majore cette dernière somme par

$$\int^{\infty} r(e^t)e^t\,dt = \int^{\infty} r(s)\,ds < \infty. \qquad \text{Q.E.D.}$$

3. Preuve du théorème. On peut supposer que γ est donné par le graphe d'une fonction lipschitzienne ψ, définie sur $[0,1]$, et avec $\psi(0)=0$. On prolonge ψ par $\psi(1)$, à droite de 1 jusqu'en un point t_0.

On considère une fonction $h(t)$, définie sur $[0,t_0]$, lipschitzienne, croissante dans un voisinage de 0, et telle que $h(0)=h(t_0)=0$ et $h(t)>0$ si $0<t<t_0$. On donnera plus loin une définition explicite de cette fonction dans un voisinage de 0, en terme de la fonction $r(t)$.

On définit un domaine simplement connexe contenant $\gamma-\{0\}$:

$$\Omega = \left\{ w = u+iv \mid |v-\psi(u)| < \frac{h(u)}{2}, 0<u<t_0 \right\},$$

et on considère une transformation conforme $Z = X+iY$ de Ω dans la bande

$$D = \{z = x+iy \mid |y| < \pi/2\}.$$

Z se prolonge alors par continuité à $\overline{\Omega}$ et on peut supposer que $Z(0)=-\infty$ et $Z(t_0,\psi(t_0)) = +\infty$. Ω satisfait aux conditions d'application du théorème de distorsion de Ahlfors [**3**, IV, §4]. On a alors: si $w_1 = u_1+iv_1$ et $w_2 = 1+iv_2$ sont dans Ω et $u_1<1$,

$$X(w_2) - X(w_1) \geq \pi \int_{u_1}^{1} \frac{dt}{h(t)} - 4\pi \qquad (X = \operatorname{Re} Z)$$

si $\int_{u_1}^1 \frac{dt}{h(t)} > 2$.

Choisissons $h(t)$ assez petite au voisinage de 1, de sorte que si u_1 est assez petit, cette dernière condition soit satisfaite.

On a alors pour $u = \operatorname{Re} w \ll$ (i.e. $0<u$ suffisamment petit)

$$X(w) \leq -\pi \int_u^1 \frac{dt}{h(t)} - C \tag{2}$$

où C désigne une constante.

Maintenant si Z est une transformation conforme de Ω sur D, $Z+r$ en est une aussi (r réel); on peut donc choisir arbitrairement la constante C ci-dessus.

On considère enfin sur D la fonction

$$g(z) = \frac{1}{\exp\exp(-z/2)},$$

et on pose $f(w) = g\circ Z(w)$, $w\in\Omega$: cette fonction est analytique dans ce domaine, et on montrera qu'elle satisfait aux exigences de l'énoncé, si $h(t)$ est bien choisie au voisinage de 0 et si C est suffisamment grand.

On a

$$\begin{aligned}|\exp\exp(-z/2)| &= \exp\operatorname{Re}\exp(-z/2)\\ &= \exp[\cos(y/2)\exp(-x/2)] \geq \exp[1/\sqrt{2}\exp(-x/2)]\end{aligned}$$

si $z = x + iy \in D$: d'où par (2) si $w \in \Omega$, $w = u + iv$ et $|w| \ll$

$$|f(w)| \le \frac{1}{\exp\left[C \exp\left(\frac{\pi}{2} \int_u^1 \frac{dt}{h(t)}\right)\right]}$$

où C est une constante pouvant être choisie arbitrairement grande.

On va appliquer les inégalités de Cauchy pour f, au disque de centre $w \in \gamma - \{0\}$, $|w|$ étant suffisamment petit, et de rayon $\epsilon h(u)$ où $= \operatorname{Re} w$ et $0 < \epsilon \ll$ de sorte que ce disque soit dans Ω: c'est possible vu que h (et ψ) est supposée lipschitzienne. On obtient

$$|f^{(n)}(w)| \le \frac{n!}{\epsilon^n h(u)^n} \frac{1}{\exp\left(C \exp \frac{\pi}{2} \int_{u+\epsilon h(u)}^1 \frac{dt}{h(t)}\right)}$$

où $u = \operatorname{Re} w$, $w \in \gamma$ et $|w| \ll$.

Vu que h est croissante dans un voisinage de 0, si u et $u + \epsilon h(u)$ sont dans ce voisinage on a

$$\int_u^{u+\epsilon h(u)} \frac{dt}{h(t)} \le \epsilon$$

et on obtient

$$|f^{(n)}(w)| \le n!/\epsilon^n \phi(u), \qquad w \in \gamma \text{ et } |w| \ll \tag{3}$$

où

$$\phi(u) = \frac{1}{h(u)^n \exp\left(C \exp \frac{\pi}{4} \int_u^1 \frac{dt}{h(t)}\right)}. \tag{4}$$

Afin de trouver des estimés uniformes pour $|f^{(n)}(w)|$, $w \in \gamma$, au moins dans un voisinage de 0, indépendant de n, on étudie le signe de la dérivée de $\phi(u)$.

En considérant la dérivée logarithmique de $\phi(u)$, on voit que $\phi'(u)$ a même signe que

$$\theta(u) = \frac{\pi C}{4} \exp \frac{\pi}{4} \int_u^1 \frac{dt}{h(t)} - nh'(u).$$

Définissons $u(s)$ par

$$\exp \frac{\pi}{4} \int_{u(s)}^1 \frac{dt}{h(t)} = s \tag{5}$$

pour toute valeur de $s > 0$: c'est possible vu que les hypothèses sur h impliquent que

$$\int_0^1 \frac{dt}{h(t)} = \infty.$$

On a alors pour $0 < u < u_n = u(n)$

$$\theta(u) \ge n\left(\frac{\pi C}{4} - h'(u)\right) > 0$$

si on choisit C suffisamment grand.

On déduit alors de (3) et (4) que

$$|f^{(n)}(w)| \leq \frac{n!}{\epsilon^n h(u_n)^n} \quad \text{si } n \gg \tag{6}$$

et où $w \in \gamma$, $|w| \ll$, vu que pour $u \geq u_n$ on peut majorer $\phi(u)$ par $1/h(u)^n \leq 1/h(u_n)^n$. On a donc une constante C_1 telle que

$$|f^{(n)}(w)| \leq C_1^n \left(\frac{n}{h(u_n)} \right)^n \quad \forall n, \text{ si } w \in \gamma \text{ et } |w| \ll .$$

On veut choisir h de sorte que si $n \gg$

$$\frac{n}{h(u_n)} \leq M_n^{1/n}. \tag{7}$$

Ceci serait satisfait si

$$\frac{s}{h(u(s))} = \frac{1}{r(s)}. \tag{8}$$

Remarquons par (5) que $u(s)$ satisfait à l'équation différentielle

$$u'(s) = -\frac{4}{\pi} \frac{h(u(s))}{s}$$

avec la condition limite $u(s) \to 0$ si $s \to \infty$, i.e., utilisant (8), en terme de la fonction r,

$$u(a) - u(s) = \int_s^a u'(t)\, dt = -\frac{4}{\pi} \int_s^a \frac{h(u(t))}{t}\, dt = -\frac{4}{\pi} \int_s^a r(t)\, dt,$$

d'où

$$u(s) = \frac{4}{\pi} \int_s^\infty r(t)\, dt. \tag{9}$$

Si inversement on définit $u(s)$ par (9), on peut alors définir h dans un voisinage de 0 par (8), i.e.

$$h(u(s)) = sr(s), \tag{10}$$

vu que $sr(s)$ et $u(s)$ sont décroissantes pour $s \gg$, et, avec ces définitions, on a la relation (5) pour $u(s)$ i.e.

$$u'(s) = -\frac{4}{\pi} r(s) = -\frac{4}{\pi} \frac{h(u(s))}{s}$$

par (9) et (10), d'où, (en supposant sans perte de généralité que $u(1) = 1$),

$$\exp \frac{\pi}{4} \int_{u(s)}^1 \frac{dt}{h(t)} = \exp -\frac{\pi}{4} \int_1^s \frac{u'(t)}{h(u(t))}\, dt = \exp \int_1^s \frac{dt}{t} = s.$$

Enfin il est clair que h ainsi définie (10), est croissante dans un voisinage de 0, s'annule en 0, et on a

$$h'(u(s)) = \frac{r(s) + sr'(s)}{u'(s)} = -\frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{sr'(s)}{r(s)} \right)$$

presque partout: h est donc lipschitzienne vu que r est absolument continue et que pour $s \gg$, $sr'(s)/r(s) \geq -2$, qui s'écrit aussi

$$\frac{d}{ds} \log r(s) \geq \frac{d}{ds} \log s^{-2}$$

i.e. $s^2 r(s)$ est croissante (voir le lemme). Par (7) et (8) on a alors $\forall n$

$$|f^{(n)}(w)| \leq C_1^n M_n \quad \text{où } w \in \gamma \text{ et } |w| \ll .$$

Notons V un voisinage de 0 dans γ où ces inégalités ont lieu. Alors, vu que f est analytique dans un voisinage de $\overline{\gamma - V}$, on a une inégalité de la forme

$$|f^{(n)}(w)| \leq D^n n! \quad \text{si } w \in \gamma - V.$$

Enfin, vu que

$$M_n^{1/n} \geq \frac{1}{r(n)} \uparrow \qquad \text{et} \qquad \sum_n r(n) < \infty$$

on a $M_n \geq E^n n^n \ \forall E > 0$ (quand $n \to \infty$) [**3**, Theorem 80] et $|f^{(n)}(w)| \leq (D/E)^n M_n$ si $w \in \gamma - V$ et $n \gg$ ce qui termine la démonstration.

References

1. H. G. Dales and A. M. Davie, *Quasi-analytic Banach function algebras*, J. Funct. Anal. **13** (1973), 28–50.
2. T. Erkama, *Classes non quasi-analytiques et le théorème d'approximation de Müntz*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **283** (1976), 595–597.
3. K. Knopp, *Theory and applications of infinite series*, London, 1928.
4. P. Malliavin and J. A. Siddiqi, *Classes de fonctions monogènes et approximation par des sommes d'exponentielles sur un arc rectifiable de* **C**, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **282** (1976), 109.
5. R. Nevanlinna, *Analytic functions*, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1970.

Département de Mathématiques, Université Laval, Cité Universitaire, Québec, P.Q. G1K 7P4, Canada