PROCEEDINGS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 87, Number 3, March 1983

JEUX TOPOLOGIQUES ET ESPACES DE NAMIOKA

JEAN SAINT RAYMOND

ABSTRACT. The aim of this paper is to improve certain recent results of J. P. R. Christensen, by using and extending the methods of topological games introduced by him. We study the relationship between Baire spaces and Namioka spaces, proving that these two notions agree in the case of metrizable spaces.

Ce mémoire a pour but de compléter trois articles récents de J. P. R. Christensen, en utilisant et développant les méthodes de jeux topologiques qu'il y a introduites. On étudie particulièrement les relations entre les notions d'espace de Baire et d'espace de Namioka, en prouvant notamment que ces deux notions coïncident dans le cas des espaces métrisables.

Rappelons qu'un espace topologique séparé X est appelé espace de Namioka si pour tout compact Y, tout espace métrisable Z et toute fonction séparément continue f de $X \times Y$ dans Z, il existe un G_δ dense A de X tel que f soit continue en tout point de $A \times Y$.

La classe des espaces de Namioka contient tous les espaces de Baire séparables [**1**], ainsi que tous les espaces réguliers fortement dénombrablement complets [**6**]. La classe de ces espaces réguliers fortement dénombrablement complets est incluse dans une classe plus large construite par Christensen [**3**] au moyen d'une condition exprimée en termes de jeux, et dont les éléments sont encore des espaces de Namioka.

Etant donné un espace topologique X, on considère les trois jeux G (de Choquet), G_σ et G_τ (d'après Christensen) suivants, entre deux joueurs α et β.

Dans le jeu G, β et α jouent alternativement des ouverts (U_n) et (V_n) non vides de X avec les conditions:

β joue le premier l'ouvert U_1.

Quand β a joué l'ouvert U_n, α joue un ouvert V_n inclus dans U_n.

Quand α a joué l'ouvert V_n, β joue un ouvert U_{n+1} inclus dans V_n.

Le joueur α gagne la partie si $\bigcap_{n=1}^\infty V_n \neq \varnothing$.

Dans les jeux G_σ et G_τ, β et α jouent alternativement l'un des ouverts non vides U_n, l'autre des couples (V_n, x_n) formés d'un ouvert V_n non vide et d'un point x_n, avec les conditions:

β joue le premier l'ouvert U_1.

Quand β a joué U_n, α joue (V_n, x_n) avec $V_n \subset U_n$.

Received by the editors February 15, 1982 and, in revised form, April 26, 1982.
1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 90D05, 54C05; Secondary 54E35.
Key words and phrases. Separate and joint continuity, Baire spaces.

Quand α a joué (V_n, x_n), β joue U_{n+1} avec $U_{n+1} \subset V_n$.

Le joueur α gagne la partie de G_σ si la suite (x_n) a au moins une valeur d'adhérence dans $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$.

Le joueur α gagne la partie de G_τ si, pour tout ultrafiltre non trivial $\mathfrak{U}$ sur $\mathbf{N}$, la suite (x_n) converge selon $\mathfrak{U}$ dans $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$.

G. Choquet dans **[2]** et J. P. R. Christensen dans **[3]** appellent un espace X α-favorable (resp. $(\sigma - \alpha)$-favorable) (resp. $(\tau - \alpha)$-favorable), si le joueur α possède pour le jeu G (resp. G_σ) (resp. G_τ), une stratégie gagnante ne dépendant que du dernier coup joué. Cette restriction, qui ne simplifie pas les démonstrations, nous semble inopportune, et nous définirons dans toute la suite les espaces α-favorables, $(\sigma - \alpha)$-favorables et $(\tau - \alpha)$-favorables comme ceux pour lesquels α possède une stratégie gagnante (pouvant dépendre de tous les coups précédemment joués).

Nous considérerons aussi les classes plus larges (strictement car ces jeux ne sont pas nécessairement déterminés) des espaces β-défavorables (resp. $(\sigma - \beta)$-défavorables) (resp. $(\tau - \beta)$-défavorables) définis comme les espaces X pour lesquels β ne possède aucune stratégie gagnante pour G (resp. G_σ) (resp. G_τ). L'analyse des démonstrations données par Christensen dans les Théorèmes 1 de **[3]** et de **[5]** montre que le caractère $(\sigma - \alpha)$-favorable de X est utilisé uniquement pour justifier que la stratégie explicitement construite pour β n'est pas gagnante; ce qui entraine que l'hypothèse "X est $(\sigma - \beta)$-défavorable" aurait les mêmes conséquences. On esquissera plus loin la preuve du Théorème 1 de **[3]**, étendu avec cette hypothèse.

Nous étudions d'abord le lien entre le jeu G et le théorème de Baire.

THEOREME 1. *Si X est un espace β-défavorable, X est un espace de Baire.*

Il suffit de prouver que si X n'est pas un espace de Baire, β a une stratégie gagnante pour G. Dans ce cas, il existe un ouvert ω non vide recouvert par la suite $(F_n)_{n \geqslant 1}$ de fermés rares. Une stratégie t gagnante pour β est alors définie par

$$t_1 = \omega, \quad t_{n+1}(V_1, \ldots, V_n) = V_n \setminus F_n, \qquad n \geqslant 1.$$

C'est-à-dire que β commence par jouer ω, et répond au coup V_n de α par $V_n \setminus F_n$. Si β joue avec la stratégie t, les coups (V_n) de α vérifieront:

$$V_1 \subset \omega, \quad V_{n+1} \subset V_n \setminus F_n, \qquad n \geqslant 1,$$

d'où $\bigcap_1^\infty V_n \subset \omega \setminus \bigcup_1^\infty F_n = \varnothing$ ce qui assure le gain de β.

THEOREME 2. *Si X est un espace de Baire, X est β-défavorable.*

Nous prouvons que si β possède une stratégie gagnante t pour le jeu G, X n'est pas un espace de Baire. Plus précisément, l'ouvert $\Omega_1 = t_1$ est maigre.

On pose $I_1 = \{\varnothing\}$, $U_\varnothing^1 = \Omega_1$ et on construit par récurrence pour tout $n \geqslant 2$ une famille maximale $(U_i^n, V_i^{n-1})_{i \in I_n}$ de couples d'ouverts non vides de X satisfaisant:

Les $(U_i^n)_{i \in I_n}$ sont deux à deux disjoints;

$\forall n \geqslant 1\ \forall i \in I_{n+1}\ \exists j \in I_n,\ V_i^n \subset U_j^n$;

$U_{i_1}^1 \supset U_{i_2}^2 \supset \cdots \supset U_{i_n}^n \Rightarrow U_{i_n}^n = t_n(V_{i_2}^1, \ldots, V_{i_n}^{n-1})$.

On pose alors $\Omega_n = \bigcup_{i \in I_n} U_i^n$ et on démontre par récurrence que Ω_n est dense dans Ω_1, ce qui est clair pour $n = 1$. Si cette propriété est vraie pour n, et si W était un ouvert non vide disjoint de Ω_{n+1}, $W \cap \Omega_n$ serait non vide et il existerait un $i_n \in I_n$ tel que $W \cap U_{i_n}^n \neq \varnothing$. Il existerait alors un unique $(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ tel que $U_{i_n}^n \subset V_{i_n}^{n-1} \subset U_{i_{n-1}}^{n-1} \subset \cdots \subset V_{i_2}^1 \subset U_{i_1}^1$. En posant $V^n = W \cap U_{i_n}^n$ et $U^{n+1} = t_{n+1}(V_{i_2}^1, \ldots, V_{i_2}^{n-1}, V^n)$ on aurait $U^{n+1} \subset V^n \subset W$, ce qui montre qu'on pourrait adjoindre (U^{n+1}, V^n) à la famille $(U_i^{n+1}, V_i^n)_{i \in I_n}$, contrairement à la maximalité de cette famille.

Il suffit donc de montrer que $\bigcap_1^\infty \Omega_n = \varnothing$ pour prouver que Ω_1 est maigre. Or, si a est un point de $\bigcap_1^\infty \Omega_n$, il existe une unique suite $(i_n) \in \prod_1^\infty I_n$ telle que $a \in \bigcap_1^\infty U_{i_n}^n$. Mais alors $[(V_{i_{n+1}}^n), (U_{i_n}^n)]$ est une partie de jeu G compatible avec la stratégie t, ce qui prouve que $\bigcap_1^\infty U_{i_n}^n = \varnothing$ contrairement à définition de a et de (i_n). Donc $\bigcap_1^\infty \Omega_n$ est vide et le théorème est démontré.

Nous précisons maintenant les relations entre espace de Baire et espace de Namioka.

THEOREME 3. *Soit X un espace de Namioka complètement régulier. Alors X est un espace de Baire.*

La démonstration de ce théorème est fondée sur le lemme suivant.

LEMME 4. *Soit F un fermé rare de l'espace complètement régulier X. Il existe un compact Y et une fonction séparément continue f sur $X \times Y$ dans* $[0, 1]$ *telle que pour tout x de F, il existe y dans Y tel que f soit discontinue en* (x, y).

DEMONSTRATION DU THEOREME. Si X n'était pas un espace de Baire, il contiendrait un ouvert maigre non vide ω, réunion de la suite F_n de fermés rares. On aurait, d'après le lemme, pour chaque n une fonction f_n de $X \times Y$ dans $[0, 1]$ et pour chaque x de F_n un y de Y tel que f_n soit discontinue en (x, y).

Si Z désigne le compact métrisable $[0, 1]^{\mathbf{N}}$, et φ la fonction de $X \times Y$ dans Z dont les f_n sont les fonctions coordonnées, on voit que φ est séparément continue et ne peut être continue en tout point de $\{a\} \times Y$ pour aucun point a de ω. Donc X n'est pas un espace de Namioka.

DEMONSTRATION DU LEMME. Soit $(\varphi_i)_{i \in I}$ une famille maximale de fonctions continues de X dans $[0, 1]$, nulles sur F et vérifiant $\varphi_i \cdot \varphi_j = 0$ si $i \neq j$. Dans le cas où X est métrisable, on peut prendre $I = \{\varnothing\}$ et $\varphi_\varnothing(x) = \inf(1, d(x, F))$.

Dans tous les cas, l'ouvert

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} \{x \mid \varphi_i(x) \neq 0\}$$

est partout dense dans X. En effet, si W était un ouvert non vide disjoint de Ω, $W \setminus F$ serait non vide et contiendrait un point a de X. Il existerait alors une fonction continue φ de X dans $[0, 1]$ valant 1 en a et 0 hors de $W \setminus F$. Cette fonction pourrait être adjointe à $(\varphi_i)_{i \in I}$, ce qui en contredirait la maximalité.

On munit I de la topologie discrète et on prend pour Y le compactifié d'Alexandroff de $I \times [0, 1]$, obtenu en rajoutant le point à l'infini λ. On pose alors

$$\begin{aligned} &f(x, \lambda) = 0, \\ &f(x, i, t) = 2t\varphi_i(x)/\left(t^2 + \varphi_i^2(x)\right) \quad \textit{si } t \neq 0, \\ &f(x, i, 0) = 0 \end{aligned}$$

et on vérifie sans peine que f est séparément continue, que $f(x, y)$ est nul pour tout y de Y si x appartient à F, et que si x_1 appartient à Ω, il existe $i \in I$ et $t = \varphi_i(x_1) \neq 0$ tels que $f(x_1, i, t) = 1$ ce qui prouve le lemme puisque tout point de F est adhérent à Ω.

L'hypothèse de complète régularité de X ne peut ici être enlevée. En effet, il existe un espace X séparé dénombrable et connexe. Un tel espace est nécessairement sans point isolé, donc maigre en lui-même, et ne peut être un espace de Baire. Cependant toute fonction numérique continue sur X est constante, ce qui entraîne que si f est séparément continue de $X \times Y$ dans un espace métrisable Z, f ne dépend pas de la première variable, donc est continue sur $X \times Y$, et ceci montre que X est un espace de Namioka sans être un espace de Baire.

Nous esquissons seulement la démonstration du théorème suivant, qui est essentiellement le Théorème 1 de [**3**].

THEOREME 5. *Soit X un espace $(\sigma - \beta)$-défavorable. Alors X est un espace de Namioka.*

Soient f une fonction séparément continue de $X \times Y$ dans Z métrisable, et F la fonction associée de X dans $\mathcal{C}(Y, Z)$. On se ramène comme dans [**3**] au cas $Z = [-1, 1]$ et au cas où l'oscillation de F est supérieure à $\delta > 0$ en tout point d'un ouvert non vide ω de X. On choisit pour tout $k \geqslant 1$ une suite $(P_{k,j})_{j \geqslant 1}$ de fonctions continues sur $[-1, 1]^k$, telles que les boules de rayon $\delta/4$ centrées en $P_{k,j}$ recouvrent $\mathcal{C}([-1, 1]^k)$. On définit alors une stratégie t pour β en posant $t_1 = \omega$ puis

$$t_{n+1}((V_1, x_1), \ldots, (V_n, x_n)) = U_{n+1} = V_n \setminus \bigcup_{j+k \leqslant n} C_{k,j}$$

où les $C_{k,j}$ sont les fermés de X définis par

$$C_{k,j} = \{x \mid \| F(x) - \varphi_{k,j} \| \leqslant \delta/3\}$$

et les fonctions continues $\varphi_{k,j}$ définies sur Y par

$$\varphi_{k,j}(y) = P_{k,j}(f(x_1, y), \ldots, f(x_k, y)).$$

Puisque le diamètre de $F(C_{k,j})$ est au plus $2\delta/3 < \delta$, $C_{k,j}$ est rare dans ω, ce qui assure $U_{n+1} \neq \varnothing$, car $V_n \subset \omega$.

L'hypothèse que X est $(\sigma - \beta)$-défavorable entraîne que la statégie t n'est pas gagnante, donc qu'il existe un jeu $((V_n, x_n))_n$ pour α qui le fait gagner dans G_σ contre la stratégie t.

Si donc x_∞ est une valeur d'adhérence de la suite (x_n), contenue dans $\bigcap_n V_n$, et si Φ désigne l'application de Y dans $[-1, 1]^{\mathbf{N}}$ dont les coordonnées sont les $F(x_n)$, on a

$$\Phi(y) = \Phi(y') \Rightarrow f(x_\infty, y) = f(x_\infty, y').$$

Il existe donc une fonction continue φ sur le compact $\Phi(Y)$ telle que $F(x_\infty) = \varphi \circ \Phi$, et, d'après le théorème de Urysohn, une fonction continue ψ sur $[-1, 1]^{\mathbf{N}}$ qui prolonge φ.

Si ψ_k est la fonction continue sur $[-1, 1]^k$ définie par $\psi_k(u_1, u_2, \ldots, u_k) = \psi(u_1, u_2, \ldots, u_k, 0, 0, \ldots)$ la continuité uniforme de ψ entraîne qu'il existe un $k \geqslant 1$ tel que $\| \psi - \psi_k \circ \pi_k \| \leqslant \delta/12$, où π_k est la projection canonique de $[-1, 1]^{\mathbf{N}}$ sur

$[-1, 1]^k$. Si j est tel que $\|\psi_k - P_{k,j}\| \leqslant \delta/4$ on aura $\|F(x_\infty) - \varphi_{k,j}\| \leqslant \delta/4 + \delta/12 = \delta/3$, et x_∞ appartiendra à $C_{k,j}$, donc pas à U_{k+j+1}, contrairement au fait que $x_\infty \in \bigcap_n V_n = \bigcap_n U_n$, d'où la contradiction cherchée.

On pourrait de même généraliser le Théorème 1 de [**5**] en remplaçant $(\sigma - \alpha)$-favorable par $(\sigma - \beta)$-défavorable.

THEOREME 6. *Tout espace de Baire séparable est un espace de Namioka.*

Pour prouver ce résultat, qui figure dans [**1**], il suffit compte tenu des Théorèmes 2 et 5, de montrer qu'un espace β-défavorable séparable est $(\sigma - \beta)$-défavorable. Si donc $(a_p)_{p \geqslant 1}$ est une suite dense dans X, et t une stratégie pour β dans le jeu G_σ, on définit la stratégie θ pour β dans G en posant:

$$\theta_{n+1}(V_1, \dots, V_n) = t_{n+1}[(V_1, a_1), \dots (V_n, a_n)].$$

Le joueur α peut donc gagner contre la stratégie θ en jouant (V_n), ce qui signifie que $\bigcap V_n$ contient un point x qui est adhérent à la suite (a_n), donc que β a perdu en jouant la stratégie t contre la suite (V_n, a_n), et qui entraîne que t n'est pas gagnante.

THEOREME 7. *Soit X un espace métrisable. Alors X est un espace de Namioka si et seulement si X est un espace de Baire.*

Il résulte du Théorème 3 que X est un espace de Baire s'il est un espace de Namioka. Inversement, pour un espace métrisable, les notions de β-défavorable, $(\sigma - \beta)$-défavorable et $(\tau - \beta)$-défavorable coïncident. En effet, une stratégie gagnante pour β dans le jeu G est gagnante dans G_σ, une stratégie gagnante pour G_σ est gagnante pour G_τ; et si t est une stratégie gagnante pour β dans G_τ, on peut trouver une stratégie t' contenue dans t et vérifiant

$$\operatorname{diam}[t'_{n+1}((V_1, x_1), \dots, (V_n, x_n))] \leqslant 2^{-n}.$$

La stratégie t' est encore gagnante pour β dans G_τ et si à chaque ouvert V non vide on associe un point $x(V)$ arbitraire dans V. On peut définir

$$t''_{n+1}(V_1, \dots, V_n) = t'_{n+1}[(V_1, x(V_1)), \dots, (V_n, x(V_n))].$$

Alors t'' est une stratégie gagnante pour β dans le jeu G, puisque si $(V_n, x(V_n))$ est compatible avec t', la suite $x(V_n)$ est une suite de Cauchy qui converge dans $\bigcap V_n$ si et seulement si cette intersection n'est pas vide.

Il ne semble pas que la classe des espaces $(\sigma - \beta)$-défavorables soit stable par produits, ni même celle des $(\tau - \beta)$-défavorables. Toutefois, il est prouvé dans [**3**] que la classe des $(\tau - \alpha)$-favorables est stable par produits, résultat qui n'est pas affecté par la modification que nous avons apportée à la règle de G_τ. On peut aussi prouver le résultat suivant:

THEOREME 8. *Si X_1 est $(\sigma - \beta)$-défavorable, et X_2 $(\tau - \alpha)$-favorable, $X_1 \times X_2$ est $(\sigma - \beta)$-défavorable.*

Nous prouvons que si α a une stratégie gagnante s pour $G_\tau(X_2)$ et β une stratégie gagnante t pour $G_\sigma(X_1 \times X_2)$, on peut construire une stratégie θ gagnante pour β dans le jeu $G_\sigma(X_1)$.

Une stratégie incluse dans t est encore gagnante pour β. On peut donc supposer que les valeurs de t sont de la forme $U^1 \times U^2$. Soit alors $((V_1^1, x_1^1), \ldots, (V_n^1, x_n^1))$ une suite de n coups de α dans $G_\sigma(X_1)$. On définit inductivement

$$t_1 = U_1^1 \times U_1^2,$$

$$\left(V_k^2, x_k^2\right) = s_k\left(U_1^2, \ldots, U_k^2\right), \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$U_{k+1}^1 \times U_{k+1}^2 = t_{k+1}\left[\left(V_1^1 \times V_2^1, \left(x_1^1, x_1^2\right), \ldots \left(V_k^1 \times V_k^2, \left(x_k^1, x_k^2\right)\right)\right)\right], \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

et on pose $\theta_{n+1}((V_1^1, x_1^1), \ldots, (V_n^1, x_n^1)) = U_{n+1}^1$ ce qui définit une stratégie θ pour β. Dans une partie où α joue les (V_n^1, x_n^1) et β les (U_n^1) selon θ, si on définit V_n^2, x_n^2 et U_n^2 comme ci-dessus la partie $[(V_n^2, x_n^2), U_n^2]$ est compatible avec s et la partie $[(V_n^1 \times V_n^2, (x_n^1, x_n^2)), U_n^1 \times U_n^2]$ compatible avec t.

Donc α gagne la première et β la seconde. Reste à voir que β gagne dans la partie $[(V_n^1, x_n^1), (U_n^1)]$.

Pour aucun ultrafiltre $\mathfrak{U}$ sur $\mathbf{N}$, (x_n^1, x_n^2) ne converge dans $\bigcap_n V_n^1 \times V_n^2 = (\bigcap V_n^1) \times (\bigcap V_n^2)$. Or (x_n^2) converge selon $\mathfrak{U}$ dans $\bigcap V_n^2$ quel que soit $\mathfrak{U}$. Donc (x_n^1) ne peut converger selon $\mathfrak{U}$ dans $\bigcap V_n^1$ pour aucun ultrafiltre $\mathfrak{U}$ ce qui prouve que β a gagné, et achève la démonstration.

Remarquons que la même méthode de démonstration, compte tenu des Théorèmes 1 et 2, prouve le théorème suivant:

THEOREME 9. *Soient X_1 un espace de Baire et X_2 un espace α-favorable. Alors $X_1 \times X_2$ est un espace de Baire.*

REFERENCES

1. J. Calbrix et J. P. Troallic, *Applications séparément continues*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B **288** (1979), 647–648.

2. G. Choquet, *Lectures on analysis*, Vol. 1, Benjamin, New York and Amsterdam, 1969.

3. J. P. R. Christensen, *Joint continuity of separately continuous functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **82** (1981) 455–461.

4. ______, *Remarks on Namioka spaces and R. E. Johnson's theorem on the norm separability of the range of certain mappings*, (a paraître).

5. ______, *Theorems of Namioka and Johnson type for u.s.c.o. set-valued mappings* (a paraître).

6. I. Namioka, *Separate and joint continuity*, Pacific J. Math. **51** (1974).

EQUIPE D'ANALYSE, UNIVERSITE PARIS VI, 75230-PARIS CEDEX 05, FRANCE