PROCEEDINGS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 90, Number 2, February 1984

FORMULES INTÉGRALES DE KOPPELMAN SUR UNE VARIÉTÉ DE STEIN

CHRISTINE LAURENT-THIEBAUT

RÉSUMÉ. En utilisant les noyaux définis par Henkin et Leiterer sur une variété de Stein, on démontre une formule intégrale globale du type "Koppelman" pour les (n, m)-formes $(0 \leqslant m \leqslant n)$ où n est la dimension de la variété et on définit une solution fondamentale locale du $\bar{\partial}$.

Dans [3] Henkin et Leiterer définissent des noyaux globaux $\Omega_q^0(z, \zeta)$ sur une variété de Stein et donnent la formule de Koppelman suivante:

THÉORÈME. *Soient M une variété de Stein de dimension n, D un domaine relativement compact de M, à bord $\mathcal{C}^1$, f une $(0, q)$-forme continue sur $\bar{D}$ telle que $\bar{\partial} f$ soit aussi continue sur $\bar{D}$, $0 \leqslant q \leqslant n$. Alors pour $z \in D$,*

$$f(z) = (-1)^q\left[\int_{\zeta \in \partial D} f(\zeta) \wedge \Omega_q^0(z, \zeta) - \int_{\zeta \in D} \bar{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge \Omega_q^0(z, \zeta) + \bar{\partial}_z \int_{\zeta \in D} f(\zeta) \wedge \Omega_{q-1}^0(z, \zeta)\right].$$

Dans cet article nous démontrons un théorème analogue pour les (n, m)-formes $(0 \leqslant m \leqslant n)$. Nous définissons ensuite localement, en suivant les méthodes de [3] un noyau qui sera une solution fondamentale locale du $\bar{\partial}$. En utilisant ce noyau on obtient des formules de Koppelman locales pour les (p, q)-formes et, indépendamment de la formule donnée par Henkin et Leiterer [3], on peut retrouver, par une partition de l'unité, la formule globale pour les (n, m)-formes à partir de ces formules locales.

1. Formule de Koppelman globale pour les $(n, n-q-1)$-formes $(-1 \leqslant q \leqslant n-1)$.

THÉORÈME 1.1. *Soient M une variété de Stein de dimension n, D un domaine relativement compact de M, à bord $\mathcal{C}^1$, f une $(n, n-q-1)$-forme continue sur $\bar{D}$, telle que $\bar{\partial} f$ soit aussi continue sur $\bar{D}$ $(-1 \leqslant q \leqslant n-1)$. Alors pour $\zeta \in D$ on a*

$$f(\zeta) = (-1)^{q+1}\left[\int_{z \in \partial D} f(z) \wedge \Omega_q^0(z, \zeta) - \int_{z \in D} \bar{\partial}_z f(z) \wedge \Omega_q^0(z, \zeta) + \bar{\partial}_\zeta \int_{z \in D} f(z) \wedge \Omega_{q+1}^0(z, \zeta)\right].$$

Received by the editors March 4, 1983.
1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 32A25.
Key words and phrases. Integral formula for differential forms.

DÉMONSTRATION. Il suffit de démontrer la formule suivante:

$$\int_D f(\zeta)\wedge g(\zeta) = (-1)^{q+1}\Bigg[\int_{(\zeta,z)\in D\times\partial D} f(z)\wedge\Omega_q^0(z,\zeta)\wedge g(\zeta) - \int_{(\zeta,z)\in D\times D}\bar\partial_z f(z)\wedge\Omega_q^0(z,\zeta)\wedge g(\zeta) + \int_{\zeta\in D}\left(\bar\partial_\zeta\int_{z\in D} f(z)\wedge\Omega_{q+1}^0(z,\zeta)\right)\wedge g(\zeta)\Bigg]$$

pour toute $(0, q+1)$-forme g, $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans D.

On applique la formule intégrale pour les formes de Henkin et Leiterer [3] à la $(0, q+1)$-forme g, $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans D. On a alors

$$g(z) = (-1)^{q+1}\left[-\int_{\zeta\in D}\bar\partial_\zeta g(\zeta)\wedge\Omega_{q+1}^0(z,\zeta) + \bar\partial_z\int_{\zeta\in D} g(\zeta)\wedge\Omega_q^0(z,\zeta)\right]. \tag{1.1}$$

Les singularités de Ω_q^0 et Ω_{q+1}^0 étant concentrées sur la diagonale de $M\times M$ les quantités $\int_{\zeta\in D}\bar\partial_\zeta g(\zeta)\wedge\Omega_{q+1}^0(z,\zeta)$ et $\bar\partial_z\int_{\zeta\in D} g(\zeta)\wedge\Omega_q^0(z,\zeta)$ ont leur support singulier continu contenu dans le support de g.

Notons $[D]$ le courant d'intégration sur D, $[D]\wedge f$ est un courant d'ordre 0 dont le support singulier $\mathcal{C}^1$ est contenu dans ∂D.

On peut donc considérer l'indice de Kronecker (cf. de Rham [6, §20]) de $[D]\wedge f$ et des différents termes de la formule (1.1) et on a

$$\mathcal{K}([D]\wedge f, g) = (-1)^{q+1}\Bigg[\mathcal{K}\left([D]\wedge f, -\int_{\zeta\in D}\bar\partial_\zeta g(\zeta)\wedge\Omega_{q+1}^0(z,\zeta)\right) + \mathcal{K}\left([D]\wedge f, \bar\partial_z\int_{\zeta\in D} g(\zeta)\wedge\Omega_q^0(z,\zeta)\right)\Bigg]. \tag{1.2}$$

Explicitons chaque terme

$$\mathcal{K}([D]\wedge f, g) = \int_D f(\zeta)\wedge g(\zeta),$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}\left([D]\wedge f, -\int_{\zeta\in D}\bar\partial_\zeta g(\zeta)\wedge\Omega_{q+1}^0(z,\zeta)\right) &= -\int_{(z,\zeta)\in D\times D} f(z)\wedge\bar\partial_\zeta g(\zeta)\wedge\Omega_{q+1}^0(z,\zeta)\\ &= \int_{\zeta\in D}\left(\bar\partial_\zeta\int_{z\in D} f(z)\wedge\Omega_{q+1}^0(z,\zeta)\right)\wedge g(\zeta)\end{aligned}$$

car g est à support compact dans D

$$\mathcal{K}\left([D]\wedge f, \bar\partial_z\int_{\zeta\in D} g(\zeta)\wedge\Omega_q^0(z,\zeta)\right) = (-1)^{q+1}\mathcal{K}\left(d([D]\wedge f), \int_{\zeta\in D} g(\zeta)\wedge\Omega_q^0(z,\zeta)\right)$$

car si T et S sont deux courants tels que $\mathcal{K}(dT, S)$ existe alors $\mathcal{K}(T, dS)$ existe et $\mathcal{K}(dT, S) = (-1)^{d^0 S+1}\mathcal{K}(T, dS)$ (cf. [**6**, §20]) or $d([D] \wedge f) = [\partial D] \wedge f - [D] \wedge \bar{\partial} f$ car f est de type $(n;\, n-q-1)$ d'où

$$\mathcal{K}\left([D] \wedge f, \bar{\partial}_z \int_{\zeta \in D} g(\zeta) \wedge \Omega_q^0(z,\zeta)\right)$$
$$= (-1)^{q+1} \int_{(z,\zeta)\in \partial D \times D} f(z) \wedge \Omega_q^0(z,\zeta) \wedge g(\zeta)$$
$$- (-1)^{q+1} \int_{(z,\zeta)\in D \times D} \bar{\partial} f(z) \wedge \Omega_q^0(z,\zeta) \wedge g(\zeta).$$

Et en remplaçant dans (1.2) on obtient la formule cherchée.

2. Solution fondamentale locale du $\bar{\partial}$. Soit W un ouvert de M contenu dans un domaine de carte de M où nous prenons des coordonnées dans lesquelles les sections s et $\bar{s}$ qui interviennent dans la définition de $\tilde{\Omega}^0 = \sum_{q=0}^{n-1}\Omega_q^0$ (cf. [**3**]) s'écrivent, respectivement, $u = (u_j)_{j=1,\dots,n}$ et $\hat{u} = (\hat{u}_j)_{j=1,\dots,n}$, u et $\hat{u}$ définies sur $W \times W$.

On notera (z, ζ) les variables sur $W \times W$.

On pose $\omega_{z,\zeta}(u) = \bigwedge_{j=1}^n d_{z,\zeta} u_j$ et

$$\bar{\omega}'_{z,\zeta}(\hat{u}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1}\hat{u}_j \bigwedge_{s\neq j} \bar{\partial}_{z,\zeta}\hat{u}_s.$$

On définit alors $\tilde{\Omega}$ sur $W \times W$ par

$$\tilde{\Omega}(z,\zeta) = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n}\bar{\omega}'_{z,\zeta}\left(\frac{\varphi^\nu \hat{u}}{\langle \hat{u}, u\rangle}\right) \wedge \omega_{z,\zeta}(u)$$

où φ et ν sont définis dans [**3**, §1]. Si $\Delta(W)$ désigne la diagonale de $W \times W$, $\tilde{\Omega}$ est une forme différentielle $\mathcal{C}^1$ sur $W \times W \setminus \Delta(W)$ qui admet la décomposition suivante:

$$\tilde{\Omega}(z,\zeta) = \sum_{\substack{q=0,\dots,n-1\\ p=0,\dots,n}} \Omega_q^p(z,\zeta)$$

où Ω_q^p est de type (p, q) en z et $(n-p, n-q-1)$ en ζ.

On pose $\Omega_{-1}^0 = \Omega_n^0 = 0$.

LEMME 2.1. *Sur* $W \times W\setminus\Delta(W)$, $\bar{\partial}_{z,\zeta}\tilde{\Omega} = 0$ *et par conséquent* $\bar{\partial}_\zeta \Omega_q^p = -\bar{\partial}_z \Omega_{q-1}^p$, $q = 0,\dots,n$, $p = 0,\dots,n$.

DÉMONSTRATION. u étant holomorphe, il suffit de reprendre la démonstration du Lemme 2.4.2 de [**3**].

REMARQUE 1. Lorsque $p = 0$, le noyau Ω_q^p coïncide avec le noyau Ω_q^0 de [**3**].

REMARQUE 2. Cette construction n'est pas invariante par changement de coordonnées et ne permet donc pas de définir un noyau sur $M \times M$.

La construction précédente présente des analogies avec la méthode de Aronov et Dautov [**1**] pour étendre une représentation intégrale pour les $(0, q)$-formes aux (p, q)-formes dans $\mathbf{C}^n$. En effet si on considère le noyau de Bochner-Martinelli pour les $(0, q)$-formes, ce n'est autre que $\tilde{\Omega}^0$ où u et $\hat{u}$ sont, respectivement, $z - \zeta$ et $\bar{z} - \bar{\zeta}$;

si on lui applique la construction de Aronov et Dautov on obtient $\tilde{\Omega}$ dans lequel u et $\hat{u}$ valent, respectivement, $z - \zeta$ et $\bar{z} - \bar{\zeta}$.

PROPOSITION 2.2. *Soient U un domaine relativement compact de W, à bord $\mathcal{C}^1$, f une (p, q)-forme continue sur $\overline{U}$, telle que $\bar{\partial} f$ soit continue sur $\overline{U}$ $(0 \leqslant p \leqslant n, 0 \leqslant q \leqslant n)$. Alors on a*

$$(2.1)\qquad f(z) = (-1)^{p+q}\Big[\int_{\zeta\in\partial U} f(\zeta)\wedge\Omega_q^p(z,\zeta) - \int_{\zeta\in U}\bar{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\Omega_q^p(z,\zeta) + \bar{\partial}_z\int_{\zeta\in U} f(\zeta)\wedge\Omega_{q-1}^p(z,\zeta)\Big]$$

pour $z \in U$.

DÉMONSTRATION. On reprent la démonstration de Øvrelid [5] dans laquelle on remplace la transformation $(\xi, z)\mapsto(z+\xi, z)$ par $(\xi, z)\mapsto(\alpha(\xi, z), z)$ où α est définie dans [3] par le lemme suivant.

LEMME. *Pour tout point $z_0 \in M$, il existe un voisinage $U(z_0)$ de z_0 et une fonction holomorphe $\alpha(\xi, z)$: $U(z_0)\times U(z_0)\to M$ satisfaisant les conditions suivantes*:

(0) *Il existe des coordonnées holomorphes sur $U(z_0)$.*

(1) $\alpha(\xi, z_0) = \xi$ *pour tout* $\xi \in U(z_0)$.

(2) $\alpha(z_0, z) = z$ *pour tout* $z \in U(z_0)$.

(3) *Pout tout z fixé dans $U(z_0)$, l'application $\alpha(\cdot, z)$ est biholomorphe de $U(z_0)$ sur un voisinage $U(z)$ de z.*

(4) $s(z, \alpha(\xi, z)) = s(z_0, \xi)$ *et* $\bar{s}(z, \alpha(\xi, z)) = \bar{s}(z_0, \xi)$.

Il suffit de démontrer la formule suivante pout toute $(n-p, n-q)$-forme $\mathcal{C}^\infty$, g, à support compact dans U

$$\int_U f(z)\wedge g(z) = (-1)^{p+q}\Big[\int_{(z,\zeta)\in U\times\partial U} f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z) - \int_{(z,\zeta)\in U\times U}\bar{\partial} f(\zeta)\times\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z) + \int_{z\in U}\Big(\bar{\partial}_z\int_{\zeta\in U} f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\Big)\wedge g(z)\Big]$$

Soit $V_\varepsilon(\Delta)$ un entourage d'ordre ε de la diagonale $\Delta(W)$ de $W\times W$, à bord $\mathcal{C}^1$, on pose

$$U_\varepsilon = \{(z,\zeta)\in U\times U \,|\, (z,\zeta)\notin \overline{V}_\varepsilon(\Delta)\},$$
$$M_\varepsilon = \{(z,\zeta)\in \overline{U}\times\overline{U} \,|\, (z,\zeta)\in \partial V_\varepsilon(\Delta)\}.$$

Appliquons le théorème de Stokes à $f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)$ sur le domaine U_ε. $f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)$ est une forme $\mathcal{C}^1$ sur U_ε de type $(n, n-1)$ en ζ et (n, n) en z.

On a

$$\begin{aligned} d_{\zeta,z}(f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)) &= \bar{\partial}_{\zeta,z}(f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)) \\ &= \bar{\partial}f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z) \\ &\quad + (-1)^{2n+p+q-1}f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z) \end{aligned}$$

car $\bar{\partial}_{z,\zeta}\tilde{\Omega}=0$.

De plus si $(z,\zeta)\in\partial U\times U$, $f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)=0$ car g est à support compact dans U.

On obtient alors

$$(\star)\qquad \int_{U_\varepsilon}\bar{\partial}f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)+(-1)^{p+q+1}\int_{U_\varepsilon}f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge\bar{\partial}g(z)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\partial U_\varepsilon} f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z) \\ &= \int_{(U\times\partial U)_\varepsilon} f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z) - \int_{M_\varepsilon} f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z). \end{aligned}$$

Nous allons évaluer l'intégrale sur M_ε.

Soit $(U_k)_{k=1,\dots,l}$ un recouvrement fini de $\bar{U}$ par des ouverts vérifiant les hypothèses du lemme de définition de l'application α, $(\Delta\cap\bar{U}\times\bar{U})\subset\bigcup_{k=1}^{l}U_k\times U_k$ et par conséquent pour $\varepsilon<\varepsilon_0$ on a $V_\varepsilon\subset\bigcup_{k=1}^{l}U_k\times U_k$.

Par une partition de l'unité on peut donc se ramener à calculer

$$\int_{M_\varepsilon\cap(U(z_0)\times U(z_0))} f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)$$

où $U(z_0)$ est un voisinage définit par le lemme.

Posons T: $U(z_0)\times U(z_0)\to W\times U(z_0)$, $(\xi,z)\mapsto(\alpha(\xi,z),z)$, et pour z fixé T_z: $U(z_0)\to U(z)\times\{z\}$, $\xi\mapsto(\alpha(\xi,z),z)$, T_z est biholomorphe.

$$\int_{M_\varepsilon\cap(U(z_0)\times U(z_0))} f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)=\int_{z\in U(z_0)}\left(\int_{\xi\in B_{\varepsilon,z}}T^\star(f\wedge\tilde{\Omega})\right)\wedge g(z)$$

où $B_{\varepsilon,z}=(\alpha(\cdot,z))^{-1}(\pi_2(M_\varepsilon\cap(U(z_0)\times\{z\})))$, π_2 étant la deuxième projection de $W\times W$ sur W, $(z,\xi)\mapsto\xi$.

Grâce aux propertiétés de α, on a

$$T^\star\tilde{\Omega}=\frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n}\varphi^{\nu n}(z,\alpha(\xi,z))\bar{\omega}'_\xi\left(\frac{\bar{s}(z_0,\xi)}{\langle\bar{s}(z_0,\xi),s(z_0,\xi)\rangle}\right)\wedge\omega_\xi(s(z_0,\xi)),$$

$\omega_\xi(s(z_0,\xi))$ étant de type $(n,0)$ on peut remplacer les $\bar{\partial}_\xi$ de $\bar{\omega}'$ par des d_ξ et on obtient en reprenant les notations de [3] $T^\star\tilde{\Omega}=\varphi^{\nu n}(z,\alpha(\xi,z))\Omega^0(1,\bar{s},s,z_0)(\xi)$ qui est une $(n,n-1)$-forme en ξ.

Si f s'écrit $f(\zeta) = \sum_{|I|=p,|J|=q} f_{IJ}(\zeta)d\zeta_I \wedge d\bar{\zeta}_J$ on a

$$T^\star(f \wedge \tilde{\Omega}) = \left(\sum_{\substack{|I|=p\\|J|=q}} f_{IJ}(\alpha(\xi, z))(d_z\alpha(\xi, z))_I \wedge (d_z\bar{\alpha}(\xi, z))_J \right)$$
$$\wedge\Omega^0(1, \bar{s}, s, z_0)(\xi)\varphi^{\nu n}(z, \alpha(\xi, z))$$
$$+ \text{terme de degré supérieur à } 2n-1 \text{ en } \xi$$

et donc

$$\int_{\xi\in B_{\varepsilon,z}} T^\star(f \wedge \tilde{\Omega}) = \sum_{\substack{|I|=p\\|J|=q}} \int_{\xi\in B_{\varepsilon,z}} f(\alpha(\xi, z))(d_z\alpha)_I \wedge (d_z\bar{\alpha})_J$$
$$\wedge\varphi^{\nu n}(z, \alpha(\xi, z))\Omega^0(1, \bar{s}, s, z_0)(\xi),$$

$B_{\varepsilon,z}$ étant le bord $\mathcal{C}^1$ d'un voisinage de z_0 qui se rétracte sur z_0 quand $\varepsilon \to 0$ on a grâce aux propriétés de $\Omega^0(1, \bar{s}, s, z_0)$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\xi\in B_{\varepsilon,z}} T^\star(f \wedge \tilde{\Omega})(\xi) = T^\star f|_{\xi=z_0}\varphi^{\nu n}(z, \alpha(z, z_0))$$

et comme $\alpha(z, z_0) = z$ et $\varphi(z, z) = 1$ on en déduit

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{B_{\varepsilon,z}} T^\star(f \wedge \tilde{\Omega}) = (-1)^{p+q} f(z)$$

d'où

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{M_\varepsilon\cap(U(z_0)\times U(z_0))} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z, \zeta) \wedge g(z) = \int_{U(z_0)} f(z) \wedge g(z).$$

Revenons à la formule ($\star$), les formes différentielles $\bar{\partial}f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z, \zeta) \wedge g(z)$, $f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z, \zeta) \wedge \bar{\partial}g(z)$ ont une singularité d'ordre $2n-1$ en $z = \zeta$ et sont donc intégrables sur $U \times U$ et $f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z, \zeta) \wedge g(z)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $U \times \partial U$. Si on fait tendre ε vers 0 on obtient donc

$$\int_U f(z) \wedge g(z) = (-1)^{p+q}\left[\int_{U\times\partial U} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z, \zeta) \wedge g(z) \right.$$
$$- \int_{U\times U} \bar{\partial}f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z, \zeta) \wedge g(z)$$
$$\left. -(-1)^{p+q+1}\int_{U\times U} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z, \zeta) \wedge \bar{\partial}g(z)\right]$$

en outre

$$\int_{U\times U} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z, \zeta) \wedge \bar{\partial}g(z) = (-1)^{p+q-1}\int_U \left(\bar{\partial}_z \int_U f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z, \zeta)\right) \wedge g(z)$$

d'où la formule cherchée.

PROPOSITION 2.3. *Le noyau $\tilde{\Omega}$ est une solution fondamentale du $\bar{\partial}$ sur W, c'est-à-dire*

$$\bar{\partial}_{z,\zeta}\tilde{\Omega} = [\Delta(W)] \tag{2.2}$$

où $[\Delta(W)]$ désigne le courant d'intégration sur la diagonale $\Delta(W)$ de $W \times W$. En outre la formule intégrale (2.1) *résulte de* (2.2).

DÉMONSTRATION. Si φ est une forme $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans W, on pose $\tilde{\Omega}\varphi = \int_{\zeta \in W} \varphi(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z, \zeta)$. On applique la formule intégrale (2.1) à une forme f, $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans U. On en déduit la formule d'homotopie

$$f = (-1)^{p+q+1}\left(\tilde{\Omega}(\partial f) - \bar{\partial}(\tilde{\Omega} f)\right)$$

et donc d'après Harvey et Polking [**2**, §2], on a $\bar{\partial}_{z,\zeta}\tilde{\Omega} = [\Delta(W)]$.

Pour retrouver la formule intégrale (2.1) à partir de l'équation (2.2) il suffit d'appliquer la formule de Stokes de l'indice de Kronecker [**6**, §20] et le Théorème 3.3.1 de [**4**] à l'ouvert $U \times U$, au noyau $\tilde{\Omega}$ et à la forme $f(\zeta) \wedge g(z)$ où g est une $(n-p, n-q)$-forme $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans U, on obtient alors

$$\begin{aligned}\int_U f(z) \wedge g(z) = (-1)^{p+q}\bigg[&\int_{\partial U \times U} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z,\zeta) \wedge g(z)\\ &- \int_{U \times U} \bar{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z,\zeta) \wedge g(z)\\ &+ \int_U \left(\bar{\partial}_z \int_{\zeta \in U} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(z,\zeta)\right) \wedge g(z)\bigg]\end{aligned}$$

en tenant compte des différents degrés on obtient la formule (2.1).

On peut aussi appliquer les mêmes théorèmes en prenant pour forme $f(z) \wedge g(\zeta)$ où f est une $(n-p, n-q-1)$-forme et g une $(p, q+1)$-forme $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans U, l'équation (2.2) étant symétrique en z et ζ on trouve dans le cas particulier où $p = 0$, la version locale suivante du Théorème 1.1.

PROPOSITION 2.4. *Soient U un domaine relativement compact de W, à bord $\mathcal{C}^1$ par morceau, f une $(n, n-q-1)$-forme continue sur $\bar{U}$ telle que $\bar{\partial} f$ soit aussi continue sur $\bar{U}$ $(-1 \leqslant q \leqslant n-1)$. Alors pour $\zeta \in U$ on a*

$$\begin{aligned}f(\zeta) = (-1)^{q+1}\bigg[&\int_{z \in \partial U} f(z) \wedge \Omega_q^0(z,\zeta) - \int_{z \in U} \bar{\partial}_z f(z) \wedge \Omega_q^0(z,\zeta)\\ &+ \bar{\partial}_\zeta \int_{z \in U} f(z) \wedge \Omega_{q+1}^0(z,\zeta)\bigg].\end{aligned} \tag{2.3}$$

On peut alors retrouver le Théorème 1.1 en utilisant une partitition de l'unité.

On considère D un domaine relativement compact de M à bord $\mathcal{C}^1$. Remarquons tout d'abord que les intégrales

$$\int_{z \in \partial D} f(z) \wedge \Omega_q^0(z,\zeta), \quad \int_{z \in D} \bar{\partial}_z f(z) \wedge \Omega_q^0(z,\zeta) \quad \text{et} \quad \int_{z \in D} f(z) \wedge \Omega_{q+1}^0(z,\zeta)$$

ont un sens pour $\zeta \in D$ car les noyaux Ω_q^0 sont définis globalement sur $M \times M$, $\mathcal{C}^1$ sur $M \times M \setminus \Delta(M)$ et ont une singularité d'ordre $2n-1$ en $z = \zeta$.

Pour obtenir la formule globale, il suffit alors de montrer que pour toute $(0, q)$-forme g, $\mathcal{C}^\infty$ à support dans D on a

$$\int_D f(\zeta) \wedge g(\zeta) = (-1)^{q+1}\left[\int_{\partial D\times D} f(z) \wedge \Omega_q^0(z,\zeta) \wedge g(\zeta)\right.$$
$$-\int_{D\times D} \bar\partial_z f(z) \wedge \Omega_q^0(z,\zeta) \wedge g(\zeta)$$
$$\left.+\int_D\left(\bar\partial_\zeta\int_D f(z) \wedge \Omega_{q+1}^0(z,\zeta)\right) \wedge g(\zeta)\right].$$

Considérons un double recouvrement fini de $\bar D$ par des ouverts $(U_i)_{i=1,\dots,m}$ et $(W_i)_{i=1,\dots,m}$ vérifiant:

W_i est un ouvert de carte de M.

$U_i \Subset W_i$ et ∂U_i est $\mathcal{C}^1$.

Soient $(\mathcal{O}_i)_{i=1,\dots,m}$ une partition de l'unité relative au recouvrement $(U_i)_{i=1,\dots,m}$.

Posons $f_i(z) = \mathcal{O}_i(z)f(z)$, et $g_j(\zeta) = \mathcal{O}_j(\zeta)g(\zeta)$, on a alors

$$\int_{\partial D\times D} f(z) \wedge \Omega_q^0(z,\zeta) \wedge g(\zeta) - \int_{D\times D} \bar\partial_z f(z) \wedge \Omega_q^0(z,\zeta) \wedge g(\zeta)$$
$$+\int_D\left(\bar\partial_\zeta\int_D f(z) \wedge \Omega_{q+1}^0(z,\zeta)\right) \wedge g(\zeta)$$
$$= \sum_{i,j=1}^m \int_{U_j\cap D}\left(\int_{U_i\cap\partial D} f_i(z) \wedge \Omega_q^0(z,\zeta) + \int_{U_i\cap D} \bar\partial_z f_i(z) \wedge \Omega_q^0(z,\zeta)\right.$$
$$\left.-\bar\partial_\zeta\int_{U_i\cap D} f_i(z) \wedge \Omega_{q+1}^0(z,\zeta)\right) \wedge g_j(z).$$

Etudions la quantité

$$A(\zeta) = \int_{U_i\cap\partial D} f_i(z) \wedge \Omega_q^0(z,\zeta) + \int_{U_i\cap D} \bar\partial_z f_i(z) \wedge \Omega_q^0(z,\zeta)$$
$$-\bar\partial_\zeta\int_{U_i\cap D} f_i(z) \wedge \Omega_{q+1}^0(z,\zeta),$$

deux cas se présentent:

1*er cas*. $U_i \subset D$ et par conséquent $U_i \cap \partial D = \varnothing$, de plus f_i est à support dans U_i et donc supp $f_i \cap \partial U_i = \varnothing$, on a alors

$$\int_{z\in U_i\cap\partial D} f_i(z) \wedge \Omega_q^0(z,\zeta) = 0 = \int_{\partial U_i} f_i(z) \wedge \Omega_q^0(z,\zeta)$$

d'où

$$A(\zeta) = \int_{\partial U_i} f_i(z) \wedge \Omega_q^0(z,\zeta) + \int_{U_i} (\bar\partial_z f_i(z)) \wedge \Omega_q^0(z,\zeta) - \bar\partial_\zeta\int_{U_i} f_i(z) \wedge \Omega_{q+1}^0(z,\zeta)$$
$$= (-1)^{q+1}\mathcal{O}_i(\zeta)f(\zeta)$$

grâce à la formule locale (2.3) appliquée au domaine U_i et à la forme $\mathcal{O}_i f$.

2e cas. $U_i \cap \partial D \neq \varnothing$, posons $U_i' = U_i \cap D$, comme f_i est à support dans U_i on a $\operatorname{supp} f_i \cap \partial U_i' \subset U_i \cap \partial D$ et donc

$$\int_{U_i \cap \partial D} f_i(z) \wedge \Omega_q^0(z, \zeta) = \int_{\partial U_i'} f_i(z) \wedge \Omega_q^0(z, \zeta)$$

par conséquent

$$A(\zeta) = \int_{\partial U_i'} f_i(z) \wedge \Omega_q^0(z, \zeta) - \int_{U_i'} \bar{\partial}_z f_i(z) \wedge \Omega_q^0(z, \zeta) + \bar{\partial}_\zeta \int_{U_i'} f_i(z) \wedge \Omega_{q+1}^0(z, \zeta).$$

La formule locale (2.3) est encore vraie pour le domaine U_i' dont le bord est seulement $\mathcal{C}^1$ par morceaux donc

$$A(\zeta) = (-1)^{q+1} \theta_i(\zeta) f(\zeta) \quad \text{si } \zeta \in D.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial D \times D} f(z) \wedge \Omega_q^0(z, \zeta) \wedge g(\zeta) - \int_{D \times D} \bar{\partial}_z f(z) \wedge \Omega_q^0(z, \zeta) \wedge g(\zeta) \\
&\quad + \int_D \left(\bar{\partial}_\zeta \int_D g(z) \wedge \Omega_{q+1}^0(z, \zeta) \right) \wedge g(\zeta) \\
&\quad = (-1)^{q+1} \sum_{i,j=1}^{m} \int_{\zeta \in U_j \cap D} \theta_i(\zeta) f(\zeta) \wedge \theta_j(\zeta) g(\zeta) \\
&\quad = (-1)^{q+1} \int_D f(\zeta) \wedge g(\zeta).
\end{aligned}$$

REFERENCES

1. A. Aronov et S. Dautov, Sibirsk. Math. J. **13** (1972), 739–747.
2. R. Harvey et J. Polking, Duke Math. J. (2) **46** (1979), 253–340.
3. G. Henkin et J. Leiterer, Ann. Polon. Math. **31** (1981), 93–116.
4. Ch. Laurent-Thiebaut, Bull Sci. Math. **105** (1981), 113–158.
5. N Øvrelid, Math. Scand. **29** (1971), 137–160.
6. G. de Rham, *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1955.

MATHÉMATIQUES TOUR 45-46, 5E ÉTAGE, UNIVERSITÉ DE PARIS VI, 4 PLACE JUSSIEU, 75230 PARIS CEDEX 05, FRANCE