PROCEEDINGS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 90, Number 2, February 1984

QUAND L'ESPACE DES MESURES A VARIATION BORNEE EST-IL FAIBLEMENT SEQUENTIELLEMENT COMPLET?

MICHEL TALAGRAND

ABSTRACT. We construct a Banach lattice E which does not contain c_0 (hence is weakly sequentially complete), but such that the lattice of E-valued measures of bounded variation contains c_0.

1. Résultats. Soit E un espace de Banach. Désignons par $L^1(E)$ l'espace des (classes de) fonctions f Bochner mesurables de $[0, 1]$ dans E, telles que

$$\|f\|_1 = \int_0^1 \|f(t)\|\, dt < \infty$$

muni de la norme $\|\cdot\|_1$. L'auteur démontre que si (f_n) est une suite de Cauchy faible de $L^1(E)$, on peut toujours écrire $f_n = g_n + h_n$, où $g_n \to 0$ faiblement, et où pour tout $t \in [0, 1]$, la suite $(h_n(t))_n$ est de Cauchy faible. En particulier, il en résulte sans peine que $L^1(E)$ est faiblement séquentiellement complet lorsque E est faiblement séquentiellement complet.

Désignons par $\mathfrak{B}$ la tribu borélienne de $[0, 1]$. Soit $\mathrm{MB}(E)$ l'espace des mesures à variation bornée $m: \mathfrak{B} \to E$, c'est-à-dire des mesures telles que

$$\|m\| = \operatorname{Sup}\left\{ \sum_{i \leq n} \|m(A_i)\| \right\} < \infty$$

où le sup est pris sur toute partition borélienne finie $(A_i)_{i \leq n}$ de $[0, 1]$. L'espace $L^1(E)$ se plonge canoniquement dans $\mathrm{MB}(E)$, et il est naturel de se demander si $\mathrm{MB}(E)$ est faiblement séquentiellement complet lorsque E a cette propriété. Nous avons démontré dans **[2]** que $\mathrm{MB}(E)$ est faiblement séquentiellement complet si E'' est faiblement séquentiellement complet, ou si E est un dual faiblement séquentiellement complet.

Dans ce travail, nous allons montrer qu'il n'est pas suffisant de supposer que E est faiblement séquentiellement complet.

THEOREME 1. *Il existe un espace de Banach réticulé E faiblement séquentiellement complet (c'est-à-dire ne contenant pas c_0) mais tel que la norme de* $\mathrm{MB}(E)$ *n'est pas continue en ordre.*

L'ordre sur $\mathrm{MB}(E)$ est l'ordre naturel: $m \geq 0$ si $m(A) \geq 0$ pour $A \in \mathfrak{B}$.

La décomposition des suites de Cauchy faibles de $L^1(E)$ que nous avons mentionnée s'appuie sur le fait suivant: si (f_n) est une suite bornée de $L^1(E)$, il

Received by the editors May 4, 1983.
1980 *Mathematics Subject Classification.* Primary 46B30; Secondary 46B25.
Key words and phrases. Weakly sequentially complete, Banach lattice, space of measures.

0002-9939/84 $1.00 + $.25 per page

existe une suite (g_n), telle que (g_n) soit combinaison convexe de $(f_n, f_{n+1}, \dots)$ et que pour presque tout $t \in [0,1]$, la suite $(g_n(t))$ est soit une suite de Cauchy faible, soit il existe k tel que la suite $(g_n(t))_{n \geqslant k}$ soit une suite l_1. Une question naturelle se pose: si (f_n) est une martingale, est-il possible d'obtenir le même résultat pour une sous-suite sans considérer des barycentres? La réponse est hélas négative.

THEOREME 2. *Il existe une martingale (f_n) à valeurs dans l'espace de Hagler JH telle que $\|f_n(t)\| \leqslant 1$, et que si (f_{n_k}) est une sous-suite de (f_n), p.s. la suite $(f_{n_k}(t))$ n'est pas de Cauchy faible.*

2. Preuve du Théorème 1. Soit μ la mesure de Lebesgue, et μ^2 la mesure produit sur $[0,1]^2$. On désigne par p la projection de $[0,1]^2$ sur le premier facteur. On désigne par E l'espace des fonctions mesurables z sur $[0,1]^2$ telles que $|z| \leqslant x \circ p + y$, où $x \in L^1(\mu)$, $y \in L^2(\mu^2)$. Pour $z \in E$, on pose

$$\|z\|_E = \operatorname{Inf}\{\|x\|_1 + \|y\|_2;\, x \in L^1(\mu), y \in L^2(\mu^2), |z| \leqslant x \circ p + y\}.$$

Il est standard de vérifier que E est un espace de Banach réticulé. Montrons que la norme de E est continue en ordre. Soit (z_n) une suite décroissante de E^+ avec $\inf z_n = 0$. Soit $\varepsilon > 0$ et $k > 0$ tel que $\|x - x \wedge k\|_1 \leqslant \varepsilon$, $\|y - y \wedge k\|_2 \leqslant \varepsilon$. Pour tout n, on a

$$z_n \leqslant z_n \wedge 2k + (x - x \wedge k) \circ p + y - y \wedge k$$

et puisque $\|z_n \wedge 2k\|_2 \to 0$, on a $\lim\sup \|z_n\|_E \leqslant 2\varepsilon$ ce qui montre le résultat. D'autre part, si (z_n) est une suite croissante bornée en norme, pour tout n on a $z_n \leqslant x_n \circ p + y_n$, où $\|x_n\|_1 \leqslant M$, $\|y_n\|_2 \leqslant M$. Pour $q \leqslant n$, $k > 0$ on a donc

$$z_q \leqslant x_n \circ p + y_n, \quad \text{puis } z_q \wedge k \leqslant (x_n \wedge k) \circ p + y_n \wedge k.$$

Si x^k (resp. y^k) est la limite faible dans $L^1(\mu)$ (resp. $L^2(\mu^2)$) de $x_n \wedge k$ (resp. $y_n \wedge k$) selon un ultrafiltre fixé, on a $z_q \wedge k \leqslant x^k \circ p + y^k$. Les suites (x^k) et (y^k) sont croissantes, et si x, y désignent leurs limites, on a

$$z_q \leqslant x \circ p + y, \quad \text{où } \|x\|_1 \leqslant M_1, \|y\|_2 \leqslant M.$$

Cela montre que $z = \operatorname{Sup} z_q \in E$, et la continuité en ordre de la norme montre que dans E, $\lim z_n = z$. Ceci montre que E ne contient pas c_0, donc est faiblement séquentiellement complet.

On désigne par m la mesure vectorielle de $[0,1]$ dans E donnée par $m(A) = \chi_A \circ p$. Pour A mesurable la variation de cette mesure est la mesure de Lebesgue. On pose $Y_n = [0,1] \times [0, 2^{-n}]$. On désigne par (m_n) la mesure vectorielle donnée par $m_n(A) = m(A)\chi_{Y_n}$, où en d'autres termes $m_n(A)(s,t) = \chi_A(s)\chi_{[0,2^{-n}]}(t)$. La suite (m_n) est décroissante. D'autre part on a

$$\|m_n([0,1])\|_E \leqslant \|\chi_{Y_n}\|_2 \to 0$$

ce qui montre que la suite (m_n) a zéro pour inf. Nous allons montrer maintenant que $\|m_n\| = 1$ pour chaque n. Soit $(A_i)_{i \leqslant 2^n}$ la partition dyadique de rang n de $[0,1]$. La variation $\|m_n\|$ de m_n est telle que

$$\|m_n\| \geqslant \sum_{1 \leqslant 2^n} \|m_n(A_i)\|_E.$$

Calculons $\|m_n(A_i)\|_E$. Soit $x \in L^1(\mu)$ et $y \in L^2(\mu)$ tels que $m_n(A_i) \leqslant x \circ p + y$. On a donc, avec $B = Y_n \cap p^{-1}(A_i)$,

$$2^{-2n} = \int_B m_n(A_i) \leqslant \int_B x \circ p + \int_B y.$$

Puisque x et Y_n sont indépendants, on a

$$\int_B x \circ p \, d\mu^2 \leqslant \int_{Y_n} |x \circ p| \, d\mu^2 \leqslant 2^{-n}\|x\|_1$$

d'où il vient, puisque $\|\chi_B\|_2 = 2^{-n}$; $2^{-2n} \leqslant 2^{-n}\|x\|_1 + 2^{-n}\|y\|_2$ et donc $2^{-n} \leqslant \|x\|_1 + \|y\|_2$. Ceci montre que $\|m_n(A_i)\|_E \geqslant 2^{-n}$, et donc que $\|m_n\| \geqslant 1$.

Ainsi, la norme de $\mathrm{MB}(E)$ n'est pas continue en ordre, donc cet espace contient c_0 et n'est pas faiblement séquentiellement complet.

3. Preuve du Théorème 2. On pose $T_n = \{0, 1\}^n$, $T = \bigcup T_n$. Soit $K = \{0, 1\}^{\mathbf{N}}$, muni de la mesure de Haar (mesure de pile ou face). Pour $\sigma \in K$, $\sigma = (\sigma_n)$ on désigne par $\sigma | n$ la suite $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in T_n$. On dit qu'une famille $(\sigma^i, i \in I, p, q)$ où I est fini, est admissible si pour $i \neq j$ on a $\sigma^i | p \neq \sigma^j | p$. L'espace de Hagler JH est la complétion de $\mathbf{R}^{(T)}$ pour la norme

$$\|x\| = \operatorname{Sup} \sum_{i \in I} \left| \sum_{p \leqslant l \leqslant q} x_{\sigma^i | l} \right|$$

où le sup est pris sur toute les familles $(\sigma^i, i \in I, p, q)$ admissibles. Il est montré dans [1] que JH ne contient pas l^1. Pour $\sigma \in K$, on dénote par h_σ l'élément de JH' donné par $h_\sigma(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k \leqslant n} x_{\sigma | n}$.

Pour $n \geqslant 1$, $\sigma \in K$, soit $b(n, \sigma) = \sum_{i \leqslant n} \sigma_i$. Soit $a(n, \sigma) = (-1)^{b(n,\sigma)} - (-1)^{b(n-1,\sigma)}$ pour $n \geqslant 2$ et $a(1, \sigma) = (-1)^{b(1,\sigma)}$.

Soit Σ_n la sous-algèbre de K engendrée par les n premières fonctions coordonnées.

On définit maintenant f_n: $K \to E$. On va écrire $f_n(\sigma) = (f_n^\sigma(t))_{t \in T}$. Pour $t \in T$, on désigne par $|t|$ sa longueur, c'est-à-dire l'unique n tel que $t \in T_n$. Pour $t \in T$, $\sigma \in K$, on écrit $t \prec \sigma$ si $t = \sigma | n$, où $n = |t|$.

Si $|t| \leqslant n$, on pose $f_n^\sigma(t) = a(|t|, \sigma)$ si $t \prec \sigma$, et on pose $f_n^\sigma(t) = 0$ sinon. Pour $|t| \geqslant n$, on pose $f_n^\sigma(t) = 0$ si $t | n \neq \sigma | n$. Enfin, pour $|t| \geqslant n$, $t | n = \sigma | n$ on pose $f_n^\sigma(t) = 2^{n-m} a(m, t)$ où $m = |t|$, et où $a(m, t) = a(m, \rho)$ pour n'importe quel $\rho \in K$ tel que $\rho | m = t$. ($a(m, t)$ ne dépends que de t.) En utilisant le fait que

$$\left| \sum_{p \leqslant l \leqslant q} a(l, \sigma) \right| \leqslant 2$$

pour tout p, q, σ, on vérifie que $f_n(\sigma) \in JH$, $\|f_n(\sigma)\| \leqslant 2$. De plus f_n est Σ_n-mesurable, et la suite (f_n) est une martingale.

Nous allons maintenant montrer que si (n_k) est une suite quelconque, pour presque tout σ, la suite $(f_{n_k}(\sigma))$ n'est pas une suite de Cauchy faible. Plus précisément nous allons montrer que pour presque tout σ, la suite $(h_\sigma(f_{n_k}(\sigma)))_k$ ne converge pas.

Un calcul direct montre que

$$h_\sigma(f_{n_k}(\sigma)) = \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l+1}(-1)^{b(n_{k+l},\sigma)}.$$

On peut bien sûr supposer $n_{k+1} \geqslant n_k + 2$. Soit

$$A_k = \{\sigma; b(n_k, \sigma), b(n_{k+1}, \sigma) \text{ sont pairs}\},$$
$$B_k = \{\sigma; b(n_k, \sigma), b(n_{k+1}, \sigma) \text{ sont impairs}\}.$$

Alors les ensembles (A_k) sont indépendants, et $\mu(A_k) = 1/4$. Il est de même des ensembles B_k. Il s'ensuit que pour presque tout σ, σ appartient à une infinité d'ensembles A_k et une infinité d'ensembles B_k. Mais, pour $\sigma \in A_k$, on a $h_\sigma(f_{n_k}(\sigma)) \geqslant 1/2$. Pour $\sigma \in B_k$, on a $h_\sigma(f_{n_k}(\sigma)) \leqslant -1/2$. Le résultat en découle.

Bibliographie

1. J. Hagler, *A counter example to several questions about Banach spaces*, Studia Math. **60** (1977), 289–308.

2. M. Talagrand, *Weak Cauchy sequences in* $L^1(E)$, Amer. J. Math. (à paraître).

Equipe d'Analyse, Université Paris 6-Tour 46, 4 Place Jussieu, 75230-Paris Cedex 05, France