

QUAND L'ESPACE DES MESURES A VARIATION BORNEE EST-IL FAIBLEMENT SEQUENTIELLEMENT COMPLET?

MICHEL TALAGRAND

ABSTRACT. We construct a Banach lattice E which does not contain c_0 (hence is weakly sequentially complete), but such that the lattice of E -valued measures of bounded variation contains c_0 .

1. Résultats. Soit E un espace de Banach. Désignons par $L^1(E)$ l'espace des (classes de) fonctions f Bochner mesurables de $[0, 1]$ dans E , telles que

$$\|f\|_1 = \int_0^1 \|f(t)\| dt < \infty$$

muni de la norme $\|\cdot\|_1$. L'auteur démontre que si (f_n) est une suite de Cauchy faible de $L^1(E)$, on peut toujours écrire $f_n = g_n + h_n$, où $g_n \rightarrow 0$ faiblement, et où pour tout $t \in [0, 1]$, la suite $(h_n(t))_n$ est de Cauchy faible. En particulier, il en résulte sans peine que $L^1(E)$ est faiblement séquentiellement complet lorsque E est faiblement séquentiellement complet.

Désignons par \mathfrak{B} la tribu borélienne de $[0, 1]$. Soit $\text{MB}(E)$ l'espace des mesures à variation bornée $m: \mathfrak{B} \rightarrow E$, c'est-à-dire des mesures telles que

$$\|m\| = \text{Sup} \left\{ \sum_{i \leq n} \|m(A_i)\| \right\} < \infty$$

où le sup est pris sur toute partition borélienne finie $(A_i)_{i \leq n}$ de $[0, 1]$. L'espace $L^1(E)$ se plonge canoniquement dans $\text{MB}(E)$, et il est naturel de se demander si $\text{MB}(E)$ est faiblement séquentiellement complet lorsque E a cette propriété. Nous avons démontré dans [2] que $\text{MB}(E)$ est faiblement séquentiellement complet si E'' est faiblement séquentiellement complet, ou si E est un dual faiblement séquentiellement complet.

Dans ce travail, nous allons montrer qu'il n'est pas suffisant de supposer que E est faiblement séquentiellement complet.

THEOREME 1. *Il existe un espace de Banach réticulé E faiblement séquentiellement complet (c'est-à-dire ne contenant pas c_0) mais tel que la norme de $\text{MB}(E)$ n'est pas continue en ordre.*

L'ordre sur $\text{MB}(E)$ est l'ordre naturel: $m \geq 0$ si $m(A) \geq 0$ pour $A \in \mathfrak{B}$.

La décomposition des suites de Cauchy faibles de $L^1(E)$ que nous avons mentionnée s'appuie sur le fait suivant: si (f_n) est une suite bornée de $L^1(E)$, il

Received by the editors May 4, 1983.

1980 *Mathematics Subject Classification.* Primary 46B30; Secondary 46B25.

Key words and phrases. Weakly sequentially complete, Banach lattice, space of measures.

©1984 American Mathematical Society
0002-9939/84 \$1.00 + \$.25 per page

existe une suite (g_n) , telle que (g_n) soit combinaison convexe de (f_n, f_{n+1}, \dots) et que pour presque tout $t \in [0, 1]$, la suite $(g_n(t))$ est soit une suite de Cauchy faible, soit il existe k tel que la suite $(g_n(t))_{n \geq k}$ soit une suite l_1 . Une question naturelle se pose: si (f_n) est une martingale, est-il possible d'obtenir le même résultat pour une sous-suite sans considérer des barycentres? La réponse est hélas négative.

THEOREME 2. *Il existe une martingale (f_n) à valeurs dans l'espace de Hagler JH telle que $\|f_n(t)\| \leq 1$, et que si (f_{n_k}) est une sous-suite de (f_n) , p.s. la suite $(f_{n_k}(t))$ n'est pas de Cauchy faible.*

2. Preuve du Théorème 1. Soit μ la mesure de Lebesgue, et μ^2 la mesure produit sur $[0, 1]^2$. On désigne par p la projection de $[0, 1]^2$ sur le premier facteur. On désigne par E l'espace des fonctions mesurables z sur $[0, 1]^2$ telles que $|z| \leq x \circ p + y$, où $x \in L^1(\mu)$, $y \in L^2(\mu^2)$. Pour $z \in E$, on pose

$$\|z\|_E = \text{Inf}\{\|x\|_1 + \|y\|_2; x \in L^1(\mu), y \in L^2(\mu^2), |z| \leq x \circ p + y\}.$$

Il est standard de vérifier que E est un espace de Banach réticulé. Montrons que la norme de E est continue en ordre. Soit (z_n) une suite décroissante de E^+ avec $\inf z_n = 0$. Soit $\varepsilon > 0$ et $k > 0$ tel que $\|x - x \wedge k\|_1 \leq \varepsilon$, $\|y - y \wedge k\|_2 \leq \varepsilon$. Pour tout n , on a

$$z_n \leq z_n \wedge 2k + (x - x \wedge k) \circ p + y - y \wedge k$$

et puisque $\|z_n \wedge 2k\|_2 \rightarrow 0$, on a $\limsup \|z_n\|_E \leq 2\varepsilon$ ce qui montre le résultat. D'autre part, si (z_n) est une suite croissante bornée en norme, pour tout n on a $z_n \leq x_n \circ p + y_n$, où $\|x_n\|_1 \leq M$, $\|y_n\|_2 \leq M$. Pour $q \leq n$, $k > 0$ on a donc

$$z_q \leq x_n \circ p + y_n, \text{ puis } z_q \wedge k \leq (x_n \wedge k) \circ p + y_n \wedge k.$$

Si x^k (resp. y^k) est la limite faible dans $L^1(\mu)$ (resp. $L^2(\mu^2)$) de $x_n \wedge k$ (resp. $y_n \wedge k$) selon un ultrafiltre fixé, on a $z_q \wedge k \leq x^k \circ p + y^k$. Les suites (x^k) et (y^k) sont croissantes, et si x, y désignent leurs limites, on a

$$z_q \leq x \circ p + y, \text{ où } \|x\|_1 \leq M_1, \|y\|_2 \leq M.$$

Cela montre que $z = \text{Sup } z_q \in E$, et la continuité en ordre de la norme montre que dans E , $\lim z_n = z$. Ceci montre que E ne contient pas c_0 , donc est faiblement séquentiellement complet.

On désigne par m la mesure vectorielle de $[0, 1]$ dans E donnée par $m(A) = \chi_A \circ p$. Pour A mesurable la variation de cette mesure est la mesure de Lebesgue. On pose $Y_n = [0, 1] \times [0, 2^{-n}]$. On désigne par (m_n) la mesure vectorielle donnée par $m_n(A) = m(A)\chi_{Y_n}$, où en d'autres termes $m_n(A)(s, t) = \chi_A(s)\chi_{[0, 2^{-n}]}(t)$. La suite (m_n) est décroissante. D'autre part on a

$$\|m_n([0, 1])\|_E \leq \|\chi_{Y_n}\|_2 \rightarrow 0$$

ce qui montre que la suite (m_n) a zéro pour inf. Nous allons montrer maintenant que $\|m_n\| = 1$ pour chaque n . Soit $(A_i)_{i \leq 2^n}$ la partition dyadique de rang n de $[0, 1]$. La variation $\|m_n\|$ de m_n est telle que

$$\|m_n\| \geq \sum_{i \leq 2^n} \|m_n(A_i)\|_E.$$

Calculons $\|m_n(A_i)\|_E$. Soit $x \in L^1(\mu)$ et $y \in L^2(\mu)$ tels que $m_n(A_i) \leq x \circ p + y$. On a donc, avec $B = Y_n \cap p^{-1}(A_i)$,

$$2^{-2n} = \int_B m_n(A_i) \leq \int_B x \circ p + \int_B y.$$

Puisque x et Y_n sont indépendants, on a

$$\int_B x \circ p \, d\mu^2 \leq \int_{Y_n} |x \circ p| \, d\mu^2 \leq 2^{-n} \|x\|_1$$

d'où il vient, puisque $\|\chi_B\|_2 = 2^{-n}$; $2^{-2n} \leq 2^{-n} \|x\|_1 + 2^{-n} \|y\|_2$ et donc $2^{-n} \leq \|x\|_1 + \|y\|_2$. Ceci montre que $\|m_n(A_i)\|_E \geq 2^{-n}$, et donc que $\|m_n\| \geq 1$.

Ainsi, la norme de $MB(E)$ n'est pas continue en ordre, donc cet espace contient c_0 et n'est pas faiblement séquentiellement complet.

3. Preuve du Théorème 2. On pose $T_n = \{0, 1\}^n$, $T = \bigcup T_n$. Soit $K = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, muni de la mesure de Haar (mesure de pile ou face). Pour $\sigma \in K$, $\sigma = (\sigma_n)$ on désigne par $\sigma|n$ la suite $(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in T_n$. On dit qu'une famille $(\sigma^i, i \in I, p, q)$ où I est fini, est admissible si pour $i \neq j$ on a $\sigma^i|p \neq \sigma^j|p$. L'espace de Hagler JH est la complétion de $\mathbf{R}^{(T)}$ pour la norme

$$\|x\| = \text{Sup} \sum_{i \in I} \left| \sum_{p \leq i \leq q} x_{\sigma^i|q} \right|$$

où le sup est pris sur toute les familles $(\sigma^i, i \in I, p, q)$ admissibles. Il est montré dans [1] que JH ne contient pas l^1 . Pour $\sigma \in K$, on dénote par h_σ l'élément de JH' donné par $h_\sigma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \leq n} x_{\sigma|n}$.

Pour $n \geq 1$, $\sigma \in K$, soit $b(n, \sigma) = \sum_{i \leq n} \sigma_i$. Soit $a(n, \sigma) = (-1)^{b(n, \sigma)} - (-1)^{b(n-1, \sigma)}$ pour $n \geq 2$ et $a(1, \sigma) = (-1)^{b(1, \sigma)}$.

Soit Σ_n la sous-algèbre de K engendrée par les n premières fonctions coordonnées.

On définit maintenant $f_n: K \rightarrow E$. On va écrire $f_n(\sigma) = (f_n^\sigma(t))_{t \in T}$. Pour $t \in T$, on désigne par $|t|$ sa longueur, c'est-à-dire l'unique n tel que $t \in T_n$. Pour $t \in T$, $\sigma \in K$, on écrit $t < \sigma$ si $t = \sigma|n$, où $n = |t|$.

Si $|t| \leq n$, on pose $f_n^\sigma(t) = a(|t|, \sigma)$ si $t < \sigma$, et on pose $f_n^\sigma(t) = 0$ sinon. Pour $|t| \geq n$, on pose $f_n^\sigma(t) = 0$ si $|t|n \neq \sigma|n$. Enfin, pour $|t| \geq n$, $|t|n = \sigma|n$ on pose $f_n^\sigma(t) = 2^{n-m} a(m, t)$ où $m = |t|$, et où $a(m, t) = a(m, \rho)$ pour n'importe quel $\rho \in K$ tel que $\rho|m = t$. ($a(m, t)$ ne dépend que de t .) En utilisant le fait que

$$\left| \sum_{p \leq i \leq q} a(i, \sigma) \right| \leq 2$$

pour tout p, q, σ , on vérifie que $f_n(\sigma) \in JH$, $\|f_n(\sigma)\| \leq 2$. De plus f_n est Σ_n -mesurable, et la suite (f_n) est une martingale.

Nous allons maintenant montrer que si (n_k) est une suite quelconque, pour presque tout σ , la suite $(f_{n_k}(\sigma))$ n'est pas une suite de Cauchy faible. Plus précisément nous allons montrer que pour presque tout σ , la suite $(h_\sigma(f_{n_k}(\sigma)))_k$ ne converge pas.

Un calcul direct montre que

$$h_{\sigma}(f_{n_k}(\sigma)) = \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l+1} (-1)^{b(n_{k+l}, \sigma)}.$$

On peut bien sûr supposer $n_{k+1} \geq n_k + 2$. Soit

$$A_k = \{\sigma; b(n_k, \sigma), b(n_{k+1}, \sigma) \text{ sont pairs}\},$$

$$B_k = \{\sigma; b(n_k, \sigma), b(n_{k+1}, \sigma) \text{ sont impairs}\}.$$

Alors les ensembles (A_k) sont indépendants, et $\mu(A_k) = 1/4$. Il est de même des ensembles B_k . Il s'ensuit que pour presque tout σ , σ appartient à une infinité d'ensembles A_k et une infinité d'ensembles B_k . Mais, pour $\sigma \in A_k$, on a $h_{\sigma}(f_{n_k}(\sigma)) \geq 1/2$. Pour $\sigma \in B_k$, on a $h_{\sigma}(f_{n_k}(\sigma)) \leq -1/2$. Le résultat en découle.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. Hagler, *A counter example to several questions about Banach spaces*, *Studia Math.* **60** (1977), 289–308.

2. M. Talagrand, *Weak Cauchy sequences in $L^1(E)$* , *Amer. J. Math.* (à paraître).

EQUIPE D'ANALYSE, UNIVERSITÉ PARIS 6-TOUR 46, 4 PLACE JUSSIEU, 75230-PARIS CEDEX 05, FRANCE