PROCEEDINGS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 91, Number 2, June 1984

POINTS EXTREMAUX DANS LE DUAL DE $L^1(\mu, E)$

MICHEL TALAGRAND

ABSTRACT. The dual of $L^1(\mu, E)$ is the space of bounded weak* scalarly measurable functions $f\colon\Omega \to E^*$. We show that f is extremal in the unit ball of $L^1(\mu, E)^*$ if and only if the probability it induces on the unit ball of E^* is maximal for the Choquet order.

On désigne par (Ω, Σ, μ) un espace probabilisé complet et par E un espace de Banach. On désigne par $L^1(\mu, E)$ l'espace des fonctions Bochner mesurables de Ω dans E, qui sont de norme intégrable. Une fonction $f\colon\Omega \to E'$ est dite préscalairement mesurable si pour tout $x \in E$, la fonction $\omega \to \langle x, f(\omega)\rangle$ est mesurable. Deux fonctions f, g préscalairement mesurables dont dites préscalairement équivalentes si pour $x \in E$ on a $\langle x, f(\omega)\rangle = \langle x, g(\omega)\rangle$ p.s. Désignons par $\mathcal{L}_*^\infty(\mu, E')$ l'espace des fonctions préscalairement mesurables bornées $\Omega \to E'$, et par $L_*^\infty(\mu, E')$ son quotient par la relation "préscalairement équivalentes". On munit $L_*^\infty(\mu, E')$ de la norme

$$\|f\| = \operatorname{Sup}\{\|\langle x, f(\cdot)\rangle\|_\infty; x \in E,\ \|x\| \leq 1\}.$$

Il est connu [**2**] que $L_*^\infty(\mu, E')$ s'identifie au dual de $L^1(\mu, E)$, l'accouplement étant donné par

$$\langle g, f\rangle = \int \langle g(\omega), f(\omega)\rangle\, d\mu(\omega)$$

pour $g \in L^1(\omega, E)$, $f \in L_*^\infty(\mu, E')$. En fait ce résultat est une conséquence immédiate de l'existence d'un relèvement ρ de $L^\infty(\mu)$. En effet, pour $x \in E$, $\varphi \in L^1(\mu, E)'$, définissons $\varphi_x \in L^\infty(\mu)$ par $\varphi_x(h) = \varphi(xh)$ pour $h \in L^1(\mu)$. Si l'on pose $\langle x, f(\omega)\rangle = \rho(\varphi_x)(\omega)$, on a sans peine $\langle g, f\rangle = \varphi(g)$ pour $g \in L^1(\mu, E)$. On désigne par K la boule unité de E'. Munie de la topologie préfaible $\sigma(E', E)$, c'est un convexe compact.

Soit f un élément de $L_*^\infty(\mu, E)$ de norme ≤ 1. Soit ρ un relèvement de $L^\infty(\mu)$, et $\rho(f)$ donnée par

$$\langle x, \rho(f)(\omega)\rangle = \rho(\langle x, f(\cdot)\rangle)(\omega) \quad \forall x \in E.$$

Pour $\|x\| \leq 1$, on a $\|\langle x, f(\cdot)\rangle\|_\infty \leq 1$, donc $|\langle x, \rho(f)(\omega)\rangle| \leq 1$. Ceci montre que $\rho(f)$ est à valeurs dans K. D'autre part $\rho(f) \in \mathcal{L}_*^\infty(\mu, E)$, et est dans la classe de f. On peut donc définir une mesure de probabilité $\nu = f\mu$ sur K par

$$\nu(h) = \int h(\rho(f))\, d\mu$$

pour h fonction continue sur K. (On voit sans peine que cette définition ne dépends pas de ρ.) On désigne par $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions convexes continues sur K.

Received by the editors May 23, 1983.

1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 46A55; Secondary 46E30, 46G15.

On rappelle que l'ordre de Choquet $\prec$ est défini pour deux mesures de probabilités ν, λ sur K par

$$\nu \prec \lambda \Leftrightarrow \forall h \in \mathcal{C}, \quad \int h\, d\nu \leq \int h\, d\lambda.$$

Le but de ce travail est d'établir le résultat suivant (conjecturé par C. Stegall, qui a démontré que $b \Rightarrow a$).

THEOREME. *Les conditions suivantes sont équivalentes, pour f dans la boule unité B de $L^\infty_*(\mu, E) = L^1(\mu, E)'$:*

(a) *f est extrémale dans B.*
(b) *La mesure $f\mu$ est maximale pour l'ordre de Choquet.*

PREUVE. (b)$\Rightarrow$(a). Supposons si possible que f ne soit pas extrémale, et donc que $f = (f_1 + f_2)/2$, où $f_1, f_2 \in B$, $f_1 \neq f_2$. Comme précédemment, l'utilisation d'un relèvement de $L^\infty(\mu)$ donne $f', f'_1, f'_2 \in L^\infty_\alpha(\mu, E)$, dans la classe de f, f_1, f_2 respectivement, et telles que $f' = (f'_1 + f'_2)/2$. Soit $\nu = f\mu$, et soit λ la mesure de probabilité sur K donnée par

$$\lambda(h) = \frac{1}{2} \int (h \circ f_1 + h \circ f_2)\, d\mu$$

pour h continue sur K. Si h est convexe, on a de façon évidente $\nu(h) \leq \lambda(h)$, et ainsi $\nu \prec \lambda$. D'autre part, puisque $f_1 \neq f_2$, il existe $x \in E$ tel que $\langle x, f_1(\omega)\rangle \neq \langle x, f_2(\omega)\rangle$ pour $\omega \in A \in \Sigma$ où $\mu(A) > 0$. Il en résulte que si $h \in \mathcal{C}$ est donné par $h(y) = \langle x, y\rangle^2$ pour $y \in K$, on a

$$h(f_1(\omega)) + h(f_2(\omega)) > 2h((f_1(\omega) + f_2(\omega))/2)$$

pour $\omega \in A$, et donc $\lambda(h) \neq \nu(h)$, ce qui montre que $\lambda \neq \nu$, et ainsi que ν n'est pas maximale pour l'ordre de Choquet, une contradiction.

(a)$\Rightarrow$(b). *Première étape.* Supposons que la probabilité $\nu = f\mu$ sur E'_1 ne soit pas maximale pour l'ordre de Choquet, et soit $\nu \prec \lambda$, $\nu \neq \lambda$. On désigne par L l'ensemble des probabilitiés de Radon sur K, muni de la topologie vague $\sigma(\mathcal{C}(K)', \mathcal{C}(K))$. On désigne par M le sous-ensemble de $K \times L$ formé des couples (x, θ) où $\varepsilon_x \prec \theta$, ε_x désignant la mesure de Dirac en x. Le théorème de Cartier [**3**, p. 109] montre qu'il existe une probabilité de Radon m sur $K \times L$, telle que $m(M) = 1$, et que pour $f, g \in \mathcal{C}(K)$ on ait

$$\lambda(f) - \mu(g) = \int_{K \times L} (f(x) - \theta(g))\, dm(x, \theta). \tag{1}$$

Deuxième étape. Désignons par π la projection de $K \times L$ sur K. Si l'on fait $g = 0$ dans (1) on voit que $\pi(m) = \lambda$. Désignons par $\mathrm{Ba}(K)$ la tribu de Baire de K, c'est-à-dire la tribu engendrée par les fonctions continues. Désignons par Σ' la complètion de $\mathrm{Ba}(K)$ pour λ. Désignons par $\overline{\rho}$ un relèvement de l'espace $L^\infty(\lambda, \Sigma')$, c'est-à-dire que $\overline{\rho}(f)$ est Σ'-mesurable pour chaque $f \in L^\infty(\lambda, \Sigma')$. Pour $h \in \mathcal{C}(L)$, il existe une unique $g_h \in L^\infty(\lambda)$ telle que pour A mesurable on ait

$$\int_A g_h\, d\lambda = \int_{\pi^{-1}(A)} h(\theta)\, dm(x, \theta).$$

Posons $\theta_x(h) = \overline{\rho}(g_h)(x)$. Ainsi θ_x est une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}(L)$, avec $\theta_x(1) = 1$; en d'autre termes, c'est une probabilité de Radon. De plus on a pour $h \in \mathcal{C}(L)$ et A mesurable

$$(2) \qquad \int_{\pi^{-1}(A)} h(\theta)\, dm(x,\theta) = \int_A \theta_x(h)\, d\lambda(x).$$

Par approximation on en déduit que pour $h \in \mathcal{C}(K \times L)$ et A mesurable, on a

$$(3) \qquad \int_{\pi^{-1}(A)} h(x,\theta)\, dm(x,\theta) = \int_A \theta_x(h(x,\cdot))\, d\lambda(x).$$

Posons, pour $g \in \mathcal{C}(K)$,

$$\nu_x(g) = \int_L \theta(g)\, d\theta_x(\theta) = \theta_x(\theta(g)).$$

Utilisant (3) avec $h(x,\theta) = g(x) - \theta(g)$ il vient,

$$(4) \qquad \int_{\pi^{-1}(A)} (g(x) - \theta(g))\, dm(x,\theta) = \int_A (g(x) - \nu_x(g))\, d\lambda(x).$$

Si g est convexe, on a $g(x) \leq \theta(g)$ pour $(x,\theta) \in M$. Puisque $m(M) = 1$, on a

$$\int_A (g(x) - \nu_x(g))\, d\lambda(x) \leq 0$$

et ainsi $g(x) \leq \nu_x(g)$ p.s. L'ensemble exceptionnel dépends de g. On ne saurait donc affirmer que $\varepsilon_x \prec \nu_x$. Mais, comme nous le verrons, cela ne crée pas problème.

Troisième étape. Utilisons (1) et (4) avec $A = K$. Il vient

$$(5) \qquad \lambda(g) - \mu(g) = \int (g(x) - \nu_x(g))\, d\lambda(x).$$

On sait que $\lambda \neq \mu$. Puisque $\mathcal{C} - \mathcal{C}$ est dense pour la norme uniforme, il existe $g \in \mathcal{C}$ avec $\lambda(g) < \lambda(g)$. Toujours par densité, on peut supposer que $g = \mathrm{Sup}_{i \leq n}\, g_i$ où chaque g_i est de la forme $g_i(x) = \langle y_i, x\rangle + a_i$, où $a_i \in \mathbf{R}$, $y_i \in E$. Nous allons prouver l'assertion suivante

(A) "Il existe $a, b \in \mathbf{Q}$, $b > 0$, et $y \in E$ tels que si $A = \{x \in K; \langle y, x\rangle > a\}$ on a $\lambda(B) > 0$, oú $B = \{x \in K; \nu_x(A) > b,\ \nu_x(K \backslash A) > b\}$." En effet, dans le cas contraire, pour chaque $y \in E$, on a

$$\nu_x(\{z; \langle y, z\rangle > a\}) \in \{0,1\} \quad \lambda \text{ p.s.}$$

pour chaque $a \in \mathbf{Q}$, donc pour chaque $a \in \mathbf{R}$. En d'autre termes il existe a_x tel que

$$\nu_x(\{z \in K; \langle y, z\rangle = a_x\}) = 1 \quad \lambda \text{ p.s.}$$

D'autre part, si h est une fonction réelle convexe sur $\mathbf{R}$, la fonction $\overline{h}\colon x \to h(\langle y, x\rangle)$ est convexe, et on a vu que

$$\nu_x(\overline{h}) = h(a_x) \geq \varepsilon_x(\overline{h}) = h(\langle y, x\rangle) \quad \lambda \text{ p.s.}$$

Il en résulte $a_x = \langle y, x\rangle$ p.s., et donc que

$$\nu_x(\{z \in K; \langle y, z\rangle = \langle y, x\rangle\}) = 1 \quad \lambda \text{ p.s.}$$

En particulier

$$\nu_x(\{z \in K; \forall i \leq n, \langle y_i, z\rangle = \langle y_i, x\rangle\}) = 1 \quad \lambda \text{ p.s.}$$

Il découle alors de (5) que $\lambda(g) = \mu(g)$, une contradiction. L'assertion (A) est démontrée.

Quatrième étape. Soient y, a, b, A, B comme dans (A). Pour $x \notin B$, posons, $h_1(x) = h_2(x) = x$. Pour $x \in B$, soit h_x^1 le barycentre de a mesure $\nu_x(A)^{-1}\nu_x|_A$. Autrement dit, pour $y' \in E$, on a

$$\langle y', h_x^1\rangle = \nu_x(A)^{-1}\int_{z\in A} \langle y, z\rangle \, d\nu_x(z).$$

Cette formule montre que l'application $x \to \langle y', h_x^1\rangle$ est Σ'-mesurable. Soit de même h_x^2 le barycentre de la mesure $\nu_x(K\backslash A)^{-1}\nu_x|_{K-A}$. L'application $x \to \langle y', h_x^2\rangle$ est encore Σ'-mesurable pour $y' \in E$. De plus, pour $x \in B$, on a $\langle y, h_x^1\rangle > a$, $\langle y, h_x^2\rangle < a$, donc $h_x^1 \neq h_x^2$. Posons $h_x^3 = x$ pour $x \notin B$ et pour $x \in B$ posons

$$h_x^3 = \frac{1}{1-b}((\nu_x(A) - b)h_x^1 + \nu_x(K\backslash A)h_x^2).$$

(On note que $\nu_x(A) > b$ pour $x \in B$, et que donc $h_x^3 \in K$.) Pour $y' \in E$, l'application $x \to \langle y', h_x^3\rangle$ est encore Σ'-mesurable. De plus, pour $x \in B$ on a $\langle y, h_x^1\rangle \neq \langle y, h_x^3\rangle$.

Cinquième étape. Posons $g^1(\omega) = h^1_{g(\omega)}$, $g^2(\omega) = h^3_{g(\omega)}$, oú $g\colon \Omega \to K$ est n'importe quelle fonction préscalairement mesurable bornée dans la classe de f. Puisque $g^{-1}(C) \in \Sigma$ pour $C \in \Sigma$, les deux fonctions g^1 et g^2 sont préscalairement mesurables. Pour $\omega \in g^{-1}(B)$, on a $\langle y, g^1(\omega)\rangle \neq \langle y, g^2(\omega)\rangle$, et puisque $\mu g^{-1}(B) = \lambda(B)$, ceci montre que g^1 et g^2 ne sont pas préscalairement équivalentes.

Il reste à montrer que g et $bg^1 + (1-b)g^2$ sont présclairement équivalentes. Pour $y' \in E$, on a, avec $\varphi(z) = \langle y', z\rangle$

$$\begin{aligned}\nu_x(\varphi) &= \nu_x(A)\langle y', h_x^1\rangle + \nu_x(K\backslash A)\langle y', h_x^2\rangle \\ &= \langle y', bh_x^1 + (1-b)h_x^3\rangle.\end{aligned}$$

D'autre part, puisque g est à fois convexe et concave, on a $\nu_x(\varphi) = \langle y', x\rangle\lambda$ p.s. et

$$\langle y', x\rangle = \langle y', bh_x^1 + (1-b)h_x^3\rangle \quad \lambda \text{ p.s.}$$

Le résultat en découle.

COROLLAIRE. *Supposons que l'ensemble $\mathcal{E}$ des points extrémaux de K soit $\mathcal{K}$-analytique* [**1**]. *Alors $f \in L_*^\infty(\mu, E')$ est extrémale dans la boule unité si et seulement si il existe $g \in \mathcal{L}_*^\infty(\mu, E')$ dans la classe de f telle que g prenne ses valeurs dans $\mathcal{E}$.*

PREUVE. Supposons d'abord l'existence de g. Pour tout ensemble A de K, qui est de Baire pour $\sigma(E', E)$, on a $\nu(A) = \mu(g^{-1}(A))$ où $\nu = g\mu$. On a donc $\nu(A) = 0$ si $A \cap \mathcal{E} = \emptyset$. Si L est un compact de K disjoint de $\mathcal{E}$, il existe un ensemble de Baire qui sépare L et $\mathcal{E}$, et donc $\nu(L) = 0$, d'où $\nu(\mathcal{E}) = 1$ puisque $\mathcal{E}$ est ν-mesurable. Ainsi ν est maximale d'aprés [**3**, Proposition 9-3], Réciproquement, supposons ν maximale. Alors d'aprés [**3**], tout K_σ qui contient $\mathcal{E}$ porte ν, donc $\nu(L) = 0$ pour tout compact L disjoint de $\mathcal{E}$, donc $\nu(\mathcal{E}) = 1$, c'est-à-dire qu'il existe des compacts (L_n) de $\mathcal{E}$ avec $\nu(L_n) \geq 1 - 2^{-n}$. Soit g dans la classe de f donnée par

$$\langle g(\omega), x\rangle = \rho(\langle f, x\rangle)(\omega)$$

pour un relèvement donné ρ de L^∞. Il est montré dans [**2**] que pour tout *borélien* A de K on a $\mu(g^{-1}(A)) = \nu(A)$. Il en résulte que $g(\omega) \in \mathcal{E}$ p.s. Il reste à modifier g sur un ensemble négligeable pour conclure.

REFERENCES

1. G. Choquet, *Lecture on analysis*, Benjamin, New York, 1969.
2. A. and I. Ionescu-Tulcea, *Topics in the theory of lifting*, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1979.
3. R. R. Phelps, *Lectures on Choquet's theorem*, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1966.

EQUIPE D'ANALYSE, EQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIÉE AU C.N.R.S. N°. 294, UNIVERSITÉ PARIS VI, 75230 PARIS CEDEX 05, FRANCE