PROCEEDINGS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 92, Number 3, November 1984

UN RESULTAT D'UNIFORMISATION BORÉLIENNE

GABRIEL DEBS

RÉSUMÉ. On montré que si B est un borélien du produit $X \times Y$ de deux espaces polonais tel que (i) pour tout $x \in X$ la coupe $B(x)$ est la réunion d'un K_σ et d'un $\mathcal{G}_\delta$ de Y et (ii) pour tout ouvert V de Y l'ensemble $\{x \in X: B(x) \cap V \neq \emptyset\}$ est borélien, alors B admet une uniformisation borélienne.

Sauf mention expresse du contraire on désigne par *X et Y deux espaces polonais, A et B deux parties analytiques disjointes* dans le produit $X \times Y$.

Dans [**4**] J. Saint-Raymond a démontré que si pour tout $x \in X$ la coupe $A(x)$ est contenue dans un $\mathcal{F}_\sigma$ disjoint de la coupe $B(x)$, alors on peut trouver une suite $(C_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de boréliens à coupes fermées telle que le borélien $C = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} C_n$ contienne A et soit disjoint de B. On rappelle que si $T \subset X \times Y$ et $x \in X$ la coupe $T(x)$ est définie par $T(x) = \{y \in Y: \ (x,y) \in T\}$. Dans tout ce qui suit on entendra par coupe, une coupe suivant un élément de X. Par exemple, T est à coupes $\mathcal{F}_\sigma$ signifie que pour tout $x \in X$, $T(x)$ est un $\mathcal{F}_\sigma$ dans Y. Comme l'a montré Hillard (voir [**3**]) la démonstration du résultat précédent est rendue plus claire par l'introduction d'une dérivation (au sense de Dellacherie; voir [**2**]) et ceci de la manière suivante:

Ecrivons l'ensemble analytique A comme image d'un espace polonais P par une application φ continue. A tout fermé F de P on associe le fermé:

$$d(F) = \{t \in F: \forall V \text{ voisinage de } t,\ \overline{\varphi(V \cap F)} \cap B \neq \emptyset\}.$$

On définit ainsi une dérivation analytique sur $\mathcal{F}(P)$, l'ensemble des fermés de P muni de sa tribu d'Effros qui est standard (voir [**1**] pour les détails). A tout $F \in \mathcal{F}(P)$, on associe la suite transfinie $\{d^\alpha(F): \ \alpha < \omega_1\}$ et l'indice $i(F)$, defini par

$$d^\alpha(F) = F \cap \bigcap\{d^\beta(F): \beta < \alpha\}$$

et

$$i(F) = \inf\{\alpha < \omega_1: \ d^\alpha(F) = \emptyset\}.$$

Alors $i(\{x\} \times A(x))$ est dénombrable si et seulement si $A(x)$ est contenu dans un $\mathcal{F}_\sigma$ disjoint de $B(x)$. En particulier l'ensemble

$$\{x \in X: \exists C \in \mathcal{F}_\sigma(Y),\ A(x) \subset C \text{ et } C \cap B(x) = \emptyset\}$$

est co-analytique dans X; c'est là une amélioration d'un vieux résultat de Kunugui. Pour plus de détails voir [**3**, **4**].

La différence de deux $\mathcal{F}_\sigma$. On conserve les notations du paragraphe précédent et on suppose de plus que B est *borélien.*

Pour tout fermé F de P on définit

$$\delta(F) = \{t \in F: \ \forall V \text{ voisinage de } t,\ \overline{\varphi(V \cap F)} \cap B \notin \mathcal{F}_\sigma(X \times Y)\}.$$

Dans toute la suite $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ désignera une base de la topologie de P.

Received by the editors July 22, 1983 and, in revised form, November 18, 1983.
1980 *Mathematics Subject Classification.* Primary 54H05, 04A15.

LEMME 1. *δ est une dérivation analytique sur $\mathcal{F}(P)$.*

DÉMONSTRATION. Si $F' \subset F$ et $t \notin \delta(F)$ alors il existe un voisinage V de t tel que $C = \overline{\varphi(V \cap F)} \cap B \in \mathcal{F}_\sigma(X \times Y)$ et par suite $\overline{\varphi(V \cap F')} \cap B = \overline{\varphi(V \cap F')} \cap C \in \mathcal{F}_\sigma(X \times Y)$ ce qui prouve que δ est croissante. Et comme $\delta(F) \subset F$ alors δ est une dérivation. Il reste à montrer que l'ensemble

$$\mathcal{R} = \{(F', F) \in \mathcal{F}(P) \times \mathcal{F}(P)\colon F' \subset \delta(F)\}$$

est analytique.

Soit $(W_p)_{p \in \mathbf{N}}$ une base de la topologie de $X \times Y$; pour tout $n \in \mathbf{N}$ posons:

$$\mathcal{B}_n = \{(F, z) \in \mathcal{F}(P) \times B\colon z \in \overline{\varphi(V_n \cap F)}\},$$

$$(F, z) \in \mathcal{B}_n \Leftrightarrow \forall p, \qquad z \notin W_p \quad \text{ou } F \cap V_n \cap \varphi^{-1}(W_p) \neq \emptyset.$$

Donc $\mathcal{B}_n$ est borélien et il résulte du théorème de Kunugui que:

$$\{F \in \mathcal{F}(P); \mathcal{B}_n(F) \notin \mathcal{F}_\sigma\} = \{F \in \mathcal{F}(P)\colon \overline{\varphi(V_n \cap F)} \cap B \notin \mathcal{F}_\sigma\}$$

est analytique; il est de même alors pour $\mathcal{R}$ puisque:

$$(F', F) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \forall n,\ F' \cap V_n = \emptyset \quad \text{ou } \overline{\varphi(V_n \cap F)} \cap B \notin \mathcal{F}_\sigma. \quad \square$$

Notations. Si M est une partie de P, t un élément de M avec $\varphi(t) = (x, y)$, on pose $M_t = M \cap \varphi^{-1}(\{x\} \times A(x))$. Sur l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{M \in \mathcal{F}(P)\colon\ \forall t \in M,\ M_t \in \mathcal{F}(P)\}$$

on définit (d'une manière analogue à [**3**]) une opération Δ par

$$\Delta(M) = \bigcup_{t \in M} \delta(M_t).$$

La famille $\mathcal{S}$ étant stable par Δ et par intersections, on peut définir par récurrence sur l'ordinal α les ensembles:

$$\begin{aligned} P^{(0)} &= P, \\ P^{(\alpha)} &= \Delta(P^{(\beta)}) \quad \text{si } \alpha = \beta + 1, \\ P^{(\alpha)} &= \bigcap_{\beta < \alpha} P^{(\beta)} \quad \text{si } \alpha \text{ est limite.} \end{aligned}$$

LEMME 2. *Soit M une partie analytique de P qui appartient à $\mathcal{S}$; alors $\Delta(M)$ est analytique.*

DÉMONSTRATION. Soit $t \in M$ avec $\varphi(t) = (x, y)$;

$$\begin{aligned} t \notin \Delta(M) &\Leftrightarrow t \notin \delta(M_t) \\ &\Leftrightarrow \exists n\colon\ t \in V_n \text{ et } \overline{\varphi(V_n \cap M_t)} \cap B \in \mathcal{F}_\sigma(X \times Y) \\ &\Leftrightarrow \exists n\colon t \in V_n \text{ et } \overline{\varphi(V_n \cap M)}(x) \cap B(x) \in \mathcal{F}_\sigma(Y) \\ &\Leftrightarrow \exists n\colon t \in V_n \text{ et } \exists C \in \mathcal{F}_\sigma(Y)\colon \varphi(V_n \cap M)(x) \subset C \subset B(x) \end{aligned}$$

ce qui montre en utilisant le théorème de Kunugui que $\Delta(M)$ est analytique. $\square$

Notons $\tilde{A}$ la partie de $X \times Y$ définie par

$$(x, y) \in \tilde{A} \Leftrightarrow y \in \overline{A(x)}.$$

LEMME 3. *Si $\tilde{A} \cap B$ est à coupes $\mathcal{F}_\sigma$, alors il existe un borélien C à coupes fermées, qui contient A et tel que $C \cap B$ soit à coupes $\mathcal{F}_\sigma$.*

DÉMONSTRATION. L'ensemble $\tilde{A} \cap B$ est un analytique à coupes $\mathcal{F}_\sigma$ et contenu dans B qui est borélien; donc d'après le résultat de Saint-Raymond il existe un borèlien D à coupes $\mathcal{F}_\sigma$ tel que $\tilde{A} \cap B \subset D \subset B$. Par suite $\tilde{A} \cap (B \backslash D) = \emptyset$ et d'aprés [**4**, Lemme 3], on peut trouver un borélien C à coupes fermées tel que $A \subset C$ et $C \cap (B \backslash D) = \emptyset$; on a alors que $C \cap B = C \cap D$ est bien à coupes $\mathcal{F}_\sigma$. Q.E.D.

En utilisant les Lemmes 2 et 3 on peut alors montrer par récurrence sur α le lemme suivant, l'une manière analogue à [**4**, Lemmes 4, 5]:

LEMME 4. *Si $P^{(\alpha)} = \emptyset$ pour un ordinal dénombrable α, alors il existe une suite (C_n) de boréliens à coupes fermées telle que $A \subset \bigcup_{n \in \mathbf{N}} C_n$ et $C_n \cap B$ soit à coupes $\mathcal{F}_\sigma$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.*

LEMME 5. *Si pour tout $x \in X$, il existe $C_x \in \mathcal{F}_\sigma(Y)$ tel que $A(x) \subset C_x$ et $C_x \cap B(x) \in \mathcal{F}_\sigma(y)$, alors il existe un ordinal dénombrable α tel que $P^{(\alpha)} = \emptyset$.*

DÉMONSTRATION. Fixons $x \in X$ et posons $M = \varphi^{-1}(\{x\} \times A(x))$ et $B' = B \backslash (\{x\} \times C_x)$ et pour tout $F \in \mathcal{F}(P)$ soit

$$\delta'(F) = \{t \in F\colon\ \forall V \text{ voisinage de } t,\ \overline{\varphi(V \cap F)} \cap B' \neq \emptyset\},$$

δ' est une dérivation analytique sur $\mathcal{F}(P)$. Désignons par j (resp. j') l'indice de δ (resp. δ'); $j'(M)$ est dénombrable puisque $A(x) \subset C_x$ et $C_x \cap B'(x) = \emptyset$.

De plus si $\overline{\varphi(V \cap M)} \cap B'$ était vide pour un certain ouvert V de P on aurait

$$\overline{\varphi(V \cap M)} \cap B = \overline{\varphi(V \cap M)} \cap (\{x\} \times C_x \cap B) \in \mathcal{F}_\sigma.$$

Donc $\delta(M) \subset \delta'(M)$ et par suite $j(M)$ est dénombrable.

La famille $\{\varphi^{-1}(\{x\} \times A(x)); x \in X\}$ est une partie analytique de $\mathcal{F}(P)$ qui est contenue dans $\{F\colon\ j(F) < \omega_1\}$; donc d'après le théorème de la borne [**2**, Théorème 11], il existe un ordinal dénombrable α tel que $j(\varphi^{-1}(\{x\} \times A(x))) \leq \alpha$ pour tout $x \in X$, ce qui montre que $P^{(\alpha)} = \emptyset$. □

THÉORÉME 6. *Soient X et Y deux espaces analytiques et A une partie borélienne de $X \times Y$ telle que pour tout $x \in X$ la coupe $A(x)$ est la différence de deux $\mathcal{F}_\sigma$ dans Y.*

Alors A est la différence de deux boréliens à coupes $\mathcal{F}_\sigma$.

DÉMONSTRATION. Plongeons X (resp. Y) dans un epsace polonais $\hat{X}$ (resp. $\hat{Y}$) et soit $\hat{A}$ un borélien de $\hat{X} \times \hat{Y}$ tel que $A = \hat{A} \cap (X \times Y)$; posons enfin $B = (\hat{X} \times \hat{Y}) \backslash \hat{A}$. Alors A et B vérifient les hypothèses du Lemme 5; et on peut trouver (Lemme 4) un borélien à coupes $\mathcal{F}_\sigma$ conenant A et tel que $C \cap B$ soit à coupes $\mathcal{F}_\sigma$. Il suffit de poser alors $A' = C \cap (X \times Y)$ et $A'' = C \cap B \cap (X \times Y)$ qui sont des boréliens à coupes $\mathcal{F}_\sigma$ de $X \times Y$ tels que $A = A' \backslash A''$. □

THÉORÈME 7. *Soient X un espace analytique, Y un polonais et B un borélien de $Y \times Y$ vérifiant:*

(i) *Pour tout $x \in X$, la coupe $B(x)$ est la réunion d'un K_σ et d'un $\mathcal{G}_\delta$ de Y.*

(ii) *Pour tout V de Y, l'ensemble $\{x \in X\colon B(x) \cap V \neq \emptyset\}$ est borélien dans X.*

Alors B admet une section borélienne.

DÉMONSTRATION. D'après le Théorème 6, il existe deux boréliens B' et B'' à coupes K_σ et $\mathcal{G}_\delta$ respectivement, tels que $B = B' \cup B''$. Par un résultat bien connu (Kunugui-Arsenin-Cegolkov) B' admet une section borélienne et l'ensemble $\{x \in X\colon\ B'(x) = \emptyset\}$ est borélien. On est ainsi ramené au cas où $B = B''$ et la conclusion résulte alors de [**5**]. □

REFERENCES

1. J. P. R. Christensen, *Topology and Borel structure,* North-Holland, Amsterdam, 1974.
2. C. Dellacherie, *Un cours sur les ensembles analytiques,* Analytic Sets (Proc. 1978 London Math. Soc. Conf.), Academic Press, New York, 1980, pp. 183–316.
3. G. Hillard, *Exemples de normes en théorie descriptive des ensembles* (Séminaire de Prob. XII, Université de Strasbourg), Lecture Notes in Math., vol. 649, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1976–77, pp. 524–563.
4. J. Saint-Raymond, *Boréliens à coupes K_σ,* Bull. Soc. Math. France **104** (1976), 389–406.
5. S. M. Srivastava, *Selection theorems for $\mathcal{G}_\delta$ valued multifunctions,* Trans. Amer. Math. Soc. **254** (1979), 283–293.

ÉQUIPE D'ANALYSE, UNIVERSITÉ PARIS VI, 4 PLACE JUSSIEU, 75230 PARIS, FRANCE