PROCEEDINGS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 96, Number 4, April 1986

SUR LA DÉRIVÉE DE FONCTIONS HARMONIQUES PAR RAPPORT À UN CHAMP VARIABLE

J. DETRAZ

ABSTRACT. In $\mathbf{R}^2$, the derivative of a harmonic function with respect to a variable field has planar mean property.

On établit dans $\mathbf{R}^2$ une propriété de moyenne planaire pour la dérivée d'une fonction harmonique par rapport à un champ variable.

I. Soit $L(z) = (\alpha(z), \beta(z))$ un champ de vecteurs lipschitzien unitaire sur un cercle $\Gamma = \{z, |z| = r\}$, tel que $(\alpha + i\beta)(z) = e^{i\tilde{q}(z)}$. Soit $\tilde{q}$ l'extension harmonique de q dans le disque $D = \{z, |z| < r\}$. On pose, pour $z \in D$, $\tilde{L}(z) = (\tilde{\alpha}(z), \tilde{\beta}(z))$, où $\tilde{\alpha}(z) = \operatorname{Re} e^{i\tilde{q}(z)}$, $\tilde{\beta}(z) = \operatorname{Im} e^{i\tilde{q}(z)}$.

PROPOSITION. *Pour $z \in D$, il existe C_z (ne dépendant que de la norme lipschitzienne de L sur Γ) telle que*

$$\left|\frac{\partial U}{\partial \tilde{L}}(z)\right| \leq C(z) \int_\Gamma \left|\frac{\partial U}{\partial L}\right|$$

pour toute fonction U harmonique au voisinage de $\overline{D}$.

Soit p la fonction conjuguée de q (telle que $p + iq$ ait une extension holomorphe $\tilde{p} + i\tilde{q}$ dans D, et $p(0) = 0$); alors [**2**], $||p||_\infty \leq A||q||_{\mathrm{Lip}(\Gamma)}$ où A est indépendant de q et $||q||_{\mathrm{Lip}(\Gamma)}$ est la norme lipschitzienne de la fonction q sur le cercle Γ.

Soit U une fonction harmonique dans un voisinage de $\overline{D}$. Posons $\partial U/\partial x = u$, $\partial U/\partial y = -v$. Alors

$$\operatorname{Re}(u + iv)e^{p+iq}(z) = \frac{\partial U}{\partial L}(z)e^{p(z)} \quad \text{pour } z \in \Gamma$$

et $u + iv$ donc $(u + iv)e^{\tilde{p}+i\tilde{q}}$ est holomorphe dans D. On a donc

$$\operatorname{Re}[(u + iv)(z)e^{\tilde{p}+i\tilde{q}(z)}] = \int_\Gamma \frac{\partial U}{\partial L}(e^{it}) \times e^{p(e^{it})} \times P_\rho(\theta - t)\, dt,$$

où $P_\rho(\theta - t)$ est le noyau de Poisson associé à $z = (\rho, \theta)$ et au cercle Γ. Donc

$$e^{\tilde{p}(z)}|\tilde{\alpha}(z)u(z) + \tilde{\beta}(z)v(z)| \leq C_z \int_\Gamma |\partial U/\partial L|$$

et la proposition est établie.

Received by the editors December 26, 1984.
1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 31B05.
Key words and phrases. Harmonic functions.

II. THÉORÈME. *Soit L un champ de vecteurs lipschitzien unitaire dans un voisinage de zéro; alors, pour R assez petit, il existe une constante C_R telle que*

$$\left|\frac{\partial U}{\partial L}(0)\right| \leq C_R \int_{D_R} \left|\frac{\partial U}{\partial L}\right| (x,y)\,dx\,dy$$

(*où D_R désigne le disque de centre* 0, *de rayon R*).

On peut supposer que $L(0) = (1,0)$. Pour $R < R_0$, la variation de l'argument $q_r(\theta)$ de $\alpha + i\beta$ sur le cercle Γ_r de rayon r est nulle, $q_r(\theta) \to 0$, $r \to 0$, et la norme lipschitzienne de $q_r(\theta)$ sur Γ_r est majorée par une constante indépendante de r. Appliquons la proposition (en considérant le cercle Γ_r et le point $z = 0$), l'extension $\tilde{L}_r$ de L dans le disque D_r est égale en zéro à $(a(r), b(r))$ où

$$a(r) = \operatorname{Re}\exp i \int_{\Gamma_r} q_r(\theta)\,d\theta = \cos \int_{\Gamma_r} q_r(\theta)\,d\theta,$$

$$b(r) = \sin \int_{\Gamma_r} q_r(\theta)\,d\theta.$$

On a $a(r) \to 1, r \to 0$, et $b(r) \to 0, r \to 0$, et $(\partial U/\partial L)(0) = (\partial U/\partial x)(0)$ pour toute fonction harmonique U. Il suffit de montrer que si $(\partial U/\partial x)(0) = 1$, $\int_{D_r} |\partial U/\partial L|$ est minoré par une constante $C > 0$. Or, d'après la proposition,

$$\left|a(r)\frac{\partial U}{\partial x}(0) + b(r)\frac{\partial U}{\partial y}(0)\right| \leq C \int \left|\frac{\partial U}{\partial L}\right|.$$

En intégrant par rapport à $r < R < R_0$ et en posant $(\partial U/\partial y)(0) = k$,

$$\iint_{D_r} \left|\frac{\partial U}{\partial L}\right| \geq \int |a(r) + kb(r)| r\,dr.$$

Mais $a(r)$ (qui tend vers 1 en zéro) ne peut être proportionnel à $b(r)$ (qui tend vers zéro) donc la distance dans $L^1[0,R]$ de la fonction $a(r)$ à l'espace vectoriel reel engendré par la fonction $b(r)$ est strictement positive.

D'où $\int_0^R |a(r) + kb(r)| r\,dr > C_R$.

III. Remarques. (a) Il n'existe pas de propriété de moyenne sur les cercles: il suffit de prendre un champ radial non constant $L = (a(r), b(r))$ avec $a(r) \to 1$, $r \to 0$, et $b(r) \neq 0 \to 0$, $r \to 0$, et pour tout r on prendra la fonction $U = x - a(r)y/b(r)$; alors $\partial U/\partial L = 0$ sur Γ_r, et $(\partial U/\partial L)(0) = 1$.

(b) La constante C_r dans le théorème ne peut être prise de la forme C/r^2 (avec C indépendant de r): on peut construire une fonction $\beta(r)$ et deux suites $R_n \to 0$ et $k_n \to \infty$ telle que

$$\frac{1}{R_n^2} \int_0^{R_n} |1 - k_n\beta(r)| r\,dr = \int_0^1 |1 - k_n\beta(tR_n)|\,dt$$

tende vers zéro (on prend $\beta = \sum \chi_{[\alpha_n, 2\alpha_n]}\alpha_n$ avec α_n tendant très vite vers zéro et $k_n = 1/\alpha_n$, $R_n = \alpha_n$). Pour le champ radial $L(re^{i\theta}) = (\sqrt{1-\beta^2}(r), \beta(r))$ la constante C_r du théorème ne peut être de la forme C/r^2.

(c) Un problème analogue peut être posé dans $\mathbf{R}^n$. Si U est une fonction harmonique, on note $u_i = \partial U/\partial x_i$, $i \leq n$, et on a $\partial u_i/\partial x_j = \partial u_j/\partial x_i$ et $\sum_{i=1}^n \partial u_i/\partial x_i = 0$. Soient n fonctions harmoniques dans la boule unité.

(a) Contrairement au cas $n = 2$, les seules fonctions (a_i) telles que $\sum a_i u_i$ soit harmonique pour toute fonction harmonique U dans la boule unité sont les fonctions linéaires telles que

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + C,$$

où $A = \lambda I - B$ (B antisymétrique) et C est une matrice constante. (En effet, on doit avoir $\partial a_i/\partial x_j = -\partial a_j/\partial x_i$ et $\partial a_i/\partial x_i = \partial a_j/\partial x_j$.)

(b) On peut déterminer à quelles conditions on a, S étant la sphère unité,

$$(*) \qquad \int_S \sum a_i u_i = \sum \int_S a_i \int_S u_i$$

pour toute fonction U harmonique au voisinage de la boule unité fermée. Si u_0 désigne la dérivée normale $\partial U/\partial n$ on a [**3**] pour $x \in S$,

$$u_i(x) = T_i(u_0)(x) = x_i u_0(x) + \int_S K_i(x, y) u_0(y)\, dy,$$

où

$$K_i(x, y) = n(y_i - \langle y, x\rangle x_i) \int_0^1 \frac{1-\rho}{|y - \rho x|^{n+2}}\, d\rho.$$

La condition $(*)$ s'écrit alors $\int_S \sum_{i=1}^n L_i(a_i)(x) u_0(x)\, dx = 0$ pour toute fonction u_0 telle que $\int_S u_0 = 0$ où

$$L_i(a_i)(x) = \left[a_i(x) - \int a_i\right] x_i + \int_S K_i(y, x) \left(a_i(y) - \int a_i\right) dy,$$

si $\sum_1^n L_i a_i(x) \equiv 0$. $(*)$ est vérifiée.

(c) Le problème posé est l'existence d'une fonction g définie sur la sphère unité telle que $\sum_1^n L_i(a_i g)(x) \equiv 0$ sur S.

On sait que pour $n > 1$ il n'y a pas unicité du problème de Neumann oblique: pour avoir un problème bien posé, il faut se donner la valeur de U aux points où le champ L est tangent à la sphère [**1**].

La validité de la proposition dans $\mathbf{R}^n$ $(n > 1)$ signifierait que l'espace des gradients en un point de la boule unité de fonctions harmoniques U telles que $\partial U/\partial L$ soit nul sur S, forme un espace propre de $\mathbf{R}^n$.

REFERENCES

1. V. Kondrat′ev and Y. Egorov, *The oblique derivation problem*, Mat. Sb. **78** (1969), 139–169.
2. P. Duren, *Theory of H^p spaces*, Academic Press, New York, 1970.
3. F. Ricci and G. Weiss, *A characterization of* $H^1(\Sigma_{n-1})$, Amer. Math. Soc. Summer Institute, Williamstown, 1978.

UER DE MATHÉMATIQUES ET CNRS, LA 225, UNIVERSITÉ DE PROVENCE, 3, PLACE VICTOR HUGO, 13331 MARSEILLE CEDEX 3, FRANCE