PROCEEDINGS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 110, Number 1, September 1990

ALGÈBRES A-CONVEXES ET PROBLÈME DE MICHAEL

M. AKKAR, L. OUBBI, AND M. OUDADESS

(Communicated by Palle E. T. Jorgensen)

ABSTRACT. We give an example of a locally A-convex algebra which is neither m-convex nor uniformly A-convex. This example is used to answer some questions on A-convex algebras (see symbol 4). We especially show that Michael's problem (in m-convex algebras) is equivalent to the same problem in A-convex algebras. Finally some questions on bounded sets in A-convex algebras are studied.

1. INTRODUCTION

Jusqu'ici, les seuls exemples connus d'algèbres localement A-convexes, non m-convexes ni uniformément localement A-convexes, sont des produits finis d'algèbres localement m-convexes et d'algèbres uniformément localement A-convexes. Ces exemples ont été construits pour la première fois en 1985 [6], mais ils présentent l'inconvenient de conserver, étant des produits finis, beaucoup de bonnes propriétés des algèbres à partir desquelles ils ont été construits. Nous donnons ici un exemple d'algèbre localement A-convexe qui n'est d'aucun de ces deux types et qui, a priori, n'est pas un produit. Cet exemple nous permet de répondre à certaines questions sur les algèbres localement A-convexes.

Dans [9], M. Oudadess munit toute algèbre localement A-convexe (E, τ) d'une topologie localement m-convexe $M(\tau)$ plus fine que τ. Il montre que si τ est complete, il en est de même de $M(\tau)$ mais il ne dit rien sur la réciproque. Il ne dit rien non plus sur les bornés de τ et de $M(\tau)$. Notre exemple montre que la réciproque en question est fausse et que τ et $M(\tau)$ n'ont pas, en général, les mêmes bornés. Nous montrons, cependant, que sous différentes notions de complétudes τ et $M(\tau)$ ont les mêmes bornés d'un certain type. Ceci nous permet de montrer que le problème de savoir si tout caractère d'une algèbre localement m-convexe commutative et complète est borné [7], est équivalent au même problème dans les algèbres localement A-convexes. Il permet aussi de donner une réponse partielle à la question posée par Cochran dans[2, 3.6].

Received by the editors March 27, 1989; the contents of this paper have been presented at the meeting of the International Center of Pure and Applied Mathematics, August–September 1986, Nice, France.

1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 *Revision*). Primary 46H10; Secondary 46H99.

Key words and phrases. Locally A-convex algebras, locally multiplicatively convex algebras, bounded sets, Michael Problem.

2. Preliminaires

On désignera par E une algèbre associative sur le corps $K(=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ et par τ une topologie d'espace localement convexe (e.l.c) sur E.

On dira que (E, τ) est une algèbre localement convexe (a.l.c) si la multiplication de E est séparément continue.

Une a.l.c (E, τ) est dite une algèbre localement A-convexe (a.l. A-c) si τ peut être définie par une famille $(P_\lambda)_\lambda$ de seminormes A-convexes, i.e. telles que, pour tout x de E et tout λ, il existe $M(x, \lambda)$ et $N(x, \lambda)$ des réels positifs vérifiant:

$$P_\lambda(xy) \leq M(x, \lambda) P_\lambda(y), \quad \forall y \in E$$

et

$$P_\lambda(yx) \leq N(x, \lambda) P_\lambda(y), \quad \forall y \in E.$$

Si les constantes $M(x, \lambda)$ et $N(x, \lambda)$ peuvent étre prises égales à $P_\lambda(x)$ (resp. indépendantes de λ, i.e. $M(x, \lambda) = M(x)$ et $N(x, \lambda) = N(x)$) alors (E, τ) est dite une algèbre localement multiplicativement convexe (a.l.m.c) (resp. une algèbre uniformément localement A-convexe (a.u.l. A-c.)).

Un disque borné B d'un e.l.c séparé F est dit complétant si le sous-espace vectoriel F_B de F engendré par B muni de la jauge de B est un espace de Banach.

On dira qu'un e.l.c séparé (F, T) est bornologiquement complet (b-complet) si tout borné de F est contenu dans un disque borné complétant.

Une a.l.c séparée est dite pseudo-complète si tout disque borné fermé et idempotent est complétant.

Un borné d'une a.l.c est régulier s'il est absorbé par un disque borné idempotent.

3. Un exemple d'algèbre localement A-convexe

Soit $E = C(\mathbb{R})$ l'algèbre des fonctions complèxes continues sur $\mathbb{R}$. On définit sur E, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la semi-norme suivante: $P_n(f) = \int_{-n}^{n} |f(t)|\, dt$. Soit τ la topologie définie par les P_n, $n \in N^*$. Alors (E, τ) est clairement une a.l. A-c. Comme toute a.u.l. A-c est à éléments réguliers [8], (E, τ) n'est pas une a.u.l. A-c. En effet tout élément non borné de E est non régulier. Par ailleurs, en utilisant une technique analogue à celle utilisée dans [3], on montre que (E, τ) n'est pas une a.l.m.c. Ainsi (E, τ) donne t-il un exemple d'a.l. A-c qui n'est ni m-convexe ni u.l. A-c ni, a priori, construit à partir de telles algèbres.

4. Topologie d'a.l.m.c dans les a.l. A-c

Soit (E, τ) une a.l. A-c unitaire. On suppose que τ est définie par la famille $(P_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de semi-normes A-convexes. On définit sur E la semi-norme q_λ par: $q_\lambda(x) = \sup\{p_\lambda(xy),\ p_\lambda(y) \leq 1\}$. Alors la famille $(q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ définit sur E une topologie d'a.l.m.c $M(\tau)$ plus fine que τ [9]. Dans le cas non unitaire, on considère (E_1, τ_1) l'a.l. A-c obtenue par adjonction d'une unité à (E, τ), et l'on considère la topologie, notée encore $M(\tau)$, induite sur E par $M(\tau_1)$.

Dans ce cas $M(\tau)$ n'est pas nécessairement définie par les q_λ. Pour voir ceci, il suffit de considerer une algèbre normée E admettant un élément non nul x tel que $x \cdot E = \{0\}$ [1]. Cependant $M(\tau)$ admet toujours une base locale en O formée de τ-tonneaux. Ceci résulte du fait que la trace d'un τ_1-tonneau de E_1 sur E est un τ-tonneau et que chaque $B_\lambda(\varepsilon) = \{x \in E : q_\lambda(x) \leq \varepsilon\}$ est un τ-tonneau.

Remarque 4.1. Dans le cas de l'exemple précédent, la topologie $M(\tau)$ n'est autre que la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $\mathbb{R}$. Pour voir ceci, on passe aux algèbres quotients $C[-n, n]$ de $C(\mathbb{R})$ par $P_n^{-1}(0)$, $n \geq 1$. On munit chaque $C[-n, n]$ de la A-norme quotient $\overline{P}_n$ et on considère $\overline{q}_n$, la norme de Cochran [4] associée à $\overline{P}_n$. On remarque alors que $q_n(f) = \overline{q}_n(\overline{f})$, $f \in C(\mathbb{R})$. Or $\overline{P}_n$ est exactement la norme L^1 sur $C[-n, n]$. Donc $\overline{q}_n$ est la norme infinie sur $[-n, n]$.

Il est donc clair que dans ce cas $M(\tau)$ est complète alors que τ ne l'est pas; car sinon τ étant métrisable, elle coinciderait avec $M(\tau)$ ce qui n'est pas vrai. Ainsi la réponse à la question de savoir si τ est complete dès que $M(\tau)$ l'est est négative.

Ce même exemple montre, qu'en général τ et $M(\tau)$ n'ont pas les mêmes bornés. Encore une fois, étant métrisables, τ et $M(\tau)$ coincideraient si elles avaient les mêmes bornés.

5. Ensembles bornés

Nour donnons dans ce qui suit différentes conditions sous lesquelles τ et $M(\tau)$ ont les mêmes bornés d'un certain type. Pour ce faire on a besoin du lemme classique suivant:

Lemme 5.1. *Dans un espace localement convexe séparé tout tonneau absorbe les disques bornés complétants.*

Nous obtenons alors le résultat principal de ce papier.

Thèorème 5.2. Soit (E, τ) une a.l. A-c séparée.

(1) *Si (E, τ) est pseudo-complete, alors τ et $M(\tau)$ ont les mêmes bornés réguliers.*

(2) *Si (E, τ) est b-complète, alors τ et $M(\tau)$ ont les mêmes bornés.*

Preuve. Il est clair que tout $M(\tau)$-borné est τ-borné. Il reste donc à montrer les implications inverses.

(1) Si B est un borné régulier de (E, τ), alors il est absorbé par un disque borné fermé et idempotent D. Or (E, τ) est pseudo-complete. Donc D est completant; et comme tout $M(\tau)$-voisinage V de O contient un τ-tonneau, D est absorbé par V. Donc B est aussi borné pour $M(\tau)$.

(2) On raisonne de même en remarquant que tout disque fermé borné d'un espace localement convexe séparé b-complet est complétant.

Corollaire 5.3. *Si* (E, τ) *est une a.l. A-c complète, alors* τ *et* $M(\tau)$ *ont les mêmes bornés.*

On en arrive maintenant au problème de Michael.

Corollaire 5.4. *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(1) *Tout caractère d'une a.l. A-c commutative complète est borné.*
(2) *Tout caractère d'une a.l.m.c commutative complète est borné.*

La proposition suivante donne une autre condition sous laquelle τ et $M(\tau)$ ont les mêmes bornés.

Proposition 5.5. *Soit* (E, τ) *une a.l. A-c séparée ayant pour dual* E'. *Si la topologie de Machey* $\tau(E, E')$ *est tonnelée, alors* $(E, M(\tau))$ *admet aussi* E' *pour dual. En particulier* τ *et* $M(\tau)$ *ont les mêmes bornés.*

Cette proposition permet de donner une réponse partielle à la question (3.6) de [2]. Avec les notations de [2] on a

Proposition 5.6. *Si* $\tau(E, E')$ *est tonnelée, alors* $\Sigma(E, E')$ *et* $x(E, E')$ *coincident.*

Preuve. Il suffit de montrer que $x(E, E')$ est plus fine que $\Sigma(E, E')$. L'autre sens est toujours vrai. On considère la topologie $M(\Sigma(E, E'))$. Par la proposition précédente celle-ci est compatible avec la dualité (E, E'). Donc elle est moins fine que $x(E, E')$. Par suite $x(E, E') = \Sigma(E, E')$.

Remarque 5.7. La complétude de τ ne suffit pas pour que τ et $M(\tau)$ soient compatibles avec la même dualité. Il suffit de considerer l'algèbre $(c_b(R), \beta)$ des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ munie de la topologie stricte. C'est une a.u.l. A-c de Mackey [5]. Donc $M(\beta)$ n'est pas compatible avec la même dualité que β.

La pseudo-complètude ne suffit pas dans le Théorème 5.2 pour avoir les mêmes bornés. Il suffit de considérer l'algèbre $(C[0, 1], \|\cdot\|_1)$. C'est une algèbre A-normée pseudo-complète. Cependant les normes $\|\cdot\|_1$ et $\| \|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Pour terminer remarquons que les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) τ et $M(\tau)$ ont les mêmes bornés.
(ii) $\forall B$ borné de (E, τ), $\forall \lambda \in \Lambda$, $\exists M(B, \lambda) > 0$ tel que

$$P_\lambda(xy) \leq M(B, \lambda) \cdot P_\lambda(y); \quad x \in B, \ y \in E.$$

Références

1. O. H. Cheikh and M. Oudadess, *On a commutativity question in Banach algebras*, Arab. Gulf. J. Res. Math. Phys. Sci. A **6** (1988), 173–179.
2. A. C. Cochran, *Topological algebras and Mackey topologies*, Proc. Amer. Math. Soc. **30** (1973), 473–479.
3. ——, *Representation of A-convex algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **41** (1973), 473–479.

4. A. C. Cochran, R. Keown, and C. R. Williams, *On a class of topological algebras*, Pacific J. Math. **34** (1970), 17–25.

5. J. B. Conway, *The strict topology and compactness in the space of measures*, Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 75–78.

6. H. Kemmoun, *Contribution aux algèbres localement A-convexes*, Thèse de 3ème Cycle, Ècole Normale Supérieure Takaddoum, Rabat, Maroc, 1986.

7. A. Michael, *Locally multiplicatively convex topological algebras*, Mem. Amer. Math. Soc., no. 11, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1952.

8. M. Oudadess, *Théorèmes de structure et propriétés fondamentales des algèbres localement uniformément A-convexes*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **296** (1983), 851–853.

9. ——, *Fundamental properties of locally A-convex algebras*, Pub. Math., École Normale Supérieure Takaddoum, No. 1, Rabat, Maroc., 1985–86, pp. 7.1–7.6.

École Normale Supérieure, Takaddoum, B. P: 5118-Rabat-Maroc