PROCEEDINGS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 112, Number 4, August 1991

FONCTIONS QUI OPERENT SUR LES ESPACES DE BESOV

GÉRARD BOURDAUD ET DALILA KATEB

(Communicated by Palle E. T. Jorgensen)

RÉSUMÉ. On caractérise les fonctions qui opèrent, par composition à gauche, sur l'espace de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et sur l'espace de Triebel-Lizorkin $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, pour $0 < s < 1$ et $s \neq n/p$. Ce sont les fonctions, s'annulant en zéro, lipschitziennes (pour $s < n/p$) ou localement lipschitziennes (pour $s > n/p$).

INTRODUCTION

Depuis plusieurs années de nombreux mathématiciens ont cherché à caractériser les fonctions qui opèrent par composition à gauche sur les espaces fonctionnels classiques. S. Igari [4] montre en 1965 que les fonctions agissant sur l'algèbre de Beurling $\widehat{A}^2$, sont les fonctions localement lipschitziennes. M. Marcus et V. Mizel [6] caractérisent en 1979 celles qui agissent sur l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ par une condition de Lipschitz locale ou globale. B. Dahlberg [3] puis G. Bourdaud [1] montrent que les seules fonctions qui opérent sur les espaces de Sobolev $H^s_p(\mathbb{R}^n)$, ou de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, avec $1+1/p < s < n/p$, sont les fonctions linéaires. En 1986 S. Janson [5] s'intéresse à l'espace de Hardy-Sobolev $F^1_{1,2}(\mathbb{R}^n)$ et prouve une condition de Lipschitz. Dans ce travail, nous caractérisons les fonctions qui opèrent sur les espaces de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ avec $0 < s < 1$, par des conditions de Lipschitz globales ou locales. Plus précisément, dans la première partie, nous nous interessons au cas $0 < s < \min(1, n/p)$ et nous montrons qu'une fonction agit sur l'espace considéré si et seulement si elle est lipschitzienne. Ce résultat reprend celui de [2] et en simplifie la démonstration, notre nouvelle preuve étant directement inspirée par celle de Janson [5]. Dans la seconde partie, nous étudions le cas $n/p \leq s < 1$ et nous obtenons comme dans [4] une condition de Lipschitz locale. Enfin dans la troisième partie, nous établissons des résultats analogues pour les espaces de Triebel-Lizorkin $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

0. NOTATIONS, DÉFINITIONS ET RAPPELS

Les fonctions que nous considèrerons dans ce travail sont à valeurs complexes; cependant tous les résultats obtenus restent valables pour les fonctions à valeurs réelles.

Received by the editors February 20, 1990 and, in revised form, June 6, 1990.
1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 *Revision*). Primary 46E35.

©1991 American Mathematical Society
0002-9939/91 \$1.00 + \$.25 per page

Définition 1. Si F est une fonction de la variable complexe, à valeurs complexes, et si E est un espace fonctionnel, nous dirons que F opère sur E si pour toute fonction f de E, $F \circ f$ appartient à E.

Définition 2. Pour $0 < s < 1$, $1 \leq p$, $q \leq +\infty$, on définit l'espace de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ comme l'ensemble des distributions tempérées f qui vérifient

$$\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_p + \left[\int_{\mathbb{R}^n} |h|^{-sq} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx\right)^{q/p} \frac{dh}{|h|^n}\right]^{1/q} < \infty.$$

Pour $0 < s < 1$, p et q dans $[1, +\infty[$, on définit l'espace de Triebel-Lizorkin [8], comme l'ensemble des distributions tempérées f vérifiant

$$\|f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_p + \left\|\left(\int_0^{+\infty} r^{-sq} \left(\int_B |f(x+rh) - f(x)| dh\right)^q \frac{dr}{r}\right)^{1/q}\right\|_p < \infty;$$

B désignant la boule unité de $\mathbb{R}^n$.

Pour $0 < s < 1$ et $1 \leq p$, $q \leq +\infty$, on a [7] les équivalences de la norme Besov avec N_1 et N_2 où

$$N_1(f) = \|f\|_p + \left[\int_V |h|^{-sq} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p dx\right)^{q/p} \frac{dh}{|h|^n}\right]^{1/q}$$

V désignant n'importe quel voisinage borné de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, et

$$N_2(f) = \|f\|_p + N_3(f)$$

où

$$N_3(f) = \sum_{j=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}} |h|^{-sq} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+he_j) - f(x)|^p \, dx\right)^{q/p} \frac{dh}{|h|}\right)^{1/q},$$

$(e_1, \dots, e_n)$ désignant la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Pour $\lambda \geq 1$, on a l'estimation suivante [7]:

$$\|f(\lambda(\cdot))\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq \lambda^{s-n/p} \|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

Désignons par Q le cube unité $[-1/2, 1/2]^n$, par Q^+ le cube $[0, 1/2]^n$ et donnons nous une fois pour toutes, une fonction ϕ qui est à la fois un élément et un multiplicateur de $B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ et telle que $\phi(x) = 1$ sur $1/3Q$ et $\phi(x) = 0$ hors de $2/3Q$. Pour $u \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, nous noterons $\phi_{u,r}$ la fonction définie par $\phi_{u,r}(x) = \phi((x-u)/r)$.

C désignera une constante positive pouvant dépendre de n, s, p, q et de la fonction ϕ; sa valeur pourra changer d'une occurrence à l'autre.

1. Le cas $0 < s < \min(1, n/p)$, $1 \leq p < +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$

Lemme 1. *Pour tout entier $N \geq 1$, la fonction $f(x) = \sum_{|k_j| \leq N} \phi(x-k)$ appartient à $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et on a $\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq CN^{n/p}$ (la somme étant étendue à l'ensemble des k de $\mathbb{Z}^n$ tels que $|k_j| \leq N$ pour tout $j = 1, \dots, n$).*

Preuve. Nous utiliserons l'équivalence de la norme Besov avec N_1 en prenant $V = \{h \in \mathbb{R}^n ; |h_j| \leq 1/6 ; j = 1, \dots, n\}$. Les fonctions $\phi(\cdot - k)$ ayant des supports disjoints, on a $\|f\|_p^p = \sum_{|k_j| \leq N} \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x-k)|^p \, dx = (2N+1)^n \|\phi\|_p^p$. Pour h dans V, la fonction $\phi(\cdot + h - k) - \phi(\cdot - k)$ est portée par $Q + k$; de sorte que les différentes fonctions $\phi(\cdot + h - k) - \phi(\cdot - k)$ ont leurs supports disjoints; cela nous donne

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx &= \sum_{|k_j| \leq N} \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x+h-k) - \phi(x-k)|^p \, dx \\ &= (2N+1)^n \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x+h) - \phi(x)|^p \, dx\end{aligned}$$

et ceci termine la preuve du Lemme 1.

Théorème 1. *Soient* $1 \leq p < +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$ *et* $0 < s < \min(1, n/p)$. *Alors pour toute fonction* F *de* $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}$, *les assertions suivantes sont équivalentes*:

(i) F *opère sur* $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$,
(ii) $F \circ f \in B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ *pour tout* $f \in B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)$,
(iii) F *est globalement lipschitzienne et* $F(0) = 0$.

Preuve. On a trivialement: (i) implique (ii) et (iii) implique (i). Nous allons donc montrer que (ii) implique (iii).

Si F vérifie (ii), il existe un $\delta > 0$ et un $M > 0$ tels que, pour toute f, portée par Q, vérifiant $\|f\|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \leq \delta$, on ait $\|F \circ f\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq M$ (il suffit d'utiliser la Proposition 2 de [2], en l'adaptant, de facon évidente, au cas où F opère d'un espace fonctionnel dans un autre).

Soient a et b deux nombres complexes. On pose

$$f(x) = (b-a) \sum_{|k_j| \leq N} \phi(x/r - k) + a\phi(r/R).$$

Les nombres $r, R \in]0, 1]$ et l'entier N seront fixés ultérieurement.

Posons $\alpha = n/p - s$. Nous souhaitons obtenir $\|f\|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \leq \delta$. La norme de $a\phi(\cdot/R)$ est majorée par $C|a|R^\alpha \|\phi\|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)}$. On choisit donc le nombre $R \in]0, 1]$ tel que $C|a|R^\alpha \|\phi\|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \leq \delta/2$.

D'après le Lemme 1, on a $\|\sum_{|k_j| \leq N} \phi(\cdot/r - k)\|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \leq Cr^\alpha N^{n/p}$. On réalisera la deuxième condition:

$$Cr^\alpha N^{n/p} |b-a| = \delta/2 \tag{1}$$

(le choix ultérieur de N garantira $r \leq 1$). Nous souhaitons que toutes les fonctions $\phi(\cdot/r - k)$ aient leurs supports dans le "grand" cube $R/3Q$. La réunion des cubes $r(Q + k)$ est le cube défini par $|x_j| \leq r(1/2 + N)$, $j = 1, \dots, n$. Pour que ce cube soit contenu dans $R/3Q$, il suffit qu'on ait $r(1/2 + N) \leq R/6$, soit plus simplement:

$$9rN \leq R. \tag{2}$$

(La condition (2) entrainera $r \leq 1/9!$.) Pour réaliser (2), on observe que (1) entraine $rN = (\delta/2C)^{1/\alpha}|b-a|^{-1/\alpha}N^{1-n/(p\alpha)}$, et que la condition $s > 0$ entraine $1 - n/(p\alpha) < 0$; le choix d'un grand entier N permet donc d'obtenir un rN aussi petit que l'on veut. On va maintenant minorer la norme $\|F \circ f\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)}$. Pour cela, faisons $h = (1/3, 0, \dots, 0)$. Alors, pour $x \in 1/3Q^+$, on a $x + h \in Q\backslash 2/3Q$. Autrement dit, pour tout x dans $r(1/3Q^+ + k)$ on a $f(x+rh) = a$ et $f(x) = b$. Cela donne

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |F(f(x+rh)) - F(f(x))|^p\,dx &\geq \sum_{|k_j|\leq N} \int_{r(1/3Q^+ + k)} |F(b) - F(a)|^p\,dx \\ &= (2N+1)^n|F(b) - F(a)|^p 6^{-n} r^n \\ &\geq C(rN)^n|F(b) - F(a)|^p.\end{aligned}$$

Ainsi: $M \geq \|F \circ f\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \geq |rh|^{-s}(\int_{\mathbb{R}^n} |F(f(x+rh)) - F(f(x))|^p\,dx)^{1/p} \geq Cr^\alpha N^{n/p}|F(b) - F(a)| = C'(\delta|F(b) - F(a)|)/(2|b-a|)$.

Finalement $|F(b) - F(a)| \leq (2M)/(C'\delta)|b-a|$.

2. Le cas $n/p \leq s < 1$; $p \in [1, +\infty[$; $q \in [1, +\infty]$.

2.1. Le cas $n/p < s < 1$.

Lemme 2. *Soient $p \in [1, +\infty[$; $q \in [1, +\infty]$, $n/p \leq s < 1$ et soient α et β deux réels positifs tels que $0 < \alpha < \beta$. Si une fonction g de $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est à support dans le cube $[-\beta, \beta]^n$ et vaut 1 sur $[-\alpha, \alpha]^n$, alors*

$$\|g\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \geq C\alpha^{n/p+1/q}\beta^{-s-1/q}.$$

Preuve. En utilisant la norme N_2, on a, pour $1 \leq q < \infty$

$$\begin{aligned}\|g\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} &\geq \left(\int_{\beta-\alpha}^{\beta} h^{-sq-1}(h + \alpha - \beta)^{q/p}(2\alpha)^{(n-1)q/p}dh\right)^{1/q} \\ &\geq C\beta^{-s-1/q}\alpha^{n/p+1/q},\end{aligned}$$

où $C = 2^{(n-1)/p}(1+q/p)^{-1/q}$.

Si $q = +\infty$ on a

$$\|g\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \geq \beta^{-s}\left(\int_{-\alpha-\beta}^{-\beta} dx_1 \int_{-\alpha<x_j<\alpha} dx_2 \cdots dx_n\right)^{1/p} = C\beta^{-s}\alpha^{n/p},$$

où $C = 2^{(n-1)/p}$.

A tout complexe a et à toute application F de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, nous associerons l'opérateur F_a défini par $F_a(f) = \phi(F(f(\cdot) + a) - F(a))$; si F opère sur $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, alors F_a envoie $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ dans lui même.

Théorème 2. *Soient $p \in [1, +\infty[$, $q \in [1, +\infty]$ et $n/p < s < 1$. Pour toute fonction $F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *F opère sur $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$,*

(ii) $F \circ f \in B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ *si* $f \in B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)$,
(iii) F *est localement lipschitzienne et* $F(0) = 0$.

Comme pour le Théorème 1 nous ne montrerons que l'implication de (iii) par (ii). Avant de faire la preuve du Théorème 2, donnons trois lemmes techniques.

Lemma 3. *Sous la condition* (ii), *pour tout complexe* a, *on peut trouver un ouvert* Ω, *inclus dans* $1/3Q$, *et deux nombres positifs* ε *et* M *tels qu'on ait* $\|F_a(f)\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq M$ *dès que* $f \in B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ *est à support dans* Ω *et* $\|f\|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon$.

Preuve. Supposons que le Lemme 3 soit mis en défaut. Donnons nous une suite d'ouverts deux à deux disjoints $(\Omega_j)_{j\geq 1}$ contenus dans $1/3Q$, une suite d'ouverts $(V_j)_{j\geq 1}$ tels que $\overline{V}_j \subset \Omega_j$ et une suite de fonctions $(\psi_j)_{j\geq 1}$ de classe C^∞ où, pour tout $j \geq 1$, ψ_j est portée par Ω_j, égale à 1 sur V_j. Il existe alors un complexe a, tel que pour tout entier $j \geq 1$, on puisse trouver une fonction f_j dans $B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)$, portée par V_j, telle que $\|f_j\|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \leq 2^{-j}$ et $\|F_a(f_j)\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} > jM(\psi_j)$, où $M(\psi_j)$ désigne la norme de ψ_j comme multiplicateur de $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Alors $f = \sum_{j\geq 1} f_j \in B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ et, par hypothèse $F_a(f) \in B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$. D'autre part on a l'identité $\psi_j F_a(f) = F_a(f_j)$, d'où

$$\|F_a(f_j)\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq M(\psi_j)\|F_a(f)\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)}$$

et donc $\|F_a(f)\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \geq j$, ce qui est contradictoire.

Lemme 4. *Sous la condition* (ii), *pour tout complexe* a, *il existe un voisinage* V_a *de* a *et un nombre positif* B, *tels que* $|F(a) - F(b)| \leq B$ *pour tout* b *dans* V_a.

Preuve. Soit $a \in \mathbb{C}$; choisissons un vecteur u de $\mathbb{R}^n$ et un réel positif r tels que la fonction $\phi_{u,r}$ soit portée par l'ouvert Ω défini au Lemme 3.

On pose alors $V_a = \{b \in \mathbb{C}/|b-a| \leq \varepsilon r^{-\alpha}\|\phi\|^{-1}_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)}\}$ où ε provient du Lemme 3. On a d'une part $\|(b-a)\phi_{u,r}\|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \leq |b-a|r^\alpha\|\phi\|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon$; d'où, pour tout $b \in V_a$

$$\|F_a((b-a)\phi_{u,r})\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq M.$$

D'autre part $F_a((b-a)\phi_{u,r})$ est portée par le cube $(2/3)rQ + u$ et vaut $F(b) - F(a)$ sur le cube $(r/3)Q + u$, on a donc $\|F_a((b-a)\phi_{u,r}\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \geq C|F(b) - F(a)|r^\alpha$ et finalement

$$|F(b) - F(a)| \leq \frac{Mr^{-\alpha}}{C} = B.$$

Lemme 5. *Sous la condition* (ii), *pour tout complexe* a, *on peut trouver un ouvert* U *contenu dans* $1/3Q$ *et deux nombres positifs* δ *et* N *tels qu'on ait*

$\|F_{a+b}(f)\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq N$ *pour toute fonction* $f \in B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)$, *portée par* U, *dont la norme est majorée par* δ, *et pour tout* b *dans le disque* $|z-a| \leq \delta$.

Preuve. Supposons qu'on puisse trouver un complexe a pour lequel la propriété ne soit pas vérifiée. Donnons-nous une suite d'ouverts $(\Omega_j)_{j\geq 1}$ deux à deux disjoints contenus dans $1/3Q$, et une suite $(V_j)_{j\geq 1}$ d'ouverts tels que $\overline{V}_j \subset \Omega_j$. Pour tout $j \geq 1$, on se donne une fonction ψ_j de $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$, portée par Ω_j, égale à 1 sur V_j et une fonction η_j dans $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ égale à 1 sur Ω_j et telle que les supports des η_j soient deux à deux disjoints. Pour tout $j \geq 1$ on peut alors trouver une fonction f_j de $B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ portée par V_j, telle que $\|f_j\|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \leq 2^{-j}$ et un réel b_j suffisament petit $(|b_j| \leq (2^j\|\eta_j\|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)})^{-1}$ et tel que $a + b_j \in V_a)$ tels que $\|F_{a+b_j}(f_j)\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} > j\omega_j$, où $\omega_j = \|\psi_j\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} + M(\psi_j)$.

Posons $f = \sum_{j\geq 1} f_j + \sum_{j\geq 1} b_j\eta_j$. On a l'identité

$$\psi_j F_a(f) = F_a(f_j + b_j)\psi_j$$

qu'on peut encore écrire

$$\psi_j F_a(f) = F_{a+b_j}(f_j) + (F(a+b_j) - F(a))\psi_j,$$

ce qui entraine

$$\|F_{a+b_j}(f_j)\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq \omega_j[\|F_a(f)\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} + |F(a+b_j) - F(a)|]$$

or $|F(a+b_j) - F(a)|$ est borné, il y a donc contradiction.

Preuve du Théorème 2. Soit $a \in \mathbb{C}$. Choisissons $u \in \mathbb{R}^n$, $r_0 > 0$ tels que, pour $r \leq r_0$, l'application $\phi_{u,r}$ ait son support dans l'ouvert U défini au Lemme 5. Soient b et b' deux complexes de module inférieur à $(\delta r_0^{-\alpha})/(2\|\phi\|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)})$, δ provenant du Lemme 5, et $\alpha = n/p - s < 0$. (On notera que le fait que r_0 soit petit entraine $|b| \leq \delta$). En choisissant $r = (\|\phi\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\delta^{-1}|b-b'|)^{-1/\alpha}$ on a $\|(b-b')\phi_{u,r}\|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \leq |b'-b|r^\alpha\|\phi\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \delta$, et donc

$$\|F_{a+b}((b-b')\phi_{u,r}\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq N.$$

D'autre part $F_{a+b}((b-b')\phi_{u,r})$ est portée par le cube $(2/3)rQ + u$ et vaut $F(a+b') - F(a+b)$ dans le cube $(r/3)Q + u$; d'après le Lemme 2 on a donc

$$\|F_{a+b}((b-b')\phi_{u,r})\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \geq Cr^\alpha|F(a+b') - F(a+b)|$$

et finalement

$$|F(a+b') - F(a+b)| \leq \frac{N}{C}r^{-\alpha} = \frac{N}{C\delta}\|\phi\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}|b-b'|.$$

2.2. **Le cas critique** $s = n/p$. Nous allons voir que le Théorème 2 s'étend au cas $s = n/p$. Le résultat a toutefois un moindre intérêt; en effet, si on excepte le cas $q = 1$, $B^{n/p}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ n'est pas une algèbre, de sorte que la fonction $t \to t^2$ n'y opère pas. Cela montre que, pour $q > 1$, même des fonctions C^∞ n'opèrent pas sur $B^{n/p}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 3. *Soient* $1 \leq n < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. *Alors toute fonction* F, *de* $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}$, *qui opère sur* $B^{n/p}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *est localement lipschitzienne. La réciproque est vraie pour* $q = 1$.

Jusqu'à la fin de ce paragraphe, on désignera par $\|f\|$ la norme de f dans $B^{n/p}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et on supposera $n < p$.

Lemme 6. *Soit* $0 < \varepsilon \leq 1/2$, $0 < r \leq 1$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *et* $f \in B^{n/p}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *une fonction telle que* $f(x) = 1$ *sur* $x_0 + rQ$ *et* $f(x) = 0$ *hors de* $x_0 + r(1+\varepsilon)Q$. *On a alors, pour* $n > 1$,

$$\|f\| \geq C\varepsilon^{(1-n)/p}$$

et, pour $n = 1$

$$\|f\| \geq C(\log 1/\varepsilon)^{1/q},$$

la constante C *ne dépendant que de* n, p *et* q. *Il existe en outre une famille* $(T_\varepsilon)_{0<\varepsilon\leq 1/2}$ *de fonctions telles que,* $T_\varepsilon(x) = 1$ *pour* $x \in Q$, $T_\varepsilon(x) = 0$ *hors de* $(1+\varepsilon)Q$ *et, quand* $\varepsilon \to 0$, $\|T_\varepsilon\| \approx \varepsilon^{(1-n)/p}$ *(respectivement* $\|T_\varepsilon\| \approx (\log 1/\varepsilon)^{1/q}$*).*

Preuve. Traitons d'abord le cas $x_0 = 0$, $r = 1$. Soit $\varepsilon < t < 1$ et A l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ vérifiant

$$1 + \varepsilon - t \leq x_1 \leq 1, \qquad |x_j| \leq 1 \ (j = 2, \ldots, n).$$

On a alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x + te_1) - f(x)|^p \, dx \geq \int_A |f(x + te_1) - f(x)|^p \, dx \geq C(t - \varepsilon);$$

on en déduit

$$N_3(f) \geq C\left(\int_\varepsilon^1 [(t-\varepsilon)^{1/p} t^{-n/p}]^q \, dt/t\right)^{1/q}.$$

Dans le cas $n > 1$ on obtient

$$N_3(f) \geq C\left(\int_\varepsilon^{2\varepsilon} (t-\varepsilon)^{q/p} t^{-nq/p-1} \, dt\right)^{1/q} \geq C'\varepsilon^{(1-n)/p}.$$

Pour $n = 1$, on écrit

$$N_3(f) \geq C\left(\int_{2\varepsilon}^1 \left(\frac{t-\varepsilon}{t}\right)^{q/p} dt/t\right)^{1/q} \geq C'(\log 1/\varepsilon)^{1/q}.$$

Passons au cas général. Sous les hypothèses du lemme, la fonction f s'écrit

$$f(x) = g\left(\frac{x - x_0}{r}\right)$$

où $g(x) = 1$, pour $x \in Q$, et $g(x) = 0$ pour $x \notin (1+\varepsilon)Q$. On a donc

$$\|f\| = r^{n/p}\|g\|_p + N_3(g);$$

la minoration de $\|f\|$ en découle aussitôt.

On peut prendre comme fonctions T_ε les "fonctions trapèzes" définies comme suit.

En dimension 1, T_ε est la fonction continue, affine par morceaux, telle que $T_\varepsilon(1) = T_\varepsilon(-1) = 1$ et $T_\varepsilon(1+\varepsilon) = T_\varepsilon(-1-\varepsilon) = 0$.

En dimension quelconque n, $T_\varepsilon^{(n)}$ est la fonction produit tensoriel des précédentes:

$$T_\varepsilon^{(n)}(x) = T_\varepsilon(x_1) \cdots T_\varepsilon(x_n).$$

Le détail des estimations de $\|T_\varepsilon\|$ est laissé au lecteur.

Preuve de Théorème 3. Nous supposerons dans un premier temps, $n > 1$ ou $q < \infty$.

Posons pour $n > 1$

$$\gamma(\varepsilon) = \varepsilon^{(1-n)/p}$$

et pour $n = 1$

$$\gamma(\varepsilon) = (\log 1/\varepsilon)^{1/q}.$$

Supposons que la fonction F opère sur $B_{p,q}^{n/p}(\mathbb{R}^n)$. Le Lemme 5 reste vrai, mutatis mutandis. Etant donné a dans $\mathbb{C}$, il est donc possible de trouver un ouvert $U \subset Q$ et des nombres positifs δ et M tels que, pour tout fonction f portée par U, les conditions $\|f\| \le \delta$ et $|b-a| \le \delta$ entrainent

$$\|F_b(f)\| \le M.$$

Nous allons mettre en évidence un nombre $\eta \in]0, \delta[$ tel que F soit lipschitzienne sur le disque $|z-a| \le \eta$.

Soit b et b' deux éléments de ce disque; on définit f par

$$f(x) = (b'-b)T_\varepsilon\left(\frac{x-x_0}{r}\right),$$

où l'on choisit x_0 dans $1/3Q$ et $r \le 1$ pour que f soit portée par l'ouvert U. On a, d'après le Lemme 6,

$$\|f\| \le C_1|b-b'|\gamma(\varepsilon).$$

ε est alors choisi de sorte que $\gamma(\varepsilon)|b'-b| = \delta$ (ce qui est possible dès que η est assez petit).

La fonction $F_b(f)$ vérifie alors $\|F_b(f)\| \le M$; elle est constante, égale à $F(b') - F(b)$, sur le cube $x_0 + rQ$, et s'annule hors de $x_0 + r(1+\varepsilon)Q$; le Lemme 6 nous donne alors

$$\begin{aligned}\gamma(\varepsilon) &\le C|F(b') - F(b)|^{-1}\|F_b(f)\| \\ &\le CM|F(b') - F(b)|^{-1}.\end{aligned}$$

Finalement

$$|F(b') - F(b)| \le \frac{CMC_1}{\delta}|b'-b|.$$

La démonstration ci-dessus ne s'étend pas au cas $n = 1$, $q = +\infty$; elle repose en effet sur le fait que la fonction $\gamma(\varepsilon)$ tend vers l'infini quand ε tend vers 0.

Placons nous maintenant dans l'espace de Besov $B_{p,\infty}^{1/p}(\mathbb{R})$. Soit N un entier positif et $I_k = [-1 + (k-1)/N, -1 + k/N]$, $k = 1, \ldots, 2N$.

Lemme 7. *Soient* $x_0 \in \mathbb{R}$, $0 < r \leq 1$ *et* $\chi \in B^{1/p}_{p,\infty}(\mathbb{R})$ *une fonction qui vaut* 1 *sur* $x_0 + rI_k$, *si* k *est pair et* 0 *sur* $x_0 + rI_k$, *si* k *est impair. On a alors*

$$\|\chi\| \geq N^{1/p}.$$

En outre il existe une fonction χ_N *tells que* $\chi_N(x) = 1$ *sur* I_{2m}, 0 *sur* I_{2m+1} *et*

$$\|\chi_N\| \leq C(p)N^{1/p}.$$

Preuve. Comme dans celle du Lemme 6, on se ramène à $x_0 = 0$, $r = 1$.

Pour $k \in \{1, \ldots, 2N-1\}$, $x \in I_k$ entraine $x + 1/N \in I_{k+1}$, soit encore $|\chi(x + 1/N) - \chi(x)| = 1$. D'où

$$\begin{aligned}\|\chi\| &\geq N^{1/p}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\chi\left(x + \frac{1}{N}\right) - \chi(x)\right|^p dx\right)^{1/p} \\ &\geq N^{1/p}\left(\sum_{1\leq k\leq 2N-1} \int_{I_k} \left|\chi\left(x + \frac{1}{N}\right) - \chi(x)\right|^p dx\right)^{1/p} \geq N^{1/p}.\end{aligned}$$

On prend comme fonction χ_N la fonction, qui vérifie les conditions ad hoc sur $[-1, 1]$, et qui est nulle en dehors.

En raisonnant comme dans le Lemme 1, on obtient aussitôt l'estimation annoncée pour $\|\chi_N\|$.

Reprenons la preuve du théorème avec, cette fois,

$$f(x) = (b' - b)\chi_N\left(\frac{x - x_0}{r}\right)$$

r sera choisi assez petit pour que $x_0 + rQ$ soit contenu dans U. L'inégalité

$$\|f\| \leq C_1|b' - b|N^{1/p}$$

nous conduit à choisir N tel que

$$C_1 N^{1/p}|b' - b| \approx \delta.$$

On obtient alors pour $x \in x_0 + rI_{2j}$

$$F_b(f)(x) = F(b') - F(b),$$

et pour $x \in x_0 + rI_{2j+1}$

$$F_b(f)(x) = 0.$$

Le Lemme 7 entraine alors

$$\begin{aligned}N^{1/p} &\leq C|F(b') - F(b)|^{-1}\|F_b(f)\| \\ &\leq CM|F(b') - F(b)|^{-1}. \quad \text{C.Q.F.D.}\end{aligned}$$

3. Le cas des espaces de Triebel-Lizorkin

Pour les espaces de Triebel-Lizorkin, nous avons l'analogue des Théorèmes 1 et 2.

Les inclusions [7]

$$B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n) \subset F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \subset B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$$

nous permettent d'énoncer le corollaire suivant:

Corollaire. *Soient* $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ *et* $F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

(1) *Pour* $0 < s < \min(1, n/p)$, F *opère sur* $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *si et seulement si elle est globalement lipschitzienne et* $F(0) = 0$.

(2) *Pour* $n/p < s < 1$, F *opère sur* $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, *si et seulement si elle est localement lipschitzienne et* $F(0) = 0$.

(3) *pour* $s = n/p$, *si* F *opère sur* $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, *elle est localement lipschitzienne.*

4. Conclusion

Pour $0 < s < 1$, seul le cas critique $s = n/p$, $q > 1$, n'est pas résolu de facon optimale: on obtient une condition nécessaire qui n'est pas suffisante. Il en est de même pour l'espace $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ pour $q \geq 1$, en effet $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ n'est une algèbre que pour $s > n/p$ (voir [7, p. 146, Remarque 2]).

Il est raisonnable de conjecturer que toute fonction qui opère sur les espaces précités est en fait globalement lipschitzienne.

Les observations du referee nous ont permis d'améliorer ce texte sur plusieurs points. Qu'il trouve ici l'expression de notre gratitude.

Bibliographie

1. G. Bourdaud, Thèse d'état, Orsay, 1983.
2. G. Bourdaud et D. Kateb, *Calcul fonctionnel dans certains espaces de Besov*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **40** (1990).
3. B. E. J. Dahlberg, *A note on Sobolev spaces*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 35, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1979, pp. 183–185.
4. S. Igari, *Sur les fonctions qui opèrent sur l'espace* $\hat{A}^2$, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **15** (1965), 525–536.
5. S. Janson, *On functions with derivates in* H^1, Uppsala Univ. Dept. Math. Report **16** (1987).
6. M. Marcus et V. J. Mizel, *Complete characterization of functions which act via superposition on Sobolev spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **251** (1979), 187–218.
7. H. Triebel, *Theory of function spaces*, Birkhäuser, Basel, 1983.
8. ——, *On the spaces* $F^s_{p,q}$ *of Hardy-Sobolev type*, Comm. Partial Differential Equations **5** (1980), 245–291.

C.N.R.S. Université Paris 7, U.A. 212 Théories géométriques, tour 45-55 5-ème étage, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05 France