PROCEEDINGS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 113, Number 2, October 1991

L'ESPACE DES FONCTIONS CONTINUES D'UN ESPACE MÉTRIQUE DÉNOMBRABLE

ROBERT CAUTY

(Communicated by James E. West)

ABSTRACT. We prove that, for any countable nondiscrete metric space X, the space of continuous real-valued functions on X, with the topology of pointwise convergence, and its subspace of bounded functions, are both homeomorphic to σ_ω, the countably infinite product of copies of l_f^2.

1. INTRODUCTION

Si X est un espace topologique, nous noterons $\mathscr{C}_p(X)$ l'espace des fonctions réelles continues sur X muni de la topologie de la convergence simple; nous noterons $\mathscr{C}_p^*(X)$ le sous-espace de $\mathscr{C}_p(X)$ formé des fonctions bornées. Soit l_f^2 le sous-ensemble de l'espace de Hilbert l^2 formé des suites n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls, et soit σ_ω le produit d'un infinité dénombrable de copies de l_f^2. Dans [4], J. van Mill prouve que, si X est un espace métrique dénombrable qui n'est pas localement compact, $\mathscr{C}_p^*(X)$ est homéomorphe à σ_ω, et il conjecture que ce résultat peut s'étendre aux espaces dénombrables non discrets; dans une note ajoutée à [4], il annonce que J. Baars, J. de Groot et J. van Mill ont prouvé que, si X est un espace métrique dénombrable non localement compact, $\mathscr{C}_p(X)$ est aussi homéomorphe à σ_ω. Le but de cet article est de prouver le théorème suivant.

1.1. **Théorème.** *Pour tout espace métrique dénombrable non discret X, $\mathscr{C}_p(X)$ et $\mathscr{C}_p^*(X)$ sont homéomorphes à σ_ω.*

Soit s l'ensemble des suites de réels muni de la topologie produit, soit s_0 le sous-ensemble de s formé des suites convergeant vers zéro, et soit s_f le sous-ensemble de s_0 formé des suites n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls. La partie la plus difficile de la démonstration du Théorème 1.1 est la vérification de la proposition suivante, qui est en fait un cas particulier du théorème.

1.2. **Proposition.** *s_0 est homéomorphe à σ_ω.*

Received by the editors June 15, 1989.
1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 *Revision*). Primary 54C35, 57N17.

Une fois cette proposition prouvée, il est facile d'en déduire que, pour tout espace métrique dénombrable non discret, σ_ω est un facteur de $\mathscr{C}_p(X)$ et de $\mathscr{C}_p^*(X)$. La démonstration s'achève alors par un argument classique. Pour vérifier la Proposition 1.2, nous utiliserons une caractérisation de σ_ω due à M. Bestvina et J. Mogilski, que nous rappellerons au §2.

Dans la suite, tous les espaces seront supposés métriques séparables et munis d'une distance, arbitraire mais fixée, toujours notée d. Si U est un ouvert de X, un recouvrement ouvert de U est une famille d'ouverts contenus dans U et recouvrant U. Nous noterons id_X, ou simplement id, l'identité de X. Une fonction f de X dans Y est un plongement si c'est un homéomorphisme de X sur $f(X)$. Si $\mathscr{U}$ est un recouvrement ouvert de Y et si f et g sont deux fonctions de X dans Y, nous dirons que f est $\mathscr{U}$-proche de g si, pour tout x dans X, il y a un élément de $\mathscr{U}$ contenant à la fois $f(x)$ et $g(x)$. Si $[a, b]$ est un sous-intervalle de $[-\infty, \infty]$, φ une fonction de $X \times [a, b]$ dans Y et t un élément de $[a, b]$, nous noterons φ_t la fonction de X dans Y définie par $\varphi_t(x) = \varphi(x, t)$. Nous noterons I l'intervalle $[0, 1]$.

Etant donné un produit $X = \prod_n X_n$ (resp. $X = \prod_{i,j} X_j^i$), nous noterons x_n (resp. x_j^i) la coordonnée d'un point x de X dans X_n (resp. X_j^i), et nous écrirons $x = (x_n)$ (resp. $x = (x_j^i)$); si $f\colon Y \to X$ est une fonction, nous noterons f_n (resp. f_j^i) la projection de f sur X_n (resp. X_j^i), et nous écrirons $f = (f_n)$ (resp. $f = (f_j^i)$). Nous regarderons s comme le produit $\prod_{n=1}^\infty R_n$, où $R_n = \mathbb{R}$ pour toute n, et, pour tout entier k, nous noterons σ_k (resp. τ_k) la projection de s sur $\prod_{n=1}^k R_n$ (resp. $\prod_{n=k+1}^\infty R_n$).

2. Caractérisation de σ_ω

Soit $\Sigma = \{(x_i) \in l^2 / \sum_{i=1}^\infty (ix_i)^2 < \infty\}$, et soit Σ^∞ le produit d'une infinité dénombrable de copies de Σ. Il est connu que σ_ω et Σ^∞ sont homéomorphes (voir [4, p. 180]). Nous aurons besoin d'une caractérisation de Σ^∞, due à M. Bestvina et J. Mogilski, pour l'énoncé de laquelle il nous faut rappeler quelques définitions.

Soit X un rétracte absolu de voisinage. Un sous-ensemble F de X est un Z-ensemble dans X s'il est fermé et si, pour tout recouvrement ouvert $\mathscr{U}$ de X, il existe une fonction continue f de X dans X, $\mathscr{U}$-proche de id_X, telle que $f(X) \subset X \backslash F$. F est un Z-ensemble au sens fort si, de plus, il est toujours possible de choisir la fonction f de façon que $\overline{f(X)} \cap F = \varnothing$. Une fonction $f\colon C \to X$ est appelée un Z-plongement si c'est un plongement et si $f(C)$ est un Z-ensemble dans X.

Nous noterons $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$ la classe de tous les espaces métriques séparables qui sont des $F_{\sigma\delta}$ absolus. Un rétracte absolu de voisinage X est dit $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$-universel si, pour tout espace C appartenant à $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$, toute fonction continue f de C dans X et tout recouvrement ouvert $\mathscr{U}$ de X, il existe un Z-plongement $g\colon C \to X$ qui est $\mathscr{U}$-proche de f. X est dit fortement $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$-universel si, pour tout espace

C appartenant à $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$, tout fermé D de C, toute fonction continue f de C dans X dont la restriction à D est un Z-plongement, et tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, il existe un Z-plongement $g: C \to X$ qui est $\mathcal{U}$-proche de f et vérifie $g|D = f|D$.

2.1. **Lemme.** *Un rétracte absolu X appartenant à $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ est homéomorphe à σ_ω si, et seulement si, il vérifie les deux conditions suivantes:*

(C1) *X est fortement $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$-universel,*
(C2) *$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, où chaque X_n est un Z-ensemble au sens fort dans X.*

Compte tenu de l'homéomorphie de σ_ω avec Σ^∞, ceci est un cas particulier du Théorème 6.5 de [1] (la discussion, pp. 310–311 de [1], montre que Σ^∞ est homéomorphe à l'espace noté Ω_2 dans [1]).

Les deux lemmes suivants permettent de simplifier la vérification des conditions (C1) et (C2).

2.2. **Lemme.** *Soit X un rétracte absolu de voisinage. Si tout ouvert de X est $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$-universel et si tout Z-ensemble dans X est un Z-ensemble au sens fort, alors X est fortement $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$-universel.*

C'est un cas particulier de la Proposition 2.2 de [1].

2.3. **Lemme.** *Soit X un rétracte absolu contenu dans un espace E homéomorphe à l^2. S'il existe une homotopie $h: E \times I \to E$ vérifiant $h_0 = \mathrm{id}$ et $h_t(E) \subset X$ pour $t > 0$, alors tout Z-ensemble dans X est un Z-ensemble au sens fort.*

C'est une conséquence de la Proposition 1.7 de [1].

2.4. **Lemme.** *Si X est un rétracte absolu appartenant à $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$, alors $X \times \sigma_\omega$ est homéomorphe à σ_ω.*

Pour la démonstration de ce lemme, voir [1, Corollaire 5.4], ou [4, Théorème 5.3].

3. Démonstration du théorème

Dans cette section, nous allons montrer que le Théorème 1.1 résulte de la Proposition 1.2. Soit $S_0 = \{0\} \cup \{1/n / n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$; c'est un compact dénombrable dont tout espace métrique non discret contient une copie.

3.1. **Lemme.** *$\mathcal{C}_p(S_0) (= \mathcal{C}_p^*(S_0))$ est homéomorphe à s_0.*

Démonstration. Une fonction continue sur S_0 est une suite $\{f(\frac{1}{n})\}_{n=1}^{\infty}$ convergeant vers $f(0)$. Nous obtenons donc un homéomophisme φ de $\mathcal{C}_p(S_0)$ sur s_0 en posant

$$\varphi(f) = \left(f(0), f(1) - f(0), \dots, f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0), \dots\right).$$

Démonstration du Théorème 1.1. Puisque X n'est pas discret, il contient un fermé S homéomorphe à S_0. Puisque X est dénombrable, il est de dimension zéro, donc il existe une rétraction r de X sur S (voir [3, pp. 265–268]). Soit A (resp. A^*) le sous-ensemble de $\mathscr{C}_p(X)$ (resp. $\mathscr{C}_p^*(X)$) formé des fonctions dont la restriction à S est identiquement nulle. Alors, $\mathscr{C}_p(X)$ (resp. $\mathscr{C}_p^*(X)$) est homéomorphe à $\mathscr{C}_p(S)\times A$ (resp. $\mathscr{C}_p(S)\times A^*$), un homéomorphisme particulier ψ étant donné par

$$\psi(f) = (f|S\,,\, f-(f|S)\circ r).$$

D'après le Lemme 3.1 et la Proposition 1.2, nous avons la suite d'homéomorphismes

$$\mathscr{C}_p(X) \cong \mathscr{C}_p(S)\times A \cong \mathscr{C}_p(S_0)\times A \cong s_0\times A \cong \sigma_\omega \times A \cong \sigma_\omega\,,$$

où le dernier homéomorphisme résulte du Lemme 2.4 puisque A, étant un facteur de $\mathscr{C}_p(X)$, est un rétracte absolu et appartient à $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$ ($\mathscr{C}_p(X)$ appartient à $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$ d'après [2, Proposition 8]).

Le même argument s'applique à $\mathscr{C}_p^*(X)$ puisque $\mathscr{C}_p^*(X)$ appartient aussi à $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$ [4, Lemme 6.5].

4. Démonstration de la Proposition 1.2

Puisque s_0 est un rétracte absolu et appartient à $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$ (d'après le Lemme 3.1 et [2, Proposition 8]), pour prouver la Proposition 1.2, il suffit, d'après le Lemme 2.1, de montrer que s_0 a les propriétés (C1) et (C2) du Lemme 2.1.

4.1. **Lemme.** *Tout Z-ensemble dans s_0 est un Z-ensemble au sens fort.*

Démonstration. D'après le Lemma 2.3, il suffit de montrer l'existence d'une homotopie $h\colon s\times I\to s$ vérifiant $h_0=\mathrm{id}$ et $h_t(s)\subset s_0$ pour $t>0$, ce qui est connu et facile.

La pseudo-isotopie du lemme suivant, qui est une variante d'une construction connue, jouera un rôle essentiel dans la suite. Soit $\theta\colon s\times s\to s$ la fonction définie par

$$\theta(x\,,y) = (x_1\,,y_1\,,x_2\,,y_2\,,\dots\,,x_n\,,y_n\,,\dots) \qquad x=(x_n)\,,\ y=(y_n).$$

4.2. **Lemme.** *Il existe une fonction continue $\Theta\colon s\times s\times[1\,,\infty]\to s$ vérifiant*

(i) $\Theta_1=\theta$,
(ii) *si* $t\ge n$ (n *entier* ≥ 1), $\sigma_n\circ\Theta_t(x\,,y)=\sigma_n(x)$,
(iii) *si* $t\le n$ ($n\ge 1$), $\tau_{2n}\circ\Theta_t(x\,,y)=\tau_{2n}\circ\theta(x\,,y)$,
(iv) $\Theta_\infty(x\,,y)=x$,
(v) Θ_t *est un homéomorphisme pour tout* $t<\infty$,
(vi) *la fonction* $(z\,,t)\to\Theta_t^{-1}(z)\colon s\times[1\,,\infty[\to s\times s$ *est continue.*

En outre, pour tout $t<\infty$, $\Theta_t^{-1}(s_0)=s_0\times s_0$, *et la fonction de* $s_0\times s_0\times[1\,,\infty]$ *dans* s_0 *induite par* Θ *vérifie les analogues des conditions* (i) *à* (vi).

Démonstration. Définissons $\rho:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times I\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ par

$$\rho(x\,,y\,,t) = \left(x\cos\frac{\pi}{2}t + y\sin\frac{\pi}{2}t\,,\ -x\sin\frac{\pi}{2}t + y\cos\frac{\pi}{2}t\right).$$

Chaque ρ_t est une rotation, $\rho_0(x, y) = (x, y)$ et $\rho_1(x, y) = (y, -x)$. Posons

$$\Theta_\infty(x, y) = x,$$

et, pour n entier ≥ 1,

$$\Theta_n(x, y) = (x_1, \dots, x_n, (-1)^{n-1}y_1, (-1)^{n-2}y_2, \dots, -y_{n-1}, y_n, x_{n+1}, y_{n+1}, \dots, x_{n+q}, y_{n+q}, \dots).$$

Pour chaque entier n fixé, nous définissons Θ_t sur chaque intervalle $[n + k/n, n + (k+1)/n]$, $0 \leq k < n$, par récurrence sur k. Regardant s comme le produit $(\prod_{i=1}^{2n-1-k} R_i) \times (R_{2n-k} \times R_{2n+1-k}) \times (\prod_{i=2n+2-k}^{\infty} R_i)$, posons, pour $n + k/n \leq t \leq n + (k+1)/n$, $0 \leq k < n$,

$$\Theta_t(x, y) = \left(\sigma_{2n-1-k} \circ \Theta\left(x, y, n + \frac{k}{n}\right),\ \rho\left[(-1)^k y_{n-k}, x_{n+1}, n\left(t - n - \frac{k}{n}\right)\right],\ \tau_{2n+1-k} \circ \Theta\left(x, y, n + \frac{k}{n}\right)\right).$$

On vérifie facilement que, pour $t = n + k/n$ $(n \geq 1,\ 0 \leq k \leq n)$, les deux définitions de Θ_t coïncident. La continuité de Θ et les conditions (i) à (vi) se vérifient aisément.

Que $\Theta_t^{-1}(s_0) = s_0 \times s_0$ pour $t < \infty$ résulte de (iii). Il est immédiat que la fonction de $s_0 \times s_0 \times [1, \infty]$ dans s_0 induite par Θ vérifie les conditions (i) à (vi) relativement à s_0 et à $\theta | s_0$.

4.3. *Remarque.* Soient $0 = (0, 0, \dots)$ et $e = (1, 0, 0, \dots)$. En utilisant le fait que chaque ρ_t est une rotation, on vérifie que, pour tout $t < \infty$, $\Theta_t(0, e)$ *a* au plus deux composantes non nulles, de valeurs absolues ≤ 1, et que l'une d'elles a une valeur absolue $\geq \sqrt{2}/2$.

Convention. Dans toute la suite, Θ désignera tantôt la fonction du Lemma 4.2, tantôt la fonction de $s_0 \times s_0 \times [1, \infty]$ dans s_0 qu'elle induit, selon que le but de Θ est s ou s_0. Les notations (i) à (vi) désigneront les propriétés de cette fonction énumérées dans l'énoncé du Lemme 4.2.

4.4. **Lemme.** *Soient X un espace métrique et F un sous-ensemble de X de type F_σ. Il existe une fonction continue $\psi = (\psi_n)$ de X dans s vérifiant*

(a) $|\psi_n(x)| \leq 1$ *quels que soient* x *et* n,
(b) *si* $x \in F$, $\psi(x) \in s_f$,
(c) *si* $x \notin F$, $\psi(x)$ *a une infinité de composantes de valeurs absolues* $\geq \sqrt{2}/2$.

Démonstration. Soit $F = \bigcup_{i=1}^\infty F_i$, où les F_i sont fermés dans X et vérifient $F_i \subset F_{i+1}$ pour tout i. Identifons s au produit $\prod_{i=1}^\infty s^i$, où $s^i = \prod_{j=1}^\infty R_j^i$, avec $R_j^i = \mathbb{R}$ quels que soient i et j. Supposons la distance d de X bornée par 1. Soit $\alpha_i \colon X \to [1, \infty]$ la fonction continue définie par $\alpha_i(x) = [d(x, F_i)]^{-1}$; alors $\alpha_i^{-1}(\infty) = F_i$.

Définissons $\psi^i = (\psi^i_j): X \to s^i$ par

$$\psi^i(x) = \Theta(0, e, \alpha_i(x)),$$

où e est comme dans la Remarque 4.3. Si $x \in F_i$, $\psi^i(x) = 0$ d'après (iv). Si $x \in X \backslash F_i$, $\psi^i(x)$ a au plus deux composantes non nulles, dont l'une a une valeur absolue $\geq \sqrt{2}/2$; de plus, $|\psi^i_j(x)| \leq 1$ pour tout j.

Soit $\psi = (\psi^i): X \to \prod_{i=1}^{\infty} s_i = s$ (donc $\psi = (\psi^i_j)$ où $\psi^i_j: X \to R^i_j$). La condition (a) est évidemment vérifiée. Si $x \in F$, il y a un i_0 tel que x appartienne à F_i pour $i > i_0$; alors $\psi(x)$ a au plus $2i_0$ composantes $\psi^i_j(x)$ nonnulles, d'où (b). Si $x \notin F$, chaque ψ^i a une composante de valeur absolue $\geq \sqrt{2}/2$, d'où (c).

4.5. **Lemme.** *Soient X un espace métrique et F un sous-ensemble de X de type $F_{\sigma\delta}$. Il existe une fonction continue $\varphi: X \to s$ telle que $\varphi^{-1}(s_0) = F$.*

Démonstration. Soit $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$ où chaque F_i est un F_σ. Soit, comme dans la démonstration du lemme précédent, $s = \prod_{i=1}^{\infty} s^i$ où $s^i = \prod_{j=1}^{\infty} R^i_j$. D'après le Lemme 4.4, il y a, pour tout $i \geq 1$, une fonction continue $\psi^i = (\psi^i_j): X \to s^i$ vérifiant

(a) $|\psi^i_j(x)| \leq 1$ quels que soient j et x,

(b) si $x \in F_i$, il n'y a qu'un nombre fini d'indices j tels que $\psi^i_j(x) \neq 0$,

(c) si $x \notin F_i$, il y a une infinité d'indices j tels que $|\psi^i_j(x)| \geq \sqrt{2}/2$.

Soit $\varphi = (\frac{1}{i}\psi^i): X \to \prod_{i=1}^{\infty} s^i = s$; soit $\varphi = (\varphi^i_j)$ où $\varphi^i_j: X \to R^i_j$. Si $x \notin F$, il y a un indice i tel que $x \notin F_i$; d'après (i), $\varphi(x)$ a une infinité de coordonnées $\varphi^i_j(x)$ de valeurs absolues $\geq \sqrt{2}/2i$, donc $\varphi(x) \notin s_0$. Si $x \in F$, alors, d'après (a), $|\varphi^i_j(x)| < 1/i_0$ quel que soit j si $i > i_0$; d'après (b), $\varphi(x)$ n'a donc qu'un nombre fini de coordonnées $\varphi^i_j(x)$ de valeurs absolues supérieures à $1/i_0$, ce qui montre que $\varphi(x)$ appartient à s_0, d'où le lemme.

4.6. **Lemme.** *Si C est un espace appartenant à $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$, il existe un plongement fermé η de C dans s_0.*

Démonstration. Nous pouvons supposer que C est un sous-ensemble du cube de Hilbert $Q = \prod_{n=1}^{\infty} \overline{R}_n$, où $\overline{R}_n = [-\infty, +\infty]$ pour tout n. Définissons une fonction continue $\chi: Q \to s_0$ par

$$\chi(x) = \left(\frac{1}{n} \operatorname{Arc\,tg} x_n\right) \left(\operatorname{Arc\,tg}(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}\right).$$

Il est clair que χ est un plongement. Puisque C appartient à $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$, c'est un $F_{\sigma\delta}$ dans Q, donc, d'après le Lemme 4.5, il existe une fonction continue $\varphi: Q \to s$ telle que $C = \varphi^{-1}(s_0)$. Définissons $\tilde{\eta}: Q \to s_0 \times s$ par $\tilde{\eta}(x) = (\chi(x), \varphi(x))$. D'après le choix de φ, $C = \tilde{\eta}^{-1}(s_0 \times s_0)$. Soit $\eta: C \to s_0 \times s_0$

la restriction de $\tilde{\eta}$. Nous allons montrer que η est un plongement fermé de C dans $s_0 \times s_0$; puisque $s_0 \times s_0$ est homéomorphe à s_0, le lemme en résultera.

Puisque χ est un plongement, $\tilde{\eta}$ et η sont aussi des plongements, donc il ne reste plus qu'à vérifier que $\eta(C)$ est fermé dans $s_0 \times s_0$. Soit $\{x^i\}_{i=1}^{\infty}$ une suite de points de C telle que la suite $\{\eta(x^i)\}$ converge vers un point (y, z) de $s_0 \times s_0$. Alors $\{\chi(x^i)\}$ tend vers y, donc, puisque χ est un plongement de Q dans s_0, la suite $\{x^i\}$ converge vers un point x de Q. Alors $\{\varphi(x^i)\}$ converge vers $\varphi(x) = z \in s_0$, donc x appartient à C. Par suite, $(y, z) = \eta(x)$ appartient à $\eta(C)$, donc $\eta(C)$ est fermé dans $s_0 \times s_0$.

4.7. **Lemme.** *s_0 est fortement $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$-universel.*

Démonstration. D'après les Lemmes 2.2 et 4.1, il suffit de montrer que tout ouvert de s_0 est $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$-universel. Nous avons besoin d'un résultat auxiliaire.

4.8. **Lemme.** *Soit $\mathscr{U}$ un recouvrement ouvert d'un ouvert U de s_0. Il existe une fonction continue $\alpha\colon U \to [1, \infty[$ vérifiant*

(∗) *Pour tout x dans U, $\Theta(\{x\} \times s_0 \times [\alpha(x), \infty])$ est contenu dans un élément de $\mathscr{U}$.*

Démonstration. Pour tout entier $n \geq 1$, soit V_n l'ensemble des points x de U pour lesquels il existe un voisinage P de x dans U tel que $\Theta(P \times s_0 \times [n, \infty])$ soit contenu dans un élément de $\mathscr{U}$. Par définition, V_n est ouvert dans U, et il résulte de (iv) et de la continuité de Θ que $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$; de plus, $V_n \subset V_{n+1}$ pour tout n. Nous pouvons donc trouver des ouverts $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ de façon que

(1) $W_n \subset V_n$ pour tout n,
(2) $\overline{W}_n \subset W_{n+1}$ pour tout n,
(3) $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n$.

Pour $n \geq 2$, soit α_n une fonction continue de $\overline{W}_n \backslash W_{n-1}$ dans $[n, n+1]$, égale à n sur $\overline{W}_{n-1} \backslash W_{n-1}$ et à $n+1$ sur $\overline{W}_n \backslash W_n$. Définissons $\alpha\colon U \to [1, \infty[$ par

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= 2 \quad \text{si}\, x \in \overline{W}_1, \\ \alpha(x) &= \alpha_n(x) \quad \text{si}\, x \in \overline{W}_n \backslash W_{n-1}, \ n \geq 2. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que α est bien définie et continue. Si $x \in W_n \backslash W_{n-1}$, alors $\alpha(x) \geq n$, donc la condition (∗) résulte de (1) et de la définition de V_n.

Suite de la démonstration du Lemme 4.7. Soient U un ouvert de s_0, C un espace appartenant à $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$, $f\colon C \to U$ une fonction continue, et $\mathscr{U}$ un recouvrement ouvert de U. Soit $\alpha\colon U \to [1, \infty]$ une fonction continue vérifiant la condition (∗) du Lemme 4.7. D'après le Lemme 4.6, il existe un plongement fermé η de C dans s_0. Définissons une fonction continue $\xi\colon C \to s_0$ par

$$\left| \begin{aligned} &\xi_{3n}(c) = \eta_n(c), \\ &\xi_{3n-1}(c) = \tfrac{1}{n}\alpha(f(c)) \qquad n \geq 1, \\ &\xi_{3n-2}(c) = 0. \end{aligned} \right.$$

Définissons enfin $g\colon C \to s_0$ par

$$g(c) = \Theta(f(c), \xi(c), \alpha(f(c))).$$

La condition $(*)$ garantit que g est $\mathscr{U}$-proche de f ; en particulier, g est à valeurs dans U. Il nous reste à vérifier que g est un Z-plongement de C dans U.

Soient c et c' deux points de C tels que $g(c) = g(c')$. D'après (iii), nous avons, pour tout n assez grand,

$$\xi_n(c) = g_{2n}(c) = g_{2n}(c') = \xi_n(c').$$

En particulier, pour n assez grand,

$$\frac{1}{n}\alpha(f(c)) = \xi_{3n-1}(c) = \xi_{3n-1}(c') = \frac{1}{n}\alpha(f(c')).$$

Nous avons donc $\alpha(f(c)) = \alpha(f(c'))$; puisque $\Theta(.,.,\alpha(f(c)))$ est un homéomorphisme, il en résulte que $\xi(c) = \xi(c')$, d'où $\eta_n(c) = \xi_{3n}(c) = \xi_{3n}(c') = \eta_n(c')$ pour tout n, donc $\eta(c) = \eta(c')$. Puisque η est un plongement, nous avons donc $c = c'$, donc g est injective.

Puisque g est injective, pour prouver que c'est un plongement fermé dans U, il suffit de montrer que si $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$ est une suite de points de C telle que la suite $\{g(c_i)\}$ converge vers un point x de U, alors $\{c_i\}$ a une sous-suite qui converge vers un point c_o de C. Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que $\{\alpha(f(c_i))\}$ tend vers $\alpha_o \in [1, \infty]$. Si $\alpha_0 = \infty$, il résulte de (ii) que la suite $\{f(c_i)\}$ a la même limite x que la suite $\{g(c_i)\}$. Mais alors, α étant continue, $\{\alpha(f(c_i))\}$ tend vers $\alpha_o = \alpha(x) < \infty$, d'où une contradiction, donc $\alpha_o < \infty$. Posant $\alpha_i = \alpha(f(c_i))$, nous avons, par définition de g,

$$(f(c_i), \xi(c_i)) = \Theta_{\alpha_i}^{-1}(g(c_i)),$$

et il résulte de (vi) que la suite $\{(f(c_i), \xi(c_i))\}$ converge vers $\Theta_{\alpha_o}^{-1}(x)$ dans $s_0 \times s_0$. En particulier, la suite $\{\xi(c_i)\}$ converge dans s_0, donc aussi la suite $\{\eta(c_i)\}$ d'après la définition de ξ. Puisque η est un plongement fermé, cela entraîne la convergence de la suite $\{c_i\}$ dans C et achève de prouver que g est un plongement fermé.

Montrons que $g(C)$ est un Z-ensemble dans U. Soit $\mathscr{G}$ un recouvrement ouvert de U. Le Lemme 4.8 nous donne une fonction continue $\beta\colon U \to [1, \infty[$ telle que, pour tout x dans U, $\Theta(\{x\} \times s_0 \times [\beta(x), \infty])$ soit contenu dans un élément de $\mathscr{G}$. Soit $a = (1/n) \in s_0$. La fonction $h\colon U \to s_0$ définie par

$$h(x) = \Theta(x, a, \beta(x))$$

est alors $\mathscr{G}$-proche de id_U, donc prend ses valeurs dans U. D'après (iii), si x est un point quelconque de U, nous avons, pour tout n assez grand,

$$h_{2n}(x) = a_n = 1/n \neq 0,$$

tandis que, si c est un point quelconque de C, nous avons, pour tout n assez grand,

$$g_{6n-4}(c) = \xi_{3n-2}(c) = 0.$$

Par suite, $g(c) \neq h(x)$, donc $h(U) \subset U \backslash g(C)$ et $g(C)$ est un Z-ensemble dans U, d'où le lemme.

Lemme 4.9. *s_0 est réunion dénombrable de Z-ensembles.*

Démonstration. Soit, pour m entier ≥ 1, $X_m = \{x \in s_0/|x_n| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq m\}$. Les X_m sont fermés dans s_0 et, évidemment, $s_0 = \bigcup_{m=1}^{\infty} X_m$. Nous allons montrer que X_m est un Z-ensemble dans s_0.

Soit $\mathscr{U}$ un recouvrement ouvert de s_0. Le Lemme 4.8 nous fournit une fonction continue $\alpha: s_0 \to [1, \infty[$ telle que, pour tout x, $\Theta(\{x\} \times s_0 \times [\alpha(x), \infty])$ soit contenu dans un élément de $\mathscr{U}$. Posons $\beta(x) = \max(m, \alpha(x))$ et, e étant comme dans la Remarque 4.3, définissons $g: s_0 \to s_0$ par

$$g(x) = \Theta(x, \Theta(0, e, 2\beta(x)), \beta(x)).$$

D'après le choix de β, g est $\mathscr{U}$-proche de id. Etant donné un élément quelconque x de s_0, soit N le plus grand entier $\leq \beta(x)$; alors $m \leq N$. Posons $\Theta(0, e, \beta(x)) = y$. D'après la Remarque 4.3, y a une coordonnée y_{n_0} de valeur absolue $\geq \sqrt{2}/2$; puisque $2\beta(x) \geq 2N$, $y_n = 0$ si $n \leq 2N$ d'après (ii), donc $n_0 > 2N$. Puisque $\beta(x) < N + 1$, (iii) entraîne

$$\tau_{2N+2} \circ \Theta(x, y, \beta(x)) = \tau_{2N+2} \circ \Theta(x, y),$$

d'où, puisque $n_0 > 2N \geq N + 1$,

$$g_{2n_0}(x) = \theta_{2n_0}(x, y) = y_{n_0},$$

donc $|g_{2n_0}(x)| \geq \sqrt{2}/2 > \frac{1}{2}$, donc $g(x) \notin X_m$ puisque $m \leq N < 2N < n_0$. Ceci montre que $g(s_0) \subset s_0 \backslash X_m$, donc que X_m est bien un Z-ensemble.

Compte tenu du Lemme 4.1, le Lemme 4.9 achève la démonstration de la Proposition 1.2.

References

1. M. Bestvina and J. Mogilski, *Characterizing certain incomplete infinite dimensional absolute retracts*, Michigan Math. J. **33** (1986), 291–313.
2. J. Dijkstra, T. Grilliot, D. Lutzer, and J. van Mill, *Function spaces of low Borel complexity*, Proc. Amer. Math. Soc. **94** (1985), 703–710.
3. C. Kuratowski, *Topologie*. II, 3e édition, PWN, Warszawa, 1961.
4. J. van Mill, *Topological equivalence of certain function spaces*, Compositio Math. **63** (1987), 159–188.

UNIVERSITÉ PARIS VI, UFR DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, 4 PLACE JUSSIEU 75252 PARIS CEDEX 05 FRANCE