PROCEEDINGS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 121, Number 3, July 1994

# MESURES DOMINÉES PAR UNE CAPACITÉ ALTERNÉE D'ORDRE 2

A. EL KAABOUCHI

(Communicated by Andrew Bruckner)

ABSTRACT. Let $C$ be an alternating capacity of order 2 on a metrizable compact space, and let $\mathscr{P}_C$ be the convex set of all measures dominated by $C$. We find a quite simple set of extreme elements of $\mathscr{P}_C$ such that the closed convex hull of this set is $\mathscr{P}_C$. We also give other properties, including a generalization of one of Anger's results.

## 1. INTRODUCTION

Soient $E$ un compact métrisable et $C$ une capacité alternée d'ordre 2 sur $E$. En 1972, Anger [A2] a montré que pour tout couple de compacts $(K, L)$ de $E$ avec $K \subseteq L$, il existe une measure positive $\mu$ majorée par $C$ telle qu'on ait $\mu(K) = C(K)$ et $\mu(L) = C(L)$. En 1981, Dellacherie, Feyel, et Mokobodzki [DFM] ont montré que ce résultat est encore vrai pour toute famille de compacts de $E$ totalement ordonnée pour l'inclusion. Notons par $\mathscr{P}_C$ l'ensemble des mesures positives majorées par $C$ et de masse $C(E)$; il résulte alors du résultat précédent que pour toute fonction s.c.s positive $f$ de $E$ dans $\mathbb{R}$, il existe $\mu$ élément de $\mathscr{P}_C$ telle que $\mu(f) = \widehat{C}(f)$ où $\widehat{C}(f) = \int_0^{+\infty} C(\{x \in E, f(x) \geq t\})\,dt$ est l'extension de Choquet de la capacité $C$ à la fonction $f$. Notre objectif est de caractériser les points extrémaux de $\mathscr{P}_C$. Dans le cas "$E$ fini" une telle caractérisation que nous redémontrerons plus loin est due à Shapley [SP]: si $E$ est un ensemble fini composé de $n$ points $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $C$ une capacité alternée d'ordre 2 sur $E$ et $\mu$ un élément de $\mathscr{P}_C$, alors $\mu$ est extrémale dans $\mathscr{P}_C$ si et seulement s'il existe $\sigma$ élément de $\mathscr{S}_n$ (ensemble des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$) tel que $\mu(\{x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(i)}\}) = C(\{x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(i)}\})$ pour tout $i$ élément de $\{1, \ldots, n\}$; autrement dit il existe une fonction injective $f$ de $E$ dans $[0, 1]$ telle que $\mu(f) = \widehat{C}(f)$. Notons par $\mathscr{Q}_C$ l'ensemble des mesures $\mu$ éléments de $\mathscr{P}_C$ pour lesquelles existe une fonction borélienne *injective* $f$ de $E$ dans $[0, 1]$ telle que $\mu(f) = \widehat{C}(f)$. On a montré dans [E] que tout élément de $\mathscr{Q}_C$ est extrémal dans $\mathscr{P}_C$ et que d'autre part $\mathscr{Q}_C$ est exactement l'ensemble des points extrémaux de $\mathscr{P}_C$ *si* $\mathscr{P}_C$ n'est constitué que de mesures atomiques ou encore *si* $C$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Ici nous allons montrer que $\mathscr{P}_C$ est l'enveloppe convexe fermée de $\mathscr{Q}_C$. On

Received by the editors February 6, 1991 and, in revised form, October 14, 1992.
1991 *Mathematics Subject Classification*. Primary 28E10; Secondary 52A99.
*Key words and phrases.* Capacités alternées d'ordre 2.

donne aussi d'autres propriétés parmi lesquelles une généralisation du résultat d'Anger.

## 2. Préliminaires

On se donne un espace compact métrisable $E$ ; on note $\mathscr{B}$ sa tribu borélienne, $\mathscr{K}$ l'ensemble de ses parties compactes, $\mathscr{U}$ l'ensemble de ses ouverts, et $\mathscr{M}$ l'ensemble des mesures positives bornées sur $(E, \mathscr{B})$ muni de la topologie vague. Soit $C$ une *capacité* (de Choquet), i.e., une application $C$ de $\mathscr{B}$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que $C(\varnothing) = 0$, *croissante, montante* (i.e., $B_n \uparrow B \Rightarrow C(B_n) \uparrow C(B)$), et *descendante sur les compacts* (i.e., $K_n \downarrow K \Rightarrow C(K_n) \downarrow C(K)$ pour $(K_n)_{n\in\omega} \subseteq \mathscr{K}$). Le théorème de capacitabilité de Choquet [C] affirme en particulier qu'on a $C(B) = \sup\{C(K), K \in \mathscr{K}, K \subseteq B\}$ pour tout $B \in \mathscr{B}$.

La capacité $C$ est dite *alternée d'ordre* 2 ou (*fortement sous-additive*) si, pour tout $A$, $B$, on a $C(A \cup B) + C(A \cap B) \leq C(A) + C(B)$. Pour toute capacité $C$ alternée d'ordre 2, on définit le convexe compact $\mathscr{P}_C$ des mesures positives majorées (ou dominées) par $C$ et de masse $C(E)$ par

$$\mathscr{P}_C = \{\mu \in \mathscr{M}, \forall B \in \mathscr{B}, \ \mu(B) \leq C(B) \text{ et } \mu(E) = C(E)\}.$$

Pour toute capacité $C$ alternée d'ordre 2 on a (voir [HS]), $C(B) = \operatorname{Max}\{\mu(B), \mu \in \mathscr{P}_C\}$ pour tout borélien $B$.

Suivant [C], on prolongera toute capacité $C$ à l'ensemble $\mathscr{B}_+$ des fonctions boréliennes positives, en posant pour toute $f$ élément de $\mathscr{B}_+$, $\widehat{C}(f) = \int_0^\infty C(\{f \geq t\})\,dt$, et d'après [D], si $C$ est une capacité alternée d'ordre 2 et $f$ un élément de $\mathscr{B}_+$ alors on a $\widehat{C}(f) = \sup\{\mu(f), \mu \in \mathscr{P}_C\}$.

**Lemme 1.** *Soit $\mu$ un élément de $\mathscr{P}_C$. Alors l'ensemble $\mathscr{D} = \{B \in \mathscr{B}, \mu(B) = C(B)\}$ est stable par intersection dénombrable et réunion dénombrable.*

*Démonstration.* D'abord $\mathscr{D}$ est stable par intersection finie et réunion finie; en effet, soient $B_1$, $B_2 \in \mathscr{D}$, on a

$$\begin{aligned}\mu(B_1) + \mu(B_2) &= \mu(B_1 \cup B_2) + \mu(B_1 \cap B_2) \leq C(B_1 \cup B_2) + C(B_1 \cap B_2)\\ &\leq C(B_1) + C(B_2) = \mu(B_1) + \mu(B_2).\end{aligned}$$

Donc $\mu(B_1 \cup B_2) + \mu(B_1 \cap B_2) = C(B_1 \cup B_2) + C(B_1 \cap B_2)$, donc

$$0 \geq \mu(B_1 \cup B_2) - C(B_1 \cup B_2) = C(B_1 \cap B_2) - \mu(B_1 \cap B_2) \geq 0.$$

Il résulte que $\mu(B_1 \cap B_2) = C(B_1 \cap B_2)$ et $\mu(B_1 \cup B_2) = C(B_1 \cup B_2)$.

Ensuite $\mathscr{D}$ est stable par intersection dénombrable décroissante; en effet, soit $(B_n)_{n\in\omega}$ une suite décroissante dans $\mathscr{D}$ alors

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\omega} B_n\right) \leq C\left(\bigcap_{n\in\omega} B_n\right) \leq \inf_{n\in\omega} C(B_n) = \inf_{n\in\omega} \mu(B_n) = \mu\left(\bigcap_{n\in\omega} B_n\right).$$

Enfin $\mathscr{D}$ est stable par réunion dénombrable croissante; en effet, soit $(B_n)_{n\in\omega}$ une suite croissante dans $\mathscr{D}$ alors

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\omega} B_n\right) \leq C\left(\bigcup_{n\in\omega} B_n\right) = \sup_{n\in\omega} C(B_n) = \sup_{n\in\omega} \mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{n\in\omega} B_n\right).$$

Ceci achève la démonstration du lemme.

Le résultat qui suit vient de [DFM] et jouera un rôle important dans la suite:

**Lemme 2.** *Pour tout* $A \in \mathscr{B}$, *la fonction* $C^A$ *de* $\mathscr{B}$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *définie par*

$$c^a(x) = c(A \cup X) - C(A)$$

*est une capacité alternée d'ordre* 2.

*Démonstration.* Soient $\varepsilon > 0$ et $(K_n)_{n\in\omega}$ une suite décroissante de compacts; il existe $N \in \omega$ tel que pour tout $n \geq N$, $C(K_n) - C\left(\bigcap_{n\in\omega} K_n\right) < \varepsilon$. D'autre part, pour tout $n \in \omega$ on a

$$\begin{aligned} C(K_n \cup A) &+ C\left(\bigcap_{n\in\omega} K_n\right) \\ &\leq C\left(K_n \cup \left(\bigcap_{n\in\omega} K_n \cup A\right)\right) + C\left(K_n \cap \left(\bigcap_{n\in\omega} K_n \cup A\right)\right) \\ &\leq C\left(\bigcap_{n\in\omega} K_n \cup A\right) + C(K_n). \end{aligned}$$

Donc $C^A(K_n) - C^A\left(\bigcap_{n\in\omega} K_n\right) \leq C(K_n) - C\left(\bigcap_{n\in\omega} K_n\right)$ et par suite pour tout $n \geq N$, $C^A(K_n) - C^A\left(\bigcap_{n\in\omega} K_n\right) < \varepsilon$. Donc $C$ est descendante sur les compacts. Le reste de l'énoncé est évident.

**Théorème 3.** *Soient* $E$ *un ensemble fini composé de* $n$ *points* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $\mathscr{S}_n$ *l'ensemble des permutations de* $1, 2, \ldots, n$, *et* $C$ *une capacité alternée d'ordre* 2 *sur* $E$. *On note pour tout* $\sigma \in \mathscr{S}_n$, $\mu_\sigma$ *l'unique mesure sur* $E$ *telle que* $\mu_\sigma(\{x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(i)}\}) = C(\{x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(i)}\})$ *pour* $i = 1, \ldots, n$. *On a alors* $\mathscr{E}\mathrm{xt}(\mathscr{P}_C) = \{\mu_\sigma,\ \sigma \in \mathscr{S}_n\}$.

Voici les grandes lignes de la démonstration. On montre que

(a) Si $A$ et $B$ sont deux parties de $E$ avec $A \subseteq B$, alors $\mathscr{P}_{C|_A} + \mathscr{P}_{C^A|_{B\setminus A}} \subseteq \mathscr{P}_{C|_B}$;

(b) Si $\mu$ est extrémale dans $\mathscr{P}_C$ alors, d'une part pour tout $x$, $y$ éléments de $E$ avec $x \neq y$, il existe $X$ partie de $E$ telle que $(X \cap \{x, y\} = \{x\}$ ou $\{y\})$ et $\mu(X) = C(X)$; et d'autre part pour toute partie $A$ de $E$ avec $\mu(A) = C(A)$, $\mu_{|A}$ est extrémale dans $\mathscr{P}_{C_{|A}}$ et $\mu_{|A^c}$ est extrémale dans $\mathscr{P}_{C^A_{|A^c}}$.

## 3. Extension d'un résultat d'Anger

Soit $C$ une capacité alternée d'ordre 2 sur $E$. Anger a montré que pour tout couple de compacts $(K, L)$ de $E$ avec $K \subseteq L$, il existe $\mu$ élément de $\mathscr{P}_C$ telle que $\mu(K) = C(K)$ et $\mu(L) = C(L)$. Nous allons montrer que pour toute famille de boréliens *bien ordonnée* pour l'inclusion, il existe $\mu$ élément de $\mathscr{P}_C$ telle que $\mu$ et $C$ coïncident sur chaque élément de cette famille, et que ceci n'est pas toujours vrai si on remplace "bien ordonnée" par "totalement ordonnée".

**Lemme 4.** *Pour* $A \subseteq B$ *boréliens de* $E$, *il existe* $\mu$ *élément de* $\mathscr{P}_C$ *telle que* $\mu(A) = C(A)$ *et* $\mu(B) = C(B)$.

*Démonstration.* D'après [HS], il existe $\gamma \in \mathscr{P}_C$, $\nu \in \mathscr{P}_{C^A}$, et $\lambda \in \mathscr{P}_{C^B}$ tels que $\gamma(A) = C(A)$, $\nu(B) = C^A(B)$, et $\lambda(E) = C^B(E)$. Alors $\mu = \gamma_{|A} + \nu_{|(B\setminus A)} + \lambda_{|(E\setminus B)}$ convient. En effet, remarquons tout d'abord que $\nu$ et $\lambda$ sont portées respectivement par $A^c$ et $B^c$. Ainsi pour tout $X$ élément de $\mathscr{B}$ on a

$$\begin{aligned}\mu(X) &= \gamma(X \cap A) + \nu(X \cap B) + \lambda(X) \\ &\leq C(X \cap A) + C^A(X \cap B) + C^B(X) \\ &= C(X \cap A) + C((X \cap B) \cup A) - C(A) + C(X \cup B) - C(B),\end{aligned}$$

et par l'inégalité de forte sous-additivité de $C$ on obtient

$$\mu(X) \leq C(X \cap A) + C(X \cap B) - C(X \cap A \cap B) + C(X \cup B) - C(B) \leq C(X).$$

**Théorème 5.** *Soit $(B_i)_{i\in I}$ une famille de boréliens bien ordonnée pour l'inclusion. Il existe $\mu \in \mathscr{P}_C$ telle qu'on ait $\mu(B_i) = C(B_i)$ pour tout $i \in I$.*

*Démonstration.* Soit $(B_{i_\alpha})_{\alpha<\xi}$ où $\xi < \omega_1$ une famille croissante de boréliens extraite de la famille $(B_i)_{i\in I}$ telle que $\{C(B_{i_\alpha}),\ \alpha < \xi\} = \{C(B_i)\ \ i \in I\}$ ; par une récurrence transfinie immédiate à partir du lemme précédent, on peut trouver une famille transfinie $(\mu_\alpha)_{\alpha<\xi}$ de mesures deux à deux étrangères vérifiant: chaque $\mu_\alpha$ est portée par $B_{i_\alpha} \setminus (\bigcup_{\eta<\alpha} B_{i_\eta})$ et, si on pose $\mu = \sum_{\alpha<\xi} \mu_\alpha$, on a $\mu \in \mathscr{P}_C$ et $\mu(B_{i_\alpha}) = C(B_{i_\alpha})$ pour tout $\alpha < \xi$.

## 4. Lien avec les capacités contrôlées continûment par une mesure bornée

**Définition 6.** (a) On dit qu'une capacité $C$ est *contrôlée* par une mesure $\nu$ si on a

$$\forall B \in \mathscr{B}, \quad (\nu(B) = 0 \Rightarrow C(B) = 0).$$

(b) On dit qu'une capacité $C$ est *contrôlée continûment* par une mesure $\nu$ si on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall B \in \mathscr{B}, \quad (\nu(B) < \delta \Rightarrow C(B) < \varepsilon).$$

D'après [DFM] on $a$, si $C$ est une capacité alternée d'ordre 2 sur $E$ alors d'une part, $C$ est contrôlée par une mesure bornée si et seulement si $C$ est mince (i.e., toute famille de boréliens disjoints non-$C$-négligeables est au plus dénombrable); et d'autre part, $C$ est contrôlée continûment par une mesure bornée si et seulement si $C$ est séquentiellement continue (i.e., $(1_{B_n} \to 1_B) \Rightarrow (C(B_n) \to C(B))$ pour toute suite $(B_n)_{n\in\omega} \subseteq \mathscr{B}$).

**Proposition 7.** *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *Pour toute famille de boréliens $(A_i)_{i\in I}$ totalement ordonnée pour l'inclusion, il existe $\mu \in \mathscr{P}_C$ telle que $\mu(A_i) = C(A_i)$ pour tout $i \in I$.*
(ii) *Pour toute fonction $f \in \mathscr{B}_+$, il existe $\mu \in \mathscr{P}_C$ telle que $\mu(f) = \widehat{C}(f)$.*
(iii) *Pour toute fonction injective $f \in \mathscr{B}_+$, il existe $\mu \in \mathscr{P}_C$ telle que $\mu(f) = \widehat{C}(f)$.*
(iv) *$C$ est contrôlée continûment par une mesure bornée.*

La démonstration de cette proposition repose sur le lemme suivant.

**Lemme 8.** *Soit $E$ un compact métrisable $\mu \in \mathscr{P}_C$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *Il existe une famille de boréliens $(A_n)_{n\in\omega}$ totalement ordonnée pour l'inclusion séparant les points de $E$ telle que $\mu(A_n) = C(A_n)$ pour tout $n \in \omega$.*

(ii) *Il existe une fonction injective borélienne* $f$ *de* $E$ *dans* $[0, 1]$ *telle que* $\mu(f) = \widehat{C}(f)$.

*Démonstration.* (i) $\Rightarrow$ (ii) Soit $(X_r)_{r\in J}$ une énumération par des rationnels de $[0, 1]$ de la famille $(A_n)_{n\in\omega}$ et telle que:

- $\forall r, s \in J, (s \leq r) \leftrightarrow (X_r \subseteq X_s)$;
- $\forall r \in J, \exists \varepsilon > 0, ]r - \varepsilon, r + \varepsilon[ \cap J = \{r\}$.

Pour se faire, on va reprendre la construction du Cantor qui consiste à enlever dans la nième opération les $2^{n-1}$ intervalles ouverts tiers médiants des intervalles fermés restants de $[0, 1]$ lors de la $(n-1)$ ième opéation.

1ère opération notons par $I$ l'intervalle enlevé et soit $x =$ centre de $I$ ; 2ième opération, notons par $I_0$, $I_1$ les intervalles enlevés et soient $x_0$, $x_1$ leurs centres respectifs avec $x_0 < x_1$ ; ... ; $n$ ième opération notons par $(I_s)_{s\in 2^{n-1}}$ la famille des intervalles enlevés et soit $(x_s)_{s\in 2^{n-1}}$ la famille de leurs centres avec pour tout $n \geq 2$, et pour tout $s$, $s' \in 2^{n-1}$, $(s <_{\text{lex}} s') \Rightarrow (x_s < x_{s'})$ ; etc.

Soit $\varphi$ l'application de $\omega$ dans $\mathbb{Q}$ définie par: $\varphi(0) = x$ ; $\varphi(1) = x_1$ si $A_1 \subset A_0$ ou $\varphi(1) = x_0$ si $A_0 \subset A_1$ ; ... ; $\varphi(n) =$ un point $x_s$ tel que $|s| = n$, et pour tout $p < n$, $(x_s < \varphi(p)) \leftrightarrow (A_p \subset A_n)$ ; etc.

Posons $J = \varphi(\omega)$. Pour $r \in J$, soit $s \in 2^{<\omega}$ tel que $r = x_s$ et soit $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}|I_s|$ il est clair que $J \cap ]r - \varepsilon, r + \varepsilon[ = \{r\}$.

Cela étant, posons ensuite pour tout $t \in [0, 1]$, $Y_t = \bigcup_{s\in J,\ s>t} X_s$ et considérons l'application $f$ de $E$ dans $[0, 1]$ définie par: $f(x) = \inf\{r \in [0, 1], x \neq Y_r\}$. On a

(a) Pour tout couple $(t, x) \in [0, 1] \times E$, $(f(x) > t) \leftrightarrow (x \in Y_t)$ ; en effet, soit $x \in Y_t$ il existe alors $s \in J$ tel que $s > t$ et $x \in X_s$ soit ensuite $z \in [0, 1]$ tel que $s > z > t$ alors $x \in Y_z$ donc $f(x) \geq z$ d'où $f(x) > t$. L'autre sens est trivial.

Donc $f$ est borélienne, et comme pour tout $n \in \omega$, $\mu(A_n) = C(A_n)$, il découle alors du lemme 1 que pour tout $t \in [0, 1[$, $\mu(Y_t) = C(Y_t)$ et par suite $\mu(f) = \widehat{C}(f)$.

(b) $f$ est injective; en effet, soient $x$, $y \in E$ avec $x \neq y$, comme la famille $(X_r)_{r\in J}$ sépare les points de $E$, il existe $r \in J$ tel que $x \in X_r$ et $y \notin X_r$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $]r - \varepsilon, r + \varepsilon[ \cap J = \{r\}$. On a: $Y_{r-\varepsilon/2} = X_r = Y_{r-\varepsilon/4}$, donc $f(y) \leq r - \frac{\varepsilon}{2}$ et $f(x) > r - \frac{\varepsilon}{4}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Soit $f$ une fonction injective borélienne de $E$ dans $[0, 1]$ telle que $\mu(f) = \widehat{C}(f)$, il s'en suit que l'ensemble $T = \{t \in [0, 1], \mu(\{x \in E, f(x) \geq t\}) = C(\{x \in E, f(x) \geq t\})\}$ est de mesure 1 pour la mesure de Lebesgue, donc $T$ est dense dans $[0, 1]$. En fait on a $T = [0, 1]$; en effet, $0 \in T$, soient $t \in ]0, 1]$ et $(t_n)_{n\in\omega}$ une suite d'éléments de $T$, croissant et convergente vers $t$. Alors $\{x \in E, f(x) \geq t\} = \bigcap_{n\in\omega}\{x \in E, f(x) \geq t_n\}$, donc $t \in T$ d'après le lemme 1. D'autre part comme $f$ est injective, la famille $(\{x \in E, f(x) \geq r\})_{r\in\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ sépare les points de $E$. Ceci achève la démonstration du lemme.

*Démonstration de la proposition* 7. (i) $\Rightarrow$ (ii): soit $f$ une fonction borélienne positive de $E$ dans $\mathbb{R}$ comme $(\{x \in E, f(x) \geq t\})_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une famille de boréliens totalement ordonnée pour l'inclusion, il existe $\mu \in \mathscr{P}_C$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ on ait $\mu(\{x \in E, f(x) \geq t\}) = C(\{x \in E, f(x) \geq t\})$ ; et par suite $\mu(f) = \widehat{C}(f)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Évidente.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) D'abord $C$ est descendante sur les boréliens. En effet, soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathscr{B}$ ; posons $A_0 = E$ et désignons pour tout $n \in \omega$, par $(X_n^i)_{i\in\omega}$ une famille de boréliens totalement ordonnée pour l'inclusion, contenant $\varnothing$, $A_n \backslash A_{n+1}$ et séparant les points de $A_n \backslash A_{n+1}$. Considérons alors la famille de boréliens $(A_{n+1} \cup X_n^i)_{i,n\in\omega}$. D'après le lemme précédent, il existe une fonction injective borélienne $f$ de $E$ dans $[0, 1]$ vérifiant pour tout $n \in \omega$, il existe $t \in [0, 1]$, tel que $A_n = \{x, f(x) > t\}$. Or d'après (iii), il existe $\mu \in \mathscr{P}_C$ telle que $\mu(f) = \widehat{C}(f)$ donc $\mu(\{f > t\}) = C(\{f > t\})$ pour tout $t \in [0, 1]$ cf. démonstration de (ii) $\Rightarrow$ (i) du lemme précédent. Donc en particulier $\mu(A_n) = C(A_n)$ pour tout $n \in \omega$, et comme l'ensemble $\{B \in \mathscr{B}, \mu(B) = C(B)\}$ est stable par intersection dénombrable, on obtient $\mu(\bigcap_{n\in\omega} A_n) = C(\bigcap_{n\in\omega} A_n)$ et par suite $C(\bigcap_{n\in\omega} A_n) = \inf_{n\in\omega} C(A_n)$. D'autre part, $C$ étant montante, on déduit donc que pour toute suite $(B_n)_{n\in\omega} \subseteq \mathscr{B}$, $(1_{B_n} \to 1_B) \Rightarrow (C(B_n) \to C(B))$. Et par conséquent $C$ est contrôlée continûment par une mesure bornée.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de boréliens totalement ordonnée pour l'inclusion. Il existe d'après [D] une mesure *simplement* additive $\mu$ majorée par $C$ sur les boréliens telle que $\mu(A_i) = C(A_i)$ pour tout $i \in I$ ; et comme $C$ est contrôlée continûment par une mesure bornée, elle descend sur les boréliens, et par suite $\mu$ elle aussi est descendante sur les boréliens, donc $\mu$ est une vraie mesure ($\sigma$-additive). Ceci achève la démonstration de la proposition.

## 5. Théorème principal

**Théorème 9.** *Soient $E$ un compact métrisable et $C$ une capacité alternée d'ordre 2 sur $E$. On a $\mathscr{P}_C = \overline{\text{conv}}\{\mu \in \mathscr{P}_C, \exists f: E \to [0, 1]$ injective borélienne, $\mu(f) = \widehat{C}(f)\}$.*

La démonstration de ce théorème repose sur le résultat suivant qui a son propre intérêt et dont la démonstration se trouve plus loin.

**Théorème 10.** *Soient $E$ un compact métrisable, $C$ une capacité alternée d'ordre 2 sur $E$, $\mathscr{A}$ une sous-algèbre finie de $\mathscr{B}$ et $\nu \in \mathscr{P}_{C_{|\mathscr{A}}}$. Si $\nu$ est extrémale dans $\mathscr{P}_{C_{|\mathscr{A}}}$, alors il existe $\mu \in \mathscr{P}_C$ (nécessairement extrémale) et une fonction injective borélienne $f$ de $E$ dans $[0, 1]$ tels que $\mu(f) = \widehat{C}(f)$ et $\mu_{|\mathscr{A}} = \nu$.*

*Démonstration du théorème* 9. Soient $\mu \in \mathscr{P}_C$, $\varepsilon > 0$ et $f_0, \dots, f_p \in \mathscr{C}_+(E)$ (espace des fonctions continues et positives sur $E$). Il existe une partition $B_0, \dots, B_N$ en $K_\sigma$ de $E$ et une famille $(\lambda_i^j)_{0\leq i\leq N,\ 0\leq j\leq p}$ de réels positifs telles que pour tout $j \in \{0, 1, \dots, p\}$, si on pose $\varphi_j = \sum_{0\leq i\leq N} \lambda_i^j 1_{B_i}$, on obtient $\sup_{x\in E} |f_j(x) - \varphi_j(x)| < \varepsilon/2C(E)$. D'aprés le théorème 3, il existe une famille de permutations $(S_l)_{l\in L}$ de $\{0, 1, \dots, N\}$ et des réels strictement positifs $(\alpha_l)_{l\in L}$ avec $\sum_{l\in L} \alpha_l = 1$ tels que: $\mu(B_i) = \sum_{l\in L} \alpha_l \mu_{S_l}(B_i)$ pour tout $i \in \{0, 1, \dots, N\}$, où $\mu_{S_l}$ est l'unique mesure définie sur l'algèbre $\mathscr{A}$ engendrée par $(B_i)_{0\leq i\leq N}$ telle que $\mu_{S_l}(\bigcup_{j\leq i} B_{S_l(j)}) = C(\bigcup_{j\leq i} B_{S_l(j)})$ pour tout $i \in \{0, 1, \dots, N\}$. D'autre part d'après le théorème 10, pour tout $l \in L$, il existe $\mu_l \in \mathscr{P}_C$ et il existe une fonction injective borélienne $g_l$ de $E$ dans $[0, 1]$ tels que pour tout $l \in L$, $\mu_l(g_l) = \widehat{C}(g_l)$ et $\mu_{l_{|\mathscr{A}}} = \mu_{S_l}$ ; par suite, pour tout $j \in \{0, \dots, p\}$ on obtient $\mu(\varphi_j) = \sum_{l\in L} \alpha_l \mu_l(\varphi_j)$ (car $\varphi_j$ est $\mathscr{A}$-mesurable). Et par conséquent

$$\left|\mu(f_j) - \sum_{l\in L} \alpha_l \mu_l(f_j)\right| \leq |\mu(f_j) - \mu(\varphi_j)| + \left|\sum_{l\in L} \alpha_l(\mu_l(\varphi_j) - \mu_l(f_j))\right|$$
$$\leq 2C(E) \sup_{x\in E} |f_j(x) - \varphi_j(x)| < \varepsilon .$$

On a donc montré que: pour tout $\mu \in \mathscr{P}_C$, $\varepsilon > 0$, et $f_0, \dots, f_p$ éléments de $\mathscr{C}_+(E)$, il existe $(\alpha_l)_{l\in L} \subseteq [0, 1]$ avec $L$ fini et $\sum_{l\in L} \alpha_l = 1$, $(\mu_l)_{l\in L} \subseteq \mathscr{P}_C$, et $(g_l)_{l\in L}$ famille d'injection borélienne de $E$ dans $[0, 1]$ telles que

$$\forall l \in L, \quad \mu_l(g_l) = \widehat{C}(g_l)$$

et

$$\forall j \in \{0, \dots, p\}, \quad \left|\mu(f_j) - \sum_{l\in L} \alpha_l \mu_l(f_j)\right| < \varepsilon .$$

Autrement dit, $\mathscr{P}_C \subseteq \overline{\operatorname{conv}}\{\mu \in \mathscr{P}_C,\ \exists f : E \to [0, 1]$ injective borélienne, $\mu(f) = \widehat{C}(f)\}$. L'autre inclusion du théorème est claire, d'où le théorème.

Le corollaire suivant découle du théorème 10 et du théorème de Krein-Milman.

**Corollaire 11.** *Soient $E$ un compact métrisable, $C$ une capacité alternée d'ordre 2 sur $E$, et $\mathscr{A}$ une sous-algèbre finie de $\mathscr{B}$. On a*

$$\forall \nu \in \mathscr{P}_{\mathscr{C}_{|\mathscr{A}}},\ \exists \mu \in \mathscr{P}_C \textit{ telle que } \mu_{|\mathscr{A}} = \nu .$$

*Remarque.* Soient $E$ un compact métrisable, $C$ une capacité alternée d'ordre 2 sur $E$ contrôlée continûment par une mesure bornée, et $\mathscr{A}$ une sous-tribu de $\mathscr{B}$. On a

$$\forall \nu \in \mathscr{P}_{C_{|\mathscr{A}}},\ \exists \mu \in \mathscr{P}_C \text{ telle que } \mu_{|\mathscr{A}} = \nu .$$

En effet soit $\nu \in \mathscr{P}_{C_{|\mathscr{A}}}$. Pour chaque entier $p$, donnons-nous $p$ éléments de $\mathscr{A}$ et désignons par $\mathscr{F}$ l'algèbre finie engendrée par ces $p$ boréliens. D'après le corollaire précédent, il existe $\mu \in \mathscr{P}_C$ telle que $\mu_{|\mathscr{F}} = \nu$ ; comme l'ensemble des mesures $\mu$ *simplement* additives sur $(E, \mathscr{B})$ de masse $C(E)$, majorées par $C$ sur $\mathscr{B}$ et telles que $\mu(B) = \nu(B)$ pour tout élément $B$ d'une sous-algèbre finie de $\mathscr{A}$ est un compact pour la topologie de la convergence simple sur $\mathscr{B}$, on déduit facilement l'existence d'une mesure simplement additive $\mu$ sur $(E, \mathscr{B})$ majorée par $C$ sur $\mathscr{B}$ et telle que $\mu(A) = \nu(A)$ pour tout $A \in \mathscr{A}$. Et comme $C$ est en particulier descendante sur les boréliens, $\mu$ est une vraie mesure ($\sigma$-additive). Ceci achève la démonstration de la remarque.

La démonstration du théorème 10 va reposer sur les lemmes suivants.

**Lemme 12.** *Pour tout $n \in \omega$, on a la propriété suivante: pour toute famille croissante $(A_m)_{m\leq n}$ de boréliens, il existe une famille $(K_m)_{m\leq n}$ De $K_\sigma$ vérifiant*

$$K_0 \subseteq A_0,\ \forall m \in [1, n], \quad K_m \subseteq \left(A_m \Big\backslash \bigcup_{l<m} A_l\right) \quad \textit{et} \quad C(A_n) = C\left(\bigcup_{m\leq n} A_m\right) .$$

*Démonstration.* Elle se fait par récurrence sur $n$. Le cas $n = 0$ est évident. Soit $n \geq 1$ telle que la propriété soit vérifiée pour tout $m < n$, et soit $(A_m)_{m\leq n}$

une famille croissante de boréliens; considérons $Y$ un $K_\sigma \subseteq A_n \backslash A_{n-1}$ tel que $C^{A_{n-1}}(Y) = C^{A_{n-1}}(A_n \backslash A_{n-1})$, i.e, $C(Y \cup A_{n-1}) = C(A_n)$. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à la famille $(Y \cup A_m)_{m \leq n-1}$, il existe $(K_m)_{m \leq n-1}$ famille de $K_\sigma$ vérifiant $K_0 \subseteq Y \cup A_0$,

$$\forall m \in [1, n-1], \quad K_m \subseteq (Y \cup A_l) \backslash \bigcup_{l<m} (Y \cup A_l) \subseteq A_m \backslash \bigcup U_{l<m} A_l,$$

et

$$C(Y \cup A_{n-1}) = C\left(\bigcup_{m<n-1} K_m\right) = C\left(\bigcup_{m \leq n-1} K_m \cup A_0 \cup Y\right) \qquad (= C(A_n)).$$

Soit ensuite $Z$ un $K_\sigma \subseteq A_0$ tel que $C^{(\bigcup_{m \leq n-1} K_m \cup Y)}(Z) = C^{(\bigcup_{m \leq n-1} K_m \cup Y)}(A_0)$ c'est à dire $C(\bigcup_{m \leq n-1} K_m \cup Y \cup Z) = C(\bigcup_{m \leq n-1} K_m \cup Y \cup A_0)$ $(= C(Y \cup A_{n-1}) = C(A_n))$.

Posons enfin $L_0 = Z$, $L_n = Y$, et $L_m = K_m$ pour $m \in [1, n-1]$. On voit facilement que $C(A_n) = C(\bigcup_{m \leq n} L_m)$.

La démonstration du lemme qui suit se fait par une récurrence immédiate sur $n$ à partir du lemme 14.

**Lemme 13.** *Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de compacts totalement ordonnée pour l'inclusion et $(K^l)_{l \leq n}$ une famille de $K_\sigma$ deux à deux disjoints. Pour tout $l \leq n$, désignons par $(K_m^l)_{m \in \omega}$ une suite croissante de compacts de $E$ telle que $K^l = \bigcup_{m \in \omega} K_m^l$. Il existe alors $\gamma \in \mathscr{P}_C$ telle que pour tout $l \leq n$ on ait*

$$\forall m \in \omega, \ \forall i \in I, \quad \gamma\left(\bigcup_{k<l} K^k \cup K_m^l \cup (F_i \cap K_{m+1}^l)\right) = C\left(\bigcup_{k<l} K^k \cup K_m^l \cup (F_i \cap K_{m+1}^l)\right).$$

**Lemme 14.** *Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de compacts totalement ordonée pour l'inclusion et $Y$, $Z$ deux $K_\sigma$ disjoints. Désignons par $(Y_m)_{m \in \omega}$ (resp. $(Z_m)_{m \in \omega}$) une suite croissante de compacts de $E$ telle que $Y = \bigcup_{m \in \omega} Y_m$ (resp. $Z = \bigcup_{m \in \omega} Z_m$). Il existe alors $\gamma \in \mathscr{P}_C$ telle que pour tout $(m, i) \in \omega \times I$, on ait*

$$\gamma(Y_m \cup (Y_{m+1} \cap F_i)) = C(Y_m \cup (Y_{m+1} \cap F_i))$$

*et*

$$\gamma(Y \cup Z_m \cup (Z_{m+1} \cap F_i)) = C(Y \cup Z_m \cup (Z_{m+1} \cap F_i)).$$

*Démonstration.* Désignons par $\leq_{\text{lex}}$ l'ordre lexicographique sur $\omega \times I$ et considérons les familles de compacts suivantes:

$$(Y_m \cup (Y_{m+1} \cap F_i))_{(m,i) \in \omega \times I} \quad \text{et} \quad (Z_m \cup (Z_{m+1} \cap F_i))_{(m,i) \in \omega \times I};$$

on voit facilement que pour tout $(m, i)$, $(n, j) \in \omega \times I$, si $(m, i) \leq_{\text{lex}} (n, j)$ alors $(Y_m \cup (Y_{m+1} \cap F_i)) \subseteq (Y_n \cup (Y_{n+1} \cap F_j))$ et $(Z_m \cup (Z_{m+1} \cap F_i)) \subseteq (Z_n \cup$

$(Z_{n+1} \cap F_j))$. D'aprés [DFM], il existe $\mu \in \mathscr{P}_C$, $\nu \in \mathscr{P}_{C^Y}$ telles que pour tout $(m, i) \in \omega \times I$,

$$\mu(Y_m \cup (Y_{m+1} \cap F_i)) = C(Y_m \cup (Y_{m+1} \cap F_i)),$$
$$\nu(Z_m \cup (Z_{m+1} \cap F_i)) = C^Y(Z_m \cup (Z_{m+1} \cap F_i)),$$

et il existe $\lambda \in \mathscr{P}_{C^{Y \cup Z}}$ telle que $\lambda(E\backslash(Y \cup Z)) = C^{Y \cup Z}(E\backslash(Y \cup Z))$. Posons ensuite $\gamma = \mu_{|Y} + \nu_{|Y \cup Z} + \lambda_{|E}$ $(= \mu_{|Y} + \nu_{|Z} + \lambda_{|E\backslash(Y \cup Z)})$, on aura pour tout $(m, i) \in \omega \times I$,

$$\gamma(Y_m \cup (Y_{m+1} \cap F_i)) = \mu(Y_m \cup (Y_{m+1} \cap F_i)) = C(Y_m \cup (Y_{m+1} \cap F_i)),$$
$$\gamma(Y \cup Z_m \cup (Z_{m+1} \cap F_i)) = \mu(Y) + \nu(Z_m \cup (Z_{m+1} \cap F_i)),$$

et comme $C$ est montante, $\mu(Y) = C(Y)$ et par suite d'après ce qui précéde,

$$\begin{aligned}\gamma(Y \cup Z_m \cup (Z_{m+1} \cap F_i)) &= C(Y) + \nu(Z_m \cup (Z_{m+1} \cap F_i)) \\ &= C(Y) + C^Y(Z_m \cup (Z_{m+1} \cap F_i)) = C(Y \cup Z_m \cup (Z_{m+1} \cap F_i)).\end{aligned}$$

*Démonstration du théorème* 10. Soit $\nu$ une mesure extrémale dans $\mathscr{P}_{C_{|\mathscr{A}}}$, et soit $(A_i)_{0 \leq i \leq N}$ une énumération des atomes de $\mathscr{A}$. D'après le théorème 3, il existe une permutation $\sigma$ de $\{0, 1, \dots, N\}$ telle que $\nu(\bigcup_{j \leq i} A_{\sigma(j)}) = C(\bigcup_{j \leq i} A_{\sigma(j)})$ pour tout $i \in \{0, \dots, N\}$. D'autre part par le lemme 12, on peut trouver une famille de $K_\sigma$, $(B_i)_{0 \leq i \leq N}$, vérifiant

$$\forall i \in \{0, \dots, N\}, \quad B_i \subseteq A_{\sigma(i)} \quad \text{et} \quad C\left(\bigcup_{j \leq i} B_j\right) = C\left(\bigcup_{j \leq i} A_{\sigma(j)}\right).$$

Pour tout $i \in \{0, 1, \dots, N\}$, désignons par $(B_i^n)_{n \in \omega}$ une suite croissante de compacts de $E$ telle que $B_i = \bigcup_{n \in \omega} B_i^n$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $B_i^0 = \varnothing$ pour tout $i \in \{0, \dots, N\}$. Cela étant, considérons maintenant une fonction s.c.s injective $\varphi$ de $E$ dans $[0, 1]$ (par exemple, la fonction $\varphi$ de $E$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = 2^{-1} - \sum_{n \in \omega} 3^{-(n+1)} 1_{V_n}(x)$, où $(V_n)_{n \in \omega}$ est une base d'ouverts de $E$). Il découle alors du lemme 13 qu'il existe $\mu \in \mathscr{P}_C$ tel que pour tout $i \in \{0, \dots, N\}$, $n \in \omega$ et $r \in (\mathbb{Q} \cap [0, 1[)$, on ait

$$\mu\left(\bigcup_{j<i} B_j \cup B_i^n \cup (\{\varphi \geq r\} \cap B_i^{n+1})\right) = C\left(\bigcup_{j<i} B_j \cap B_i^n \cup (\{\varphi \geq r\} \cap B_i^{n+1})\right).$$

En particulier, $\mu(\bigcup_{j \leq i} B_j) = C(\bigcup_{j \leq i} B_j)$ pour tout $i \in \{0, \dots, N\}$. Donc on obtient pour tout $i \in \{0, \dots, N\}$

$$\begin{aligned}C\left(\bigcup_{j \leq i} B_j\right) &= \mu\left(\bigcup_{j \leq i} B_j\right) \leq \mu\left(\bigcup_{j \leq i} A_{\sigma(j)}\right) \\ &\leq C\left(\bigcup_{j \leq i} A_{\sigma(j)}\right) \qquad \left(= \nu\left(\bigcup_{j \leq i} A_{\sigma(j)}\right)\right) \\ &= C\left(\bigcup_{j \leq i} B_j\right).\end{aligned}$$

D'où égalité partout, et par conséquent $\mu_{|\mathscr{A}} = \nu$.

Pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, N\}$ notons par $f_i$ la fonction définie comme suit

$$f_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin B_i, \\ 2^{-(n+1)}(\varphi(x)+1) & \text{si } x \in B_i^{n+1} \backslash B_i^n. \end{cases}$$

$f_i$ est borélienne, injective de $B_i$ dans $[0, 1[$, et pour tout $n \in \omega$, on a

$$\forall r \in [2^{-(n+1)}, 2^{-n}], \quad \{f_i \geq r\} = B_i^n \cup (B_i^{n+1} \cap \{\varphi \geq 2^{n+1}r - 1\}).$$

Considérons ensuite la fonction $g$ de $E$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \sum_{i=0}^{N}((N+1-i) + f_i(x))1_{B_i}(x) + \varphi(x)1_{E\backslash \bigcup_{i\leq N} B_i}(x);$$

$g$ est borélienne, injective de $E$ dans $[0, N+2]$, et pour tout $n \in \omega$, on a

- $\forall i \in \{0, \ldots, N\}$, $\forall r \in [(N+1-i) + 2^{-(n+1)}, (N+1-i) + 2^{-n}]$,
$$\{g \geq r\} = \bigcup_{j<i} B_j \cup B_i^n \cup (B_i^{n+1} \cap \{\varphi \geq 2^{n+1}(r-(N+1-i)) - 1\});$$
- $\forall r \in [0, 1[$, $\{g \geq r\} = \bigcup_{i\leq N} B_i \cup \left(\{\varphi \geq r\} \cap \left(E \backslash \bigcup_{i \leq N} B_k\right)\right)$.

Donc pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $\mu(\{g \geq r\}) = C(\{g \geq r\})$.

Pour $r \in \mathbb{R}_+^* \backslash \mathbb{Q}$ soit $(r_n)$ une suite d'éléments de $\mathbb{Q}$ croissante et convergente vers $r$. Comme on a $\{x \in E,\ g(x) \geq r\}$ est égale à $\bigcap_{n\in\omega}\{x \in E,\ g(x) \geq r_n\}$ et $\{B \in B,\ \mu(B) = C(B)\}$ est stable par intersection dénombrable, il vient $\mu(\{g \geq r\}) = C(\{g \geq r\})$ pour tout $r \in \mathbb{R}$; et par suite $\mu(g) = \widehat{C}(g)$. Posons $f = (N+2)^{-1}g$. Alors le couple $(\mu, f)$ convient. Ceci achève la démonstration du théorème 10.

## Remerciements

Je tiens à remercier Messieurs G. Debs et C. Dellacherie pour les discussions que j'ai eues avec eux sur le sujet.

## Références

[A1] B. Anger, *Approximation of capacities by measures*, Lecture Notes in Math., vol. 226, Springer-Verlag, New York, 1971, pp. 152–170.

[A2] ——, *Kapazitaeten und obere Einhuellende von Masson*, Math. Ann. **199** (1972), 115–130.

[C] G. Choquet, *Theory of capacities*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **5** (1953–54), 131–292.

[DFM] C. Dellacherie, D. Feyel, and G. Mokobodzki, *Intégrale de capacités fortement sous-additives*, Sém. Probab. Lecture Notes Math., vol. 920, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, and New York, 1980-81, pp. 8–28.

[D] D. Dellacherie, *Appendice à l'exposé précédent*, Sém. Probab. Lecture Notes Math., vol. 920, 1980-81, pp. 29–40.

[E] A. El Kaabouchi, *Points extrémaux du convexe des mesures majorées par une capacité*, C. R. Acad. Sci. Sér. I Math. **313** (1991), 37–40.

[HS] P. J. Huber and V. Strassen, *Minimax tests and the Neyman-Pearson lemma for capacities*, Ann. Statist. **1** (1973), 251–263.

[SP] L. S. Shapley, *Cores of convex games*, Internat. J. Game Theory **1** (1971), 11–26.

Équipe d'Analyse, Université Paris 6, tour 46- 4$^e$ étage–Boîte 186, 4, Place Jussieu, 75252–Paris Cedex 05, France