PROCEEDINGS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 121, Number 3, July 1994

SUR UN THÉORÈME DE MITIAGIN, ROLEWICZ, ET ZELAZKO

M. ALLOUCHE, R. COUTURE, ET C. T. TSAI

(Communicated by Dale E. Alspach)

ABSTRACT. We establish the analogue of a theorem of Mitiagin, Rolewicz, and Zelazko for a family of nonmetrizable topological algebras. These algebras are composed of infinitely differentiable functions and are, as topological vector spaces, Silva spaces. The condition of m-convexity is replaced by one on the collection of bounded subsets of the algebra.

RÉSUMÉ. Nous démontrons l'analogue du théorème de Mitiagin, Rolewicz et Zelazko pour une famille d'algèbres topologiques non-métrisables. Ces algèbres sont formées de fonctions indéfiniment dérivables et sont, en tant qu'espaces vectoriels topologiques, des espaces de Silva. La condition de m-convexité est remplacée par une autre portant sur l'ensemble des parties bornées de l'algèbre.

INTRODUCTION

Soit A une algèbre topologique sur $\mathbb{C}$, commutative, avec élément unité, localement convexe, métrisable et complète. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ une fonction entière. On dit que f est définie dans A si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n$ converge dans A pour tout $a \in A$. Mitiagin, Rolewicz, et Zelazko [6] ont montré que toutes les fonctions entières sont définies dans A si et seulement si $0 \in A$ possède un système fondamental de voisinages V idempotents (c'est-à-dire tels que $V \cdot V = \{xy | x, y \in V\} \subset V$). Zelazko [8] a ensuite montré par un exemple que l'hypothèse de métrisabilité est essentielle pour la validité de cette assertion.

Nous considérons une famille d'algèbres topologiques (définie au §2), formés de fonctions indéfiniment dérivables et qui, en tant qu'espaces vectoriels topologiques, sont des espaces de Silva [7]. Ces algèbres topologiques ne sont donc pas métrisables. On montre que toutes les fonctions entières sont définies dans une telle algèbre si et seulement si elle possède un système fondamental de bornés idempotents (c'est-à-dire qu'on a une famille de bornés B avec $B \cdot B \subset B$ et telle qu'un borné quelconque soit absorbé par l'un d'eux). Cette propriété a également lieu dans le cas de l'exemple de Zelazko.

Nous reformulons tout d'abord le théorème de Mitiagin, Rolewicz, et Zelazko, sans l'hypothèse de métrisabilité, de manière qu'il soit applicable à notre famille d'algèbres.

Received by the editors October 12, 1992.
1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 46J35, 46H30.

1. Préliminaires

Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, et si D est un sous-ensemble absolument convexe de E ne contenant aucune droite réelle, on notera E_D le sous-espace vectoriel de E engendré par D et on pose, pour $x \in E_D$, $\rho_D(x) = \inf\{\lambda > 0 | x \in \lambda D\}$. On considérera E_D comme espace normé par ρ_D.

Théorème 1. *Soit A une algèbre topologique sur $\mathbb{C}$, commutative, séquentiellement complète et possédant une unité. Supposons, de plus, que la multiplication soit continue en ses deux arguments simultanément et que A admette un système fondamental de bornés (i.e., tout autre borné est absorbé par l'un deux) absolument convexes (B_α) tels que A_{B_α} soit un espace de Baire.*

Alors toutes les fonctions entières sont définies dans A si et seulement si, pour tout borné B et tout voisinage V de 0, il existe un idempotent E et un $\delta > 0$ tels que $\delta B \subset E \subset V$.

Cette condition est vérifiée, en particulier, si on a dans A un système fondamental de voisinages de 0 qui soient idempotents, ou encore, un système fondamental de bornés idempotents.

Démonstration. La suffisance de la condition s'établit comme dans la preuve du théorème 3 de [1]. Soit V un voisinage de 0 dans A. On peut le supposer absolument convexe. Soit ρ la semi-norme associée à V. Comme la multiplication dans A est supposée continue, on a une autre semi-norme ρ_1, continue et telle que

$$\rho(ab) \leq \rho_1(a)\rho_1(b), \qquad a, b \in A.$$

D'autre part, comme dans le lemme 1.5 de [6], on a $\sup_p \rho_1(a^p)^{1/p} < \infty$, $a \in A$. Cette expression définit donc une fonction finie et semicontinue inférieurement sur A.

Prenant B_α comme dans l'énoncé du théorème, cette fontion est également semicontinue inférieurement dans A_{B_α} puisque, B_α étant borné, l'inclusion $A_{B_\alpha} \subset A$ est continue. Comme A_{B_α} est un espace de Baire, on a un nombre positif d, tel que l'ensemble fermé $\{a \in A_{B_\alpha} | \sup_p \rho_1(a^p)^{1/p} \leq d\}$ soit d'intérieur non vide (pour la topologie de A_{B_α}). Prenons a_0 dans cet intérieur. On a W, un voisinage de 0 dans A_{B_α} tel que, si $a \in W$, $\rho_1[(a_0 + a)^p] \leq d^p$, $p = 1, 2, \ldots$; d'où, pour $a \in W$,

$$\begin{aligned} \rho(a^p) = \rho([(a_0 + a) - a_0]^p) &\leq \sum_{l=0}^{p} \binom{p}{l} \rho((a_0 + a)^l(-a_0)^{p-l}) \\ &\leq \sum_{l=0}^{p} \binom{p}{l} \rho_1((a_0 + a)^l)\rho_1((-a_0)^{p-l}) \leq (2d)^p. \end{aligned}$$

On a donc $(\frac{1}{2d}W)^{(p)} \subset V$ (si $F \subset A$, $F^{(p)} = \{x^p | x \in F\}$). On en déduit, puisque W absorbe B_α, qu'il existe un $\delta > 0$ tel que $(2e\delta B_\alpha)^{(p)} \subset V$; mais $(\delta B_\alpha)^p$ est contenu dans l'enveloppe absolument convexe de $(2e\delta B_\alpha)^{(p)}$ (voir la preuve du lemme 1.3 de [6]) et on a enfin $(\delta B_\alpha)^p \subset V$, $p = 1, 2, \ldots$. La conclusion du théorème est donc vérifiée pour les bornés B_α (en prenant $E = \bigcup_p (\delta B_\alpha)^p$) et, par suite, pour un borné quelconque puisque (B_α) est fondamentale.

Remarque 1. Cette démonstration est similaire à celle de Mitiagin, Rolewicz, et Zelazko [6]. Ceux-ci supposent que A est un espace de Fréchet et ils appliquent le principe de Baire à A tout entier.

2. Les algèbres topologiques $C_I\{M_n\}$

Soit M_n, $n = 0, 1, \ldots$, une suite de nombres positifs, satisfaisant à une condition de la forme

$$(2.1) \qquad M_i M_j \le \alpha_0 \beta_0^{i+j} M_{i+j}, \qquad i, j = 0, 1, \ldots,$$

où α_0 et β_0 sont des constantes.

Soit I un intervalle compact et soit β un nombre positif. Nous désignerons par $C_I^\beta\{M_n\}$ l'espace vectoriel des fonctions $f(x)$, définies et indéfiniment dérivables sur I, à valeurs complexes et satisfaisant aux inégalités

$$(2.2) \qquad |f^{(n)}(x)| \le \alpha \beta^n M_n, \qquad x \in I, \; n = 0, 1, \ldots,$$

pour une constante positive α ne dépendant que de f. Nous noterons par $\rho_\beta(f)$ la plus petite constante α pour laquelle (2.2) ait lieu. L'espace vectoriel $C_I^\beta\{M_n\}$, muni de la norme ρ_β, est alors un espace de Banach.

Soit $C_I\{M_n\} = \bigcup_{\beta>0} C_I^\beta\{M_n\}$ muni de la topologie limite inductive localement convexe. On obtient ainsi une algèbre topologique (d'après (2.1)) si la multiplication est définie par $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $x \in I$.

Ces algèbres sont, en tant qu'espaces vectoriels topologiques, des espaces de Silva (ou espaces LN^* dans la terminologie de Silva [7]) et vérifient donc les propriétés énoncées dans l'hypothèse du Théorème 1 (on peut prendre pour (B_α) la famille des boules unités des $C_I^\beta\{M_n\}$, $\beta = 1, 2, \ldots$).

Remarque 2. On a $C_I\{M_n\} = C_I\{M_n^f\}$ où M_n^f est la régularisée de Cartan [3] de M_n. C'est l'enveloppe supérieure des suites, majorées par M_n, qui sont de la forme $a\frac{r^{2n}}{n^n}$ pour $n < r$ et égales à 0 pour $n \ge r$ (a et r sont des constantes positives). Si, pour r donné, on note $U(r)$ l'inverse a^{-1} de la valeur maximale de a telle que $a\frac{r^{2n}}{n^n} \le M_n$, $n < r$, on a alors

$$(2.3) \qquad M_n^f = \sup_{r>n} \frac{r^{2n}}{n^n U(r)}, \qquad n = 0, 1, \ldots.$$

On pourra donc supposer la suite M_n égale à sa régularisée de Cartan (on peut alors montrer que la condition (2.1) est nécessaire pour que $C_I\{M_n\}$ contienne, avec f et g, leur produit fg).

3. Un critère

Nous allons maintenant caractériser les suites $M_n (= M_n^f)$ pour lesquelles toutes les fonctions entières sont définies dans l'algèbre topologique $C_I\{M_n\}$.

Théorème 2. *Toutes les fonctions entières sont définies dans $C_I\{M_n\}$ si et seulement si la suite $\omega_n = (M_n/n!)^{1/n}$, $n = 1, 2, \ldots$ est presque croissante (c'est à dire qu'il existe une constante C telle que $\omega_i \le C\omega_j$ si $i \le j$).*

Nous aurons à utiliser la formule de Faà de Bruno:

Lemme 1. *Soit $f(x)$, une fonction à valeurs réelles, définie et indéfiniment dérivable au voisinage d'un point x_0 dans $\mathbb{R}$. Posons $y_0 = f(x_0)$. Soit $g(y)$ une fonction à valeurs complexes, définie et indéfiniment dérivable au voisinage de y_0 (dans $\mathbb{R}$). Alors, si $b_0, b_1, \ldots, c_0, c_1, \ldots,$ et $d_0, d_1, \ldots$ sont, respectivement, les coefficients de Taylor de $f(x)$ en x_0, de $g(y)$ en y_0 et de $g \circ f(x)$ en x_0, on a les relations suivantes*

$$d_k = \sum c_i C^k_{i_1 i_2 \ldots} b_1^{i_1} b_2^{i_2} \cdots, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{3.1}$$

où la sommation porte sour toutes les suites d'entiers, positifs ou nuls, $i_1, i_2, \ldots$ telles que

$$1i_1 + 2i_2 + \cdots = k \tag{3.2}$$

et où $i = i_1 + i_2 + \cdots$ et $C^i_{i_1 i_2 \cdots}$ désigne le coefficient multinômial $i!/i_1!i_2! \cdots$.

Cette formule (3.1) est encore valable lorsque $f(x)$ est à valeurs complexes et $g(y)$ est holomorphe au voisinage de $y_0 = f(x_0)$.

En spécialisant la formule (3.1) au cas $f(x) = x/1 - x$, $g(y) = 1/1 - y$, et $x_0 = 0$, on trouve:

Corollaire 1. *Pour tout entier positif k, $\sum C^i_{i_1 i_2 \cdots} = 2^{k-1}$ où la somme porte sur toutes les suites d'entiers positifs ou nuls vérifiant* (3.2) *et où $i = i_1 + i_2 + \cdots$.*

Nous ferons également usage d'une variante d'une fonction construite par Cartan [4] (on supposera, dans la démonstration du théorème et sans restreindre la généralité, que $I = [-1, 1]$). Elle est définie par la formule suivante:

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{T_{r'_k}(x)}{U(r_k)}, \qquad -1 \leq x \leq 1, \tag{3.3}$$

où $r_k > k$ est choisi de sorte que (voir (2.3))

$$M_k = \frac{r_k^{2k}}{k^k U(r_k)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{3.4}$$

où r'_k est le plus grand entier $< r_k$ et où $T_n(x)$ est le n-ième polynôme de Tchebyscheff.

Remarque 3. Le suprémum en (2.3) est atteint puisqu'on a défini la fonction $U(r)$ de manière qu'elle soit continue à gauche aux points où elle est discontinue (la fonction $U(r)$ de Cartan est continue à droite en ces points).

Lemme 2. *La fonction $h(x)$ définie par la formule* (3.3) *appartient à $C_I\{M_n\}$, où $I = [-1, 1]$. Elle satisfait de plus aux inégalités*

$$\alpha \beta^n M_n \leq h^{(n)}(1), \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{3.5}$$

pour des constantes positives α et β.

Démonstration. On dérive (3.3) terme à terme n fois et on utilise l'inégalité (voir, par exemple, [5])

$$|T_k^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{n}\right)^n k^{2n}, \qquad n \leq k, \ -1 \leq x \leq 1,$$

ainsi que (3.4) pour estimer chaque terme. La première assertion en résulte.

On peut démontrer les inégalités (3.5) en ne considérant que le n-ième terme de la n-ième série dérivée de (3.3) (les polynômes de Tchebyscheff ont toutes leurs dérivées positives en $x = 1$), et en utilisant l'inégalité (voir [5])

$$T_k^{(n)}(1) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{en}\right)^n k^{2n}, \qquad n \leq k,$$

avec $k = r_n'$ ainsi que (3.4) (avec $k = n$).

Démonstration du théorème 2 (nécessité de la condition). Supposons donc que toutes les fonctions entières sont définies dans $C_I\{M_n\}$. Soit $c_0, c_1, \dots$ une suite de nombres avec $0 \leq c_i < 1$ et telle que $c_i^{1/i} \to 0$ lorsque $i \to \infty$. Soit $\psi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$, $z \in \mathbb{C}$. Si la fonction h est donnée par (3.3), le lemme 2 et notre supposition entraînent $\psi \circ (h - h(1)) \in C_I\{M_n\}$.

Si d_k, $k = 0, 1, \dots$ sont les coefficients de Taylor de $\psi \circ (h(x) - h(1))$ en $x = 1$, on aura donc des constantes positives α et β telles que

$$|d_k| \leq \alpha\beta^k \frac{M_k}{k!}, \qquad k = 0, 1, \dots,$$

et, d'après le lemme 1, les relations (3.1). Comme tous les termes dans (3.1) sont positifs ou nuls, on obtient en tenant compte de (3.5) et avec les notations introduites dans l'énoncé du théorème,

$$c_i \omega_1^{1i_1} \omega_2^{2i_2} \cdots \leq \alpha\beta^k \omega_k^k, \qquad k = 0, 1, \dots,$$

où $i_1, i_2, \dots$ et i sont comme dans le lemme 1 et α, β sont des constantes (possiblement différentes des précédentes).

On a maintenant, puisque $0 \leq c_i < 1$ et $i \leq k$,

$$c_i^{1/i} \leq c_i^{1/k} \leq \alpha^{1/k} \beta \omega_k (\omega_1^{1i_1} \omega_2^{2i_2} \cdots)^{-1/k}, \qquad k = 1, 2, \dots.$$

Le membre de droite doit donc être borné inférieurement par une constante positive puisque'on peut choisir c_i de manière que $c_i^{1/i} \to 0$ arbitrairement lentement. On a, par suite, une constante C telle que

$$\omega_1^{1i_1} \omega_2^{2i_2} \cdots \leq C^k \omega_k^k, \qquad k = 1, 2, \dots. \tag{3.6}$$

Les entiers, positifs ou nuls, $i_1, i_2, \dots$ doivent satisfaire (3.2) et on peut choisir, en particulier, $i_1 = k$, $i_2 = i_3 = \cdots = 0$. On déduit alors de l'inégalité (3.6)

$$C_1^k k^k \leq M_k, \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{3.7}$$

pour une constante $C_1 > 0$.

Maintenant, M_n $(= M_n^f)$ est l'enveloppe supérieure des suites, majorées par M_n et de la forme $a\frac{r^{2n}}{n^n}$ pour $n < r$ et égales à 0 pour $n \geq r$ (voir la remarque 2); posons M_n' égale à l'enveloppe supérieure de ces mêmes suites, prolongées au delà de r par $a\frac{r^{2n}}{n^n}$ plutôt que par 0 et posons $\omega_n' = (M_n'/n!)^{1/n}$, $n = 1, 2, \dots$. Puisque $1/U(r)$, $r > 0$, est bornée, on peut choisir $A \geq 1$ avec $1/U(r) \leq A$, $r > 0$.

On a alors, si $a\frac{r^{2n}}{n^n} \leq M_n$ pour $n < r$, $a \leq A$ d'où

$$n_1 \left(a\frac{r^{2n_1}}{n_1^{n_1}}\right)^{1/n_1} \leq A n_2 \left(a\frac{r^{2n_2}}{n_2^{n_2}}\right)^{1/n_2}, \qquad 0 < n_1 < n_2, \tag{3.8}$$

et, en utilisant (3.7)

$$a\frac{r^{2n}}{n^n} \le an^n \le AC_1^{-n}M_n\,, \qquad n \ge r. \tag{3.9}$$

On déduit de (3.8)

$$n_1^2\omega'_{n_1} \le An_2^2\omega'_{n_2}\,, \qquad 0 < n_1 < n_2\,, \tag{3.10}$$

et, de (3.9)

$$\omega_n \le \omega'_n \le C_2\omega_n\,, \qquad n \ge 0\,, \tag{3.11}$$

où $C_2 = AC_1^{-1}$.

Prenons, enfin, des entiers $0 < j_1 < j_2$ et soit m le plus grand entier tel que $mj_1 \le j_2$. L'inégalité (3.6) avec $k = mj_1$ et tous les indices i égaux à 0 sauf le j_1-ième égal à m, combinée avec (3.10) et (3.11) entraîne

$$\omega_{j_1} \le C\omega_k \le C\omega'_k \le A\left(\frac{m+1}{m}\right)^2 \omega'_{j_2} \le 4AC_2\omega_{j_2}\,,$$

et la suite ω_n est presque croissante.

Nous montrerons à la section suivante que, réciproquement, si la suite $(M_n/n!)^{1/n}$ est presque croissante, alors toutes les fonctions entières sont définies dans $C_I\{M_n\}$.

4. Interprétation topologique

Nous allons démontrer le résultat suivant.

Théorème 3. *La suite* $(M_n/n!)^{1/n}$, $n = 1, 2, \ldots$, *est presque croissante si et seulement si on a, dans l'algèbre topologique* $C_I\{M_n\}$, *un système fondamental de bornés idempotents.*

Démonstration. Supposons, d'abord, la suite $(M_n/n!)^{1/n}$, $n = 1, 2, \ldots$, presque croissante. On a donc une constante C telle que

$$\left(\frac{M_k}{k!}\right)^{1/k} \le C\left(\frac{M_n}{n!}\right)^{1/n}, \qquad 1 \le k \le n. \tag{4.1}$$

Pour $\beta > 0$, notons D_β la boule unité fermée de $C_I^\beta\{M_n\}$. Choissons un $\beta > 0$ et soit $f \in D_\beta$. Soit p un entier positif. Nous allons estimer la dérivée n-ième de $f(x)^p$ en un point $x = x_0 \in I$. Posons $y_0 = f(x_0)$. Désignons par $b_0, b_1, \ldots$ et $d_0, d_1, \ldots$, respectivement, les coefficients de Taylor de $f(x)$ et $f(x)^p$ en $x = x_0$. On a alors, d'après le lemme 1,

$$d_n = \sum C_i^p y_0^{p-i} C^i_{i_1 i_2, \ldots} b_1^{i_1} b_2^{i_2} \cdots\,, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{4.2}$$

où la somme porte sur toutes les suites d'entiers i_1, $i_2, \ldots$ positifs ou nuls et telles que $1i_1 + 2i_2 + \cdots = n$ et $i = i_1 + i_2 + \cdots \le p$.

Puisque $f \in D_\beta$, on a

$$|b_k| \le \frac{\beta^k M_k}{k!}\,, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

d'où, tenant compte de (4.1) et de $1i_1 + 2i_2 + \cdots = n$,

$$|b_1^{i_1} b_2^{i_2} \cdots| \le (C\beta)^n \frac{M_n}{n!}\,, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Enfin, on remarque que $|y_0| \leq M_0$ puisque $f \in D_\beta$ et on obtient, à l'aide de (4.2) et du corollaire au lemme 1,

$$|d_n| \leq (2M_0')^p (2C\beta)^n \frac{M_n}{n!}, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

où on a posé $M_0' = \max\{1, M_0\}$.

On a donc $f^p \in (2M_0')^p D_{2C\beta}$, $p = 1, 2, \ldots$, et, d'après la preuve du lemme 1.3 de [6],

$$\text{(4.3)} \qquad ((4eM_0')^{-1} D_\beta)^p \subset D_{2C\beta}, \qquad p = 1, 2, \ldots.$$

Posons B_β égal à l'enveloppe convexe de la réunion des ensembles $((4eM_0')^{-1} D_\beta)^p$, $p = 1, 2, \ldots$. D'aprés (4.3) B_β est borné et il est idempotent par construction. Enfin, puisque la famille des D_β, $\beta > 0$, est un système fondamental de bornés, il en est de même de B_β, $\beta > 0$.

Si, réciproquement, on a un système fondamental de bornés idempotents, alors, d'après le théorème 1, toutes les fonctions entières sont définies dans $C_I\{M_n\}$. La partie démontrée du théorème 2 implique, enfin, la presque croissance de la suite $\omega_n = (M_n/n!)^{1/n}$.

Remarque 4. La partie non encore démontrée du théoréme 2 résulte immédiatement des théorèmes 1 et 3.

Corollaire 2. *Toutes les fonctions entières sont définies dans l'algèbre topologique $C_I\{M_n\}$ si et seulement si elle admet un système fondamental de bornés qui soient idempotents.*

Remarque 5. Bruna [2] a considéré, pour une suite logarithmiquement convexe M_n, l'espace vectoriel $E_M(I) = \bigcap_{\beta>0} C_I^\beta\{M_n\}$ muni de la topologie définie par l'ensemble des normes ρ_β, $\beta > 0$. C'est une algèbre topologique (le produit est défini par $(fg)(x) = f(x)g(x)$), commutative, avec unité, localement convexe, métrisable et complète. Elle est, de plus, semi-simple. Il a montré, en utilisant le théorème de Mitiagin, Rolewicz, et Zelazko, que toutes les fonctions entières sont définies dans $E_M(I)$ si et seulement si la suite $(M_n/n!)^{1/n}$ $n = 1, 2, \ldots$, est presque croissante.

Remarque 6. On peut se demander si le critère du corollarie 2 est valable pour toute algèbre topologique commutative, avec unité, semisimple et qui, en tant qu'espace vectoriel topologique, est un espace de Silva (LN^*) [7].

Bibliographie

1. R. Arens, *The space L^ω and convex topological rings*, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 931–935.
2. J. Bruna, *On inverse-closed algebras of infinitely differentiable functions*, Studia Math. **69** (1980), 59–68.
3. H. Cartan, *Solution du problème de Carleman pour un intervalle fermé fini*, C. R. Acad. Sci. Paris **208** (1939), 414–416.
4. ——, *Sur les maxima des dérivées successives d'une fonction*, C. R. Acad. Sci. Paris **210** (1940), 431–434.
5. S. Mandelbrojt, *Séries adhérentes, régularisation des suites, applications*, Gauthier-Villars, Paris, 1952.
6. B. Mitiagin, S. Rolewicz, and W. Zelazko, *Entire functions in B_0-algebras*, Studia Math. **21** (1962), 291–306.

7. J. S. E. Silva, *Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni*, Rend. Mat. Univ. Roma **14** (1955), 388–410.

8. W. Zelazko, *A non-m-convex algebra on which operate all entire functions*, Ann. Polon. Math. **46** (1985), 389–394.

Faculté Saint-Jean, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada T6C 4G9
E-mail address: `useralou@mts.ucs.ualberta.ca`

Department of Mathematics, Université Laval, Québec, Québec, Canada G1K 7P4
Current address: Departement d'Informatique, Universite Laval, Québec, Québec, Canada G1K 7P4
E-mail address: `couture@ift.ulaval.ca`

Department of Mathematics, Bishop's University, Lennoxville, Québec, Canada J1M 127