PROCEEDINGS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 123, Number 8, August 1995

FONCTIONS TOTALEMENT CROISSANTES: UNE CORRECTION

JEAN-PIERRE GRENIER

(Communicated by Andrew M. Bruckner)

RESUME. On montre, à l'aide d'un contre exemple qu'un des énoncés classique de la théorie des fonctions totalement croissantes (A. Revuz) est faux, puis on en donne une version corrigée.

ABSTRACT. Using a counterexample we show that a classical result about the totally increasing functions (A. Revuz) is false, then we give a right version of it.

Soit $(E, \leq)$ un demi treillis inférieur (i.e., toute paire $\{x, y\}$ d'éléments de E a une borne inférieure notée $x \wedge y$) muni d'une topologie T. Lorsque A est une partie de E, A^c est le complémentaire de A. Pour tout $t \in E$, on définit le cône négatif $C_-(t) = \{x \in E | x \leq t\}$ et le cône positif $C_+(t) = \{x \in E | x \geq t\}$; plus généralement pour toute partie finie P de E on pose $C_-(x; P) = C_-(x) \backslash (\bigcup \{C_-(p) | p \in P\})$. On sait que l'anneau $\mathscr{A}$ engendré par l'ensemble $\mathscr{G} = \{C_-(x) | x \in E\}$ est l'ensemble des réunions finies disjointes de parties $C_-(x; P)$ (voir [1]). Pour tout $t \in E$, la trace sur $C_+(t)$ du filtre des voisinages de t engendre le filtre des *voisinages à droite* de T.

On considère les axiomes suivants introduits par A. Revuz [1]: On dit que $(E, \leq, T)$ satisfait l'axiome

Xa: lorsque pour tout $x \in E$, $C_-(x)$ est compact.

Xα: lorsque pour tous $x, y \in E$, l'intervalle $[x, y] = C_+(x) \cap C_-(y)$ est compact.

Xα': lorsque pour tout $x \in E$, il existe $y \in E$ tel que x est intérieur à $C_+(y)$.

Xb: lorsque l'application $E \times E \to E$

$$(x, y) \mapsto x \wedge y \quad \text{est continue à droite.}$$

Xc: lorsque pour tout $x \in E$ non maximal, et tout voisinage à droite V de x, il existe $y \in V$ tel que $C_-(x)$ est contenu dans l'intérieur de $C_-(y)$.

Xc$'$: lorsque pour tout $a \in E$, l'ensemble $C_-(a)$ muni de la topologie induite satisfait Xc.

On rappelle les deux résultats suivants [1, pp. 187–210].

Received by the editors January 8, 1994.
1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 28C99; Secondary 06B30.

Théorème 1. (a) *Soit une application* $f\colon E \to \mathbb{R}$. *Il existe une unique mesure* ν *finiment additive définie sur l'anneau* $\mathscr{A}$ *telle que pour tout* $x \in E$, *on ait* $\nu(C_-(x)) = f(x)$. *La fonction* f *est totalement croissante lorsque* ν *est à valeurs dans* $\mathbb{R}+$.

(b) *Si* $(E, \leq, T)$ *satisfait* (Xa, Xb, Xc′) *et si l'application* f *est continue à droite sur* E *et totalement croissante, alors* ν *est dénombrablement additive, ce qui assure par le théorème de Carathéodory qu'elle se prolonge d'une manière unique en une mesure* σ*-additive définie sur le* σ*-anneau* $\sigma(\mathscr{A})$ [2, *p.* 208].

Le théorème 2, p. 237 de [1], affirme:

"Théorème 2." *Soit* $(E, \leq, T)$ *un demi treillis topologique sans élément maximal qui satisfait les axiomes* $(\mathrm{X}\alpha, \mathrm{X}\alpha', \mathrm{Xb}, \mathrm{Xc})$; *on suppose que pour tout* $x \in E$ *le complémentaire* $(C_+(x))^c$ *est non vide. Si* $f\colon E \to \mathbb{R}$ *est totalement croissante et continue à droite et a pour limite* 0 *suivant le filtre engendré par l'ensemble* $\{(C_+(x)\}^c | x \in E\}$, *alors il existe une mesure* ν σ*-additive sur* E *telle que, pour tout* $x \in E$, $\nu(C_-(x)) = f(x)$.

Cet énoncé est faux. L'erreur dans la démonstration de A. Revuz (p. 236) est due au fait que le "complété" $\widetilde{X}$ de X ne satisfait pas Xc. L'énoncé reste faux si E a des points maximaux (on construit un contre-exemple en supprimant les points b_{-n} dans le contre-exemple suivant.

Contre-exemple. On construit l'ensemble $(E, \leq)$ par récurrence. On part d'un individu b_0 qui constitue la génération $n°0$. On munit b_0 d'ancêtres b_{-1}, $b_{-2}, \ldots$ qui forment les générations $-n$ où $n \in \mathbb{N}^*$. On munit b_0 de trois fils:

son *fils gauche* a_0,
son *fils droit* a_1,
son *fils universel* b_1.
Ces trois descendants constituent la $1^{\text{ère}}$ génération (voir Figure 1).

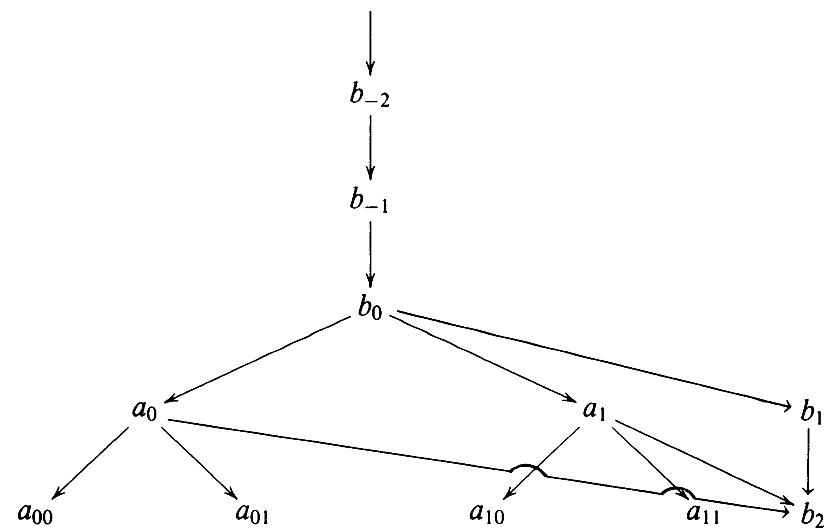

FIGURE 1

Supposons que pour $n \geq 1$, la $n^{\text{ième}}$ génération est constituée des 2^n éléments a_s où $s \in \{0, 1\}^n$ et de b_n. On pose $G_n = \{b_n\} \cup \{a_s | s \in \{0, 1\}^n\}$.
Les trois fils de a_s sont:

son fils gauche a_{s0},
son fils droit a_{s1},
son fils universel b_{n+1}.

L'unique fils de b_n est b_{n+1}.
La $(n+1)^{\text{ième}}$ génération est ainsi définie par récurrence.

On définit l'ordre sur E par la relation:

$$x \leq y \Leftrightarrow x \text{ est un descendant de } y \text{ ou } x = y.$$

$(E, \leq)$ est un demi-treillis; en effet:

Si $x \leq y$ alors $x \wedge y = x$.

Si x et y ne sont pas comparables, soit n la génération de x et m celle de y, alors $x \wedge y = b_{\sup(n,m)+1}$.

On munit E de la topologie discrète. Les axiomes (Xα, Xα', Xb, Xc) sont vérifiés de manière évidente.

On considère l'application f suivante: Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $f(b_{-n}) = 1$ et pour tout entier ≥ 1, si x fait partie de la $n^{\text{ième}}$ génération, on pose

$$f(x) = \begin{cases} 1/2^n & \text{si } x = a_s, \\ 0 & \text{si } x = b_n. \end{cases}$$

Il est clair de f satisfait les hypothèses du "théorème 2". Pour tout $x \in E$, on a $\nu(\{x\}) = 0$, de sorte que f est bien totalement croissante. Puisque G_n est un ensemble fini, on a $\nu(G_n) = 0$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \nu(G_n) = 0$. D'autre part $C_-(b_0) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} G_n$, et donc, $\nu(\bigcup_{n=0}^{+\infty} G_n) = f(b_0) = 1$. Ainsi, ν ne saurait être dénombrablement additive.

Nous allons maintenant établir un énoncé exact destiné à rectifier l'énoncé précédent.

Théorème 3. *Supposons que* $(E, \leq, T)$ *satisfait les axiomes* (Xα, Xb, Xc$'$) *et la propriété* (1) *suivante*:

(1) *Pour tout* $a \in E$, *pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $b \in E$ *et une partie* $S \in \mathscr{A}$ *tel que* $C_-(a) \backslash [b, a] \subset S$ *et* $\nu(S) < \varepsilon$.

Alors ν *est dénombrablement additive.*

Démonstration. On écrira $\bigcup_k$ et $\sum_k$ au lieu de $\bigcup_{k \in \mathbb{N}}$ et $\sum_{k \in \mathbb{N}}$. Donnons nous une partie $C = C_-(a; P) \in \mathscr{A}$ et une suite de parties $C_k = C_-(x_k; P_k)$ deux à deux disjointes de $\mathscr{A}$ telle que $C = \bigcup_k C_k$. On sait que l'on peut supposer $P \subset C_-(a)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $C_-(x_k; P_k) \subset C_-(a)$; donnons nous $\varepsilon > 0$, b et S comme dans l'énoncé choisissons de plus $b \leq \bigwedge P$. Il suffit de montrer que $\nu(C) \leq \sum_k \nu(C_k)$.

L'ensemble $[b, a]$ est compact, on applique le théorème 1: Il existe une mesure σ-additive μ sur $[b, a]$ telle que pour tout $x \in [b, a]$ on a $\mu([b, x]) = f(x) = \nu(C_-(x))$. On a $\nu(C) = \mu(C \cap [b, a])$. On pose $C' = C \backslash S$, on voit que $C' \in \mathscr{A}$, $C' \subset [b, a]$ et $\nu(C) \leq \nu(C') + \varepsilon$. D'autre part, $C' = \bigcup_k (C_k \backslash S)$ (union disjointe) d'où $\mu(C') = \sum_k \mu(C_k \backslash S)$. Enfin, comme $\mu(C_k \backslash S) = \nu(C_k \backslash S) \leq \nu(C_k)$, on obtient $\mu(C') \leq \sum_k \nu(C_k)$, d'où $\nu(C) \leq \sum \nu(C_k) + \varepsilon$, ceci pour tout $\varepsilon > 0$ ce qui démontre le résultat. $\square$

Remarques. Le théorème 3 reste vrai en remplacant dans la propriété (1) l'hypothèse '$S \in \mathscr{A}$' par '$\mathscr{S}$ est réunion dénombrable d'éléments de $\mathscr{A}$', mais la démonstration est bien plus longue.

Bibliographie

1. A. Revuz, *Fonctions croissantes et mesures sur les espaces topologiques ordonnés,* Ann. Inst. Fourier **6** (1955, 1956), 187, 269.

276, rue des Glycines, 45160 Olivet, France