

LES TRANSFORMATIONS DE CREMONA STELLAIRES

IVAN PAN

(Communicated by Michael Stillman)

RÉSUMÉ. On construit explicitement toutes les transformations de Cremona de \mathbf{P}^n qui satisfont à la propriété suivante: il existe $P_1, P_2 \in \mathbf{P}^n$ tels que les droites par P_1 sont envoyées sur les droites par P_2 . On caractérise de plusieurs manières ces transformations et pour chaque entier non-négatif d on donne des formules pour la dimension de l'ensemble constitué de celles qui ont degré d .

ABSTRACT. We construct the Cremona transformations of \mathbf{P}^n satisfying the following property: there exist $P_1, P_2 \in \mathbf{P}^n$ such that the image of all straight lines through P_1 are straight lines through P_2 . We characterise these transformations, and for all non-negative integer d we give a formula for the dimension of the set of those whose degree is d .

1. INTRODUCTION

Tout au long de ce travail, k désignera un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, $A := k[x_0, \dots, x_n]$ l'anneau des polynômes à $(n+1)$ variables sur k et pour d entier non-négatif, A_d le sous-espace vectoriel des polynômes homogènes de degré d (bien sûr $A_0 = k$ et $A_l = 0$ si $l < 0$).

Soit $t = (t_1, \dots, t_n) \in (k[x_1, \dots, x_n]_r)^n$ avec $r \geq 1$ et $\text{pgcd}(t_1, \dots, t_n) = 1$. Pour $d \geq r$ on se donne $q \in A_{d-r}$, $g \in A_d$ avec $\text{pgcd}(q, g) = 1$ et on définit

$$T_{g,q,t} : \mathbf{P}^n \dashrightarrow \mathbf{P}^n$$

par

$$T_{g,q,t} = [g, qt_1, \dots, qt_n].$$

Dans ce travail on montre que $T_{g,q,t}$ est de Cremona si et seulement si

(i) $\bar{T} := [t_1, \dots, t_n] : \mathbf{P}^{n-1} \dashrightarrow \mathbf{P}^{n-1}$ est de Cremona, et

(ii) $m_O(g) \geq d-1$ et $m_O(g) + m_O(q) \in \{2d-r-2, 2d-r-1\}$,

où $m_O(f)$ indique l'ordre d'annulation de f en O ; pour $n=2$ le cas où $t = id$ correspond aux transformations de de Jonquières (voir [7] et [4]). On caractérise de plusieurs manières ces transformations et en particulier on montre que l'ensemble des transformations $T_{g,q,t}$ est, à changements de variables à la source et au but près, l'ensemble des transformations de Cremona pour lesquelles il existe $P_1, P_2 \in \mathbf{P}^n$ tels que l'espace des droites par P_1 s'envoient birationnellement sur l'espace des droites

Received by the editors July 20, 1999.

1991 *Mathematics Subject Classification*. Primary 14E07, 14N99.

Key words and phrases. Transformation de Cremona, stellaire.

Au moment de la rédaction de ce travail, l'auteur était attaché à l'Instituto de Matemática-UFRGS en qualité de boursier du CNPq-Brésil.

par P_2 ; on appelle *stellaires* ces dernières. Finalement, on donne des formules pour la dimension de l'ensemble des transformations stellaires de degré d .

J'aimerais remercier Thierry Vust pour son aide dans la redaction de ce travail, sans laquelle elle ne se serait jamais achevée.

2. LES TRANSFORMATIONS STELLAIRES

Définition 2.1. Soit $F : \mathbf{P}^n \dashrightarrow \mathbf{P}^n$ une transformation de Cremona. On dit que F est stellaire s'il existe $P_1, P_2 \in \mathbf{P}^n$ et $\bar{F} : \mathbf{P}(k^{n+1}/P_1) \dashrightarrow \mathbf{P}(k^{n+1}/P_2)$ birationnelle tels que

$$\bar{F} \circ \pi_1 = \pi_2 \circ F$$

où $\pi_i : \mathbf{P}(k^{n+1}) = \mathbf{P}^n \dashrightarrow \mathbf{P}(k^{n+1}/P_i)$ est la projection de centre P_i .

Introduisant l'étoile de P_i , à savoir la sous-variété $Et(P_i)$ de la grassmannienne des droites de \mathbf{P}^n constituée des droites passant par P_i , on voit que F est stellaire si et seulement si F induit une application birationnelle $Et(F) : Et(P_1) \dashrightarrow Et(P_2)$.

On considère l'éclatement $\sigma_i : Bl_{P_i}(\mathbf{P}^n) \dashrightarrow \mathbf{P}^n$ de P_i dans \mathbf{P}^n ; alors $\rho_i := \pi_i \circ \sigma_i$ est un morphisme qui présente $Bl_{P_i}(\mathbf{P}^n)$ comme fibré en droites projectives sur \mathbf{P}^{n-1} : c'est $\mathbf{P}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}})$. On note $\hat{F} : Bl_{P_1}(\mathbf{P}^n) \dashrightarrow Bl_{P_2}(\mathbf{P}^n)$ l'application birationnelle telle que $\sigma_2 \circ \hat{F} = F \circ \sigma_1$. Alors F est stellaire si et seulement s'il existe une application birationnelle $\bar{F} : \mathbf{P}(k^{n+1}/P_1) \dashrightarrow \mathbf{P}(k^{n+1}/P_2)$ telle que

$$\rho_2 \circ \hat{F} = \bar{F} \circ \rho_1.$$

Un couple (P_1, P_2) comme dans la définition ci-dessus s'appelle un centre pour la transformation stellaire F ; (P_2, P_1) est un centre pour F^{-1} . On dira aussi que P_1 est un sommet pour F et P_2 un sommet pour F^{-1} .

Exemple 2.1. Un automorphisme F de \mathbf{P}^n est une transformation stellaire de centre $(P, F(P))$ pour tout $P \in \mathbf{P}^n$.

Exemple 2.2. La transformation de Cremona de \mathbf{P}^n

$$F_n = [x_1 \cdots x_n, x_0 x_2 \cdots x_n, \dots, x_0 \cdots x_{n-1}] = \left[\frac{1}{x_0}, \dots, \frac{1}{x_n} \right]$$

est stellaire de centre (O_i, O_i) , $i = 0, 1, \dots, n$, où $O_i := [0, \dots, 1, \dots, 0]$.

On note $\mathbf{St}(\mathbf{P}^n)$ (resp. $\mathbf{St}_O(\mathbf{P}^n)$) l'ensemble des transformations stellaires de \mathbf{P}^n (resp. de centre (O, O) où $O = [1, 0, \dots, 0]$). Le groupe $PGL(n+1) \times PGL(n+1)$ opère dans $\mathbf{St}(\mathbf{P}^n)$ par composition à la source et au but; de plus

$$\mathbf{St}(\mathbf{P}^n) = (PGL(n+1) \times PGL(n+1)) \cdot \mathbf{St}_O(\mathbf{P}^n)$$

et $\mathbf{St}_O(\mathbf{P}^n)$ est un sous-groupe du groupe de Cremona $\mathbf{Cr}(\mathbf{P}^n)$ de \mathbf{P}^n .

Proposition 2.1. L'application $F \longrightarrow \bar{F}$ induit une suite exacte scindée

$$1 \rightarrow PGL(2, k(y_1, \dots, y_{n-1})) \hookrightarrow \mathbf{St}_O(\mathbf{P}^n) \longrightarrow \mathbf{Cr}(\mathbf{P}^{n-1}) \rightarrow 1.$$

Preuve. On a la version "locale" suivante: l'application $F : k^n \dashrightarrow k^n$ est stellaire de centre (O, O) si et seulement s'il existe $\bar{F} : k^{n-1} \dashrightarrow k^{n-1}$ birationnelle tel que le diagramme

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} k^{n-1} \times k & \xrightarrow{\quad F \quad} & k^{n-1} \times k \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ k^{n-1} & \xrightarrow{\quad \bar{F} \quad} & k^{n-1} \end{array}$$

commute. Il s'ensuit aussitôt que la suite de l'énoncé est exacte; elle est scindée par

$$\bar{F} \longmapsto [(y, z) \mapsto (\bar{F}(y), z)], \quad y \in k^{n-1}, z \in k. \quad \square$$

Voici encore une description géométrique des transformations stellaires.

Soit $\bar{T} : \mathbf{P}^{n-1} \dashrightarrow \mathbf{P}^{n-1}$ et $T : \mathbf{P}^n \dashrightarrow \mathbf{P}^n$ deux applications rationnelles telles que $\pi \circ T = \bar{T} \circ \pi$ où $\pi : \mathbf{P}^n \dashrightarrow \mathbf{P}^{n-1}$ est la projection de centre O

$$[x_0, x_1, \dots, x_n] \longmapsto [x_1, \dots, x_n].$$

Si $\bar{T} = [t_1, \dots, t_n]$ où $t_i \in k[x_1, \dots, x_n]_r$ avec $\text{pgcd}(t_1, \dots, t_n) = 1$, il existe $g \in A_d, q \in A_{d-r}$ avec $\text{pgcd}(q, g) = 1$, qui sont uniques à multiplication par un scalaire non-nul près, tels que

$$T_{g,q,t} := T = [g, qt_1, \dots, qt_n].$$

Remarque 2.1. Dans la preuve du résultat principal de [6] on montre que si $n > 2$, tout ensemble de générateurs de $\mathbf{Cr}(\mathbf{P}^n)$ doit contenir une famille non dénombrable d'éléments de $\mathbf{St}_O(\mathbf{P}^n) \setminus PGL(n+1)$.

Finalement, pour une application rationnelle $F = [f_0, \dots, f_m] : \mathbf{P}^n \dashrightarrow \mathbf{P}^m$, avec $\text{pgcd}(f_0, \dots, f_m) = 1$, on note $B(F)$ le schéma de base défini par l'idéal (f_0, \dots, f_m) et Λ_F le sous-système linéaire engendré par les f_i : celui-ci est l'ensemble des hypersurfaces d'équations $\sum_{i=0}^m a_i f_i = 0, [a_0, \dots, a_m] \in \mathbf{P}^m$. Si $P \in \mathbf{P}^n$, la multiplicité de Λ_F en P est le nombre entier non-négatif

$$m_P(\Lambda_F) := \min\{m_P(S) : S \in \Lambda_F\},$$

où $m_P(S)$ est la multiplicité de l'hypersurface S en P ; si $S = \{f = 0\}$, ce nombre est l'ordre d'annulation $m_P(f)$ de f en P .

Proposition 2.2. *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

- (1) $T_{g,q,t}$ est birationnelle;
- (2) \bar{T} est birationnelle et $m_O(\Lambda_{T_{g,q,t}}) = d - 1$;
- (3) \bar{T} est birationnelle, $m_O(g) \geq d - 1$ et $m_O(g) + m_O(q) \in \{2d - r - 2, 2d - r - 1\}$.

En particulier, si $n > 2$ et $d > 1$ le point O est un point singulier de $B(T_{g,q,t})$.

Preuve. Notons $\Lambda := \Lambda_{T_{g,q,t}}$.

(1 \iff 2) Au dehors de $\{g = q = 0\} \cup \{g = t_1 = \dots = t_n = 0\}$, l'intersection de n éléments génériques dans Λ est l'intersection d'une hypersurface générique dans Λ avec l'intersection de $n - 1$ hypersurfaces dans \mathbf{P}^n de la forme $\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i t_i = 0$ en dehors de $\{t_1 = \dots = t_n = 0\}$; d'où l'assertion.

(2 \iff 3) Observons d'abord que $m_O(t_i) = r$ pour tout i . Par définition $m_O(\Lambda) = d - 1$ si et seulement si $m_O(g), m_O(qt_i) \geq d - 1$ et l'un des g, qt_1, \dots, qt_n a multiplicité $d - 1$ en O . L'assertion suit du fait que $m_O(qt_i) = m_O(q) + m_O(t_i)$.

Montrons maintenant la dernière assertion. D'une part si $r = 1$ on montre sans peine que l'idéal (x_1, \dots, x_n) définit un point immergé de $B(T_{g,q,t})$: c'est l'annulateur de q (ici on a utilisé $n > 2$); d'autre part, si $r > 1$ on constate que la matrice jacobienne associée à l'idéal (g, qt_1, \dots, qt_n) a rang ≤ 1 en O . On en déduit l'assertion. □

Le degré commun des f_i dans l'écriture de $F = [f_0, \dots, f_m]$ s'appelle le degré de F , qu'on note $\text{deg}(F)$.

Remarque 2.2. Parmi les hypersurfaces de degré $d > 2$ qui possèdent au moins un point de multiplicité $d - 1$, celles qui n'en possèdent qu'un seul constituent un sous-ensemble dense. On peut donc dire qu'une transformation stellaire "générique" de degré > 2 ne possède qu'un seul sommet.

Exemple 2.3. Les transformations de Cremona à schéma de base lisse et non discret (pour l'existence voir [5] et [1]) ne sont pas stellaires.

Exemple 2.4. Soient $d \geq 1$ et $n \geq 2$. En prenant $r = 1$, on construit des exemples de transformation stellaires de \mathbf{P}^n de degré d .

Le corollaire suivant donne un critère plus calculatoire pour décider sur la bi-rationalité d'un candidat à transformation stellaire. Pour $f \in A_d$ on pose $f = x_0^d f_0 + \dots + x_0 f_{d-1} + f_d$ où $f_i \in k[x_1, \dots, x_n]$.

Corollaire 2.3. *On a les assertions équivalentes suivantes*

- (1) $T_{g,q,t}$ est birationnelle;
- (2) \bar{T} est birationnelle, $g = x_0 q_{d-1} + g_d$, $q = x_0 q_{d-r-1} + q_{d-r}$ et $g_d q_{d-r-1} - g_{d-1} q_{d-r} \neq 0$.

Preuve. Par la proposition, il suffit de démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes

- (1) $g_{d-1} \neq 0$ ou $q_{d-r-1} \neq 0$;
- (2) $g_d q_{d-r-1} - g_{d-1} q_{d-r} \neq 0$.

On montre $(1 \Rightarrow 2)$, car l'autre assertion est évidente.

Supposons par l'absurde

$$(2) \quad g_d q_{d-r-1} = g_{d-1} q_{d-r}.$$

Puisque $q_{d-r-1} = g_{d-1} = 0$ n'est pas possible et $q \neq 0$, on a $q_{d-r-1} \neq 0$; soit

$$q_{d-r-1} = h h'$$

où $h|g_{d-1}$, $h'|q_{d-r}$ (éventuellement $h = 1$ ou $h' = 1$). Posons

$$g_{d-1} = \bar{g}h, \quad q_{d-r} = \bar{q}h'.$$

De l'équation (2) suit

$$g_d = \bar{g}\bar{q}.$$

Donc

$$g = \bar{g}(x_0 h + \bar{q}), \quad q = h'(x_0 h + \bar{q}),$$

ce qui contredit $\text{pgdc}(g, q) = 1$ et démontre l'assertion. □

3. QUELQUES CALCULS DE DIMENSION

On fixe $n \geq 1$. Soient $r \leq d$ et $\mathcal{E} \subset \mathbf{Cr}(\mathbf{P}^{n-1})$ un sous-ensemble constructible constitué de transformations de degré r (i.e. $\mathcal{E} \subset \mathbf{P}(k[x_1, \dots, x_n]_r^n)$). On note

$$\mathbf{St}_O(\mathcal{E})_d := \{F \in \mathbf{St}_O(\mathbf{P}^n) : \text{deg}(F) = d, \bar{F} \in \mathcal{E}\},$$

$$\mathbf{St}(\mathcal{E})_d := (PGL(n+1) \times PGL(n+1)) \cdot \mathbf{St}_O(\mathcal{E})_d;$$

observer que dans le cas où $r = 1$ et $\emptyset \neq \mathcal{E} \subset PGL(n)$ on a $\mathbf{St}(\mathcal{E})_d = \mathbf{St}(PGL(n))_d$.

Pour $d = 1$, on a $r = 1$ et alors, $\mathcal{E} \subset PGL(n)$; on voit facilement que si $\mathcal{E} \neq \emptyset$, alors

$$\mathbf{St}(\mathcal{E})_1 = PGL(n+1).$$

On traite à continuation le cas où $d \geq 2$.

Considérons la fonction polynomiale

$$p : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$$

donnée par

$$p(x, y, z) = \binom{x + y - 1}{y} + \binom{x + y - 2}{y - 1} + \binom{x + y - z - 1}{y - z} + \binom{x + y - z - 2}{y - z - 1} - 2,$$

où \mathbf{Z} est l'ensemble des nombres entiers. On a

Proposition 3.1. *Soit $d > 2$. Si \mathcal{E} est irréductible, alors $\mathbf{St}(\mathcal{E})_d$ est un sous-ensemble constructible et irréductible d'une variété quasi-projective tel que*

$$\dim \mathbf{St}(\mathcal{E})_d = \begin{cases} \dim \mathcal{E} + p(n, d, r) + 2n + 1 & \text{si } r > 1, \\ \dim PGL(n) + p(n, d, r) + 2n + 1 & \text{si } r = 1. \end{cases}$$

Preuve. Considérons les sous-ensembles

$$U_{d,r}^2 := \{(g, q) \in A_d \times A_{d-r} : \text{pgcd}(g, q) = 1\},$$

$$U_r^n := \{(t_1, \dots, t_n) \in k[x_1, \dots, x_n]_r^n : \text{pgcd}(t_1, \dots, t_n) = 1\}.$$

L'application $((g, q), (t_1, \dots, t_n)) \mapsto (g, qt_1, \dots, qt_n)$ induit un morphisme injectif

$$\phi : U_{d,r}^2 \times U_r^n / (k^*)^2 \longrightarrow \mathbf{P}(k[x_0, \dots, x_n]_d^n)$$

où $(k^*)^2$ opère par $(a, b) \cdot (g, q, t) \mapsto (abg, aq, bt)$; l'image de ϕ contient les éléments de degré d dans $\mathbf{St}_O(\mathbf{P}^n)$. De la proposition 2.2 on déduit que $\mathbf{St}_O(\mathcal{E})_d$ est irréductible et

$$\dim \mathbf{St}_O(\mathcal{E})_d = \dim \mathcal{E} + 1 + p(n, d, r).$$

Par ailleurs, observer que $\mathbf{St}(\mathcal{E})_d$ est la réunion des sous-ensembles constitués des transformations stellaires qui ont centre (P_1, P_2) pour $P_1, P_2 \in \mathbf{P}^n$; de plus, observer que les points génériques de ces sous-ensembles ne coïncident pas. On en déduit le résultat. \square

Remarque 3.1. En fait on peut montrer que si $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subset \mathbf{Cr}(\mathbf{P}^{n-1})$ sont constitués par des éléments de degrés r_1, r_2 avec $r_1 \neq r_2$, alors $\mathbf{St}(\mathcal{E}_1)_d \cap \mathbf{St}(\mathcal{E}_2)_d = \emptyset$, donc la proposition fournit une façon de calculer la dimension de l'ensemble des transformations stellaires de degré $d > 2$.

Exemple 3.1. Dans le cas où $\emptyset \neq \mathcal{E} \subset PGL(n)$, $\dim \mathbf{St}(PGL(n))_d$ vaut

$$n(n+2) + \frac{(n+d-3)!}{(d-2)!(n-1)!} \left[\frac{n^2 + (4d-3)n + 2(2d^2 - 4d + 1)}{d(d-1)} \right];$$

et donc on a aussi

$$\dim \mathbf{St}(PGL(n))_d \approx 4 \prod_{l=0}^{d-3} \frac{l+n}{l+1}.$$

Comme cas particulier on en déduit une preuve du fait: $\dim \mathbf{Cr}(\mathbf{P}^n) = \infty$ si $n \geq 2$.

Exemple 3.2. Dans le cas des transformations stellaires de degré 2, on ne peut pas assurer l'unicité (générique) du sommet. Par exemple on sait (voir [2] ou encore [4]) qu'une transformation quadratique générique dans le plan est dans l'orbite de l'application F_2 de l'exemple 2.2.

Commentaires finals. Pour $n > 2$ et $r = 1$ on peut montrer l'unicité du centre sans aucune hypothèse de généricité: une telle transformation F avec centre (P_1, P_2) et (P'_1, P'_2) doit vérifier qu'il existe $q_1, q'_1 \in A_{d-1}$ tel que

$$\Lambda_F \supset \mathbf{P}(q_1 V_1) \cup \mathbf{P}(q'_1 V'_1),$$

avec $V_1, V'_1 \subset A_1$ désignant les sous-espaces des formes s'annulant en P_1 et P'_1 respectivement. Avec des arguments de divisibilité on montre qu'alors $q'_1/q_1 \in k \setminus \{0\}$ et $P_1 = P'_1$; le même argument vaut pour F^{-1} .

REFERENCES

- [1] L. Ein and N. Shepherd-Barron (1989): Some Special Cremona transformations. *American Journal of Mathematics*, 111, pages 783-800. MR **90j**:14015
- [2] L. Godeaux (): Géométrie algébrique I. Transformations birationnelles et géométrie hyperespatiale. *Massons & Cie, Editeurs, Paris*
- [3] J. Harris (1992): Algebraic Geometry. *Springer Verlag*. MR **93j**:14001
- [4] H.P. Hudson (1927): Cremona transformation in Plane and Space. *Cambridge at the University Press*.
- [5] B.Crauder and S.Katz (1989): Cremona Transformations with smooth irreducible fundamental locus. *American Journal of Mathematics* 111, 289-307. MR **90b**:14012
- [6] I. Pan (1999): Une remarque sur la génération du groupe de Cremona, *Bol. Soc. Bras. Mat., Vol. 30, N.1, 95-98* MR **2000b**:14015
- [7] J.G. Semple and L. Roth (1949): Introduction to Algebraic Geometry. *Oxford at the Clarendon Press, Amen House, London E.C.M.* MR **11**:535d

INSTITUTO DE MATEMÁTICA-UFRGS, AV. BENTO GONÇALVES 9500, 91540-000 PORTO ALEGRE/RS, BRASIL

E-mail address: pan@mat.ufrgs.br