PROCEEDINGS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 131, Number 2, Pages 637–645
S 0002-9939(02)06533-4
Article electronically published on June 3, 2002

CATÉGORIE DE LUSTERNIK-SCHNIRELMANN ET GENRE DES H_0-ESPACES

M. CRISTINA COSTOYA-RAMOS

(Communicated by Paul Goerss)

ABSTRACT. Soit X un espace ayant le type d'homotopie rationnelle d'un produit de sphères impaires. Si, pour tout nombre premier p, la LS-catégorie de tous les p-localisés de X est majorée par n, nous montrons que la LS-catégorie de X est majorée par $n+1$. Si Y est un élément dans le genre de Mislin de X, nous en déduisons: $|\mathrm{cat}(Y) - \mathrm{cat}(X)| \leq 1$. Dans le cas d'un H-espace X de rang 2, nous avons exactement $\mathrm{cat}(X) = \mathrm{cat}(Y)$, pour tout espace Y dans le genre de X.

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'existence de relations entre la LS-catégorie de X, $\mathrm{cat}(X)$, et celle de ses p-localisés, $\mathrm{cat}(X_{(p)})$ pour tout nombre premier p. G. H. Toomer a établi un premier résultat dans cette direction en montrant $\mathrm{cat}(X_{(p)}) \leq \mathrm{cat}(X)$, pour tout espace simplement connexe X. Cette propriété n'est pas conservée dans la classe des espaces nilpotents; un contre-exemple est donné par $\mathrm{cat}(S^1) = 1$, $\mathrm{cat}(K(\mathbb{Q}, 1)) = 2$. Au vu du résultat de Toomer, arrive naturellement la question suivante, pour un espace simplement connexe X:

($\mathcal{Q}_1$) *Si pour tout nombre premier p, on a* $\mathrm{cat}(X_{(p)}) \leq n$*, peut-on en déduire* $\mathrm{cat}(X) \leq n$*?*

J. Roitberg répond négativement à cette question en construisant [Roi00] un espace infini, X, vérifiant $\mathrm{cat}(X) = 2$ et $\mathrm{cat}(X_{(p)}) = 1$, pour tout nombre premier p. La question ($\mathcal{Q}_1$) est toujours ouverte pour les espaces finis.

Pour éviter la situation de l'exemple de Roitberg et celle du cercle S^1, nous ne considérons désormais que des *espaces simplement connexes ayant le type d'homotopie de CW-complexes finis,* que nous désignons simplement par *espaces.* Pour ces espaces, Cornea [Cor95] obtient une majoration de $\mathrm{cat}(X)$ en fonction des $\mathrm{cat}(X_{(p)})$: si $\mathrm{cat}(X_{(p)})$ est majorée par n, pour tout nombre premier p, alors $\mathrm{cat}(X) \leq 2n$.

Une deuxième question en relation avec ($\mathcal{Q}_1$) concerne le genre de Mislin de X, $\mathcal{G}(X)$, défini comme l'ensemble des types d'homotopie d'espaces p-équivalents à X pour tout nombre premier p. Une propriété homotopique de X est dite *générique* si elle est partagée par tous les éléments de $\mathcal{G}(X)$. Dans [McG94], C. McGibbon pose la question de savoir si la catégorie de Lusternik-Schnirelmann est une propriété générique, i.e.:

($\mathcal{Q}_2$) *A-t-on* $\mathrm{cat}(X) = \mathrm{cat}(Y)$ *pour tout espace Y dans le genre de X?*

Received by the editors June 11, 2001 and, in revised form, September 11, 2001.
2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 55M30, 55P60, 55P62.
Key words and phrases. Lusternik-Schnirelmann category, Mislin genus, H-space.

L'exemple déjà cité de J. Roitberg est une réponse négative dans le cadre des espaces infinis. En se limitant aux *espaces*, McGibbon donne une réponse affirmative à $(\mathcal{Q}_2)$ pour les co-H-espaces, i.e. si $\mathrm{cat}(X)=1$, alors $\mathrm{cat}(Y)=1$, pour tout $Y\in\mathcal{G}(X)$.

Remarquons qu'*une réponse affirmative à* $(\mathcal{Q}_1)$ *entraîne une réponse affirmative à* $(\mathcal{Q}_2)$.

Dans cet article, après avoir rappelé les définitions de base, nous étudions la généricité de plusieurs minorants de la catégorie de Lusternik-Schnirelmann. Nous montrons que la réponse est positive (Théorème 1) pour la *catégorie faible* [BH60], la *strict category weight*, [Rud99], [Str99] et la σ^i*-catégorie* [Van00].

Le point principal du travail est l'étude des questions $(\mathcal{Q}_1)$ et $(\mathcal{Q}_2)$ lorsque X est un H_0-espace, c'est-à-dire un espace ayant le type d'homotopie rationnelle d'un produit de sphères impaires. Dans ce cas, nous obtenons (Théorème 2):

– pour $(\mathcal{Q}_1)$, $\max\{\mathrm{cat}(X_{(p)})\mid p\in\mathcal{P}\}\le\mathrm{cat}(X)\le\max\{\mathrm{cat}(X_{(p)})\mid p\in\mathcal{P}\}+1$;

– pour $(\mathcal{Q}_2)$, $Y\in\mathcal{G}(X)\Rightarrow\mathrm{cat}(Y)\le\mathrm{cat}(X)+1$.

Nous utilisons la caractérisation de la LS-catégorie à l'aide des modèles minimaux [FH82]. Un exemple (Exemple 7) montre qu'il peut y avoir plusieurs sections aux fibrations de Ganea rationalisées d'un produit de sphères impaires, justifiant le fait que la méthode utilisée ne peut donner l'égalité $\mathrm{cat}(X)=\mathrm{cat}(Y)$ mais seulement que la différence entre les deux est d'au plus une unité si $Y\in\mathcal{G}(X)$.

L'on peut également se demander si le résultat obtenu pour un produit de sphères impaires peut se généraliser à tout espace avec une preuve similaire; l'Exemple 6 montre qu'il n'en est rien.

Pour terminer, nous nous intéressons aux H-espaces de rang 2 et nous observons que la LS-catégorie y est générique.

1. Fibrations de Ganea et localisation

Désignons par $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Si X et Y sont des *espaces* et $f\colon X\to Y$ une application, nous notons $X_{(p)}$ le p-localisé de X, $X_{(0)}$ son rationalisé, et $f_{(p)}: X_{(p)}\to Y_{(p)}$ la p-localisation de f.

Pour tout espace X, Ganea [Gan60] construit par récurrence une suite de fibrations $F_nX\xrightarrow{j_n}G_nX\xrightarrow{g_n}X$:

– $F_0X\longrightarrow G_0X\longrightarrow X$ est la fibration des chemins $\Omega X\longrightarrow PX\longrightarrow X$,

– si la fibration $F_{n-1}X\xrightarrow{j_{n-1}}G_{n-1}X\xrightarrow{g_{n-1}}X$ est donnée, on considère l'application $g'_n\colon G_{n-1}X\cup_{j_{n-1}}CF_{n-1}\to X$ obtenue à partir de g_{n-1}, en envoyant le cône CF_{n-1} sur le point de base de X. L'application $g_n\colon G_nX\to X$ est la fibration associée à g'_n. Nous notons i^n_{n-1} l'application composée: $G_{n-1}(X)\hookrightarrow G_{n-1}X\cup_{j_{n-1}}CF_{n-1}\xrightarrow{\simeq}G_nX$.

Nous considérons également le *fat wedge* de X défini par:

$$T^nX=\left\{(x_1,\ldots,x_{n+1})\in X^{n+1}\mid \text{il existe } i \text{ avec } x_i=*\right\}.$$

Définition 1 ([Gan60], [Whi78])**.** La *LS-catégorie de* X*,* $\mathrm{cat}(X)$, est le plus petit entier $n\in\mathbb{N}$ pour lequel l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée:

1) la fibration $g_n\colon G_nX\to X$ admet une section;

2) l'application diagonale $\Delta_n\colon X\to X^{n+1}$ se factorise, à homotopie près, à travers T^nX.

Explicitons la question $(\mathcal{Q}_2)$ dans le contexte des fibrations de Ganea:

– La donnée d'une section $\sigma : X \to G_nX$ de g_n, implique celle d'une famille de sections $\{\sigma_{(p)} \mid p \in \mathcal{P}\}$ de $\{g_n(X_{(p)})\colon G_n(X_{(p)}) \simeq (G_nX)_{(p)} \to X_{(p)} \mid p \in \mathcal{P}\}$.

– Réciproquement, la donnée d'une famille de sections $\{\sigma_p \mid p \in \mathcal{P}\}$ de la famille de fibrations $\{g_n(X_{(p)})\colon G_n(X_{(p)}) \simeq (G_nX)_{(p)} \to X_{(p)} \mid p \in \mathcal{P}\}$ ne permet pas de construire une section de g_n. Il faut pour cela avoir une compatibilité rationnelle des sections:

si $(\sigma_p)_{(0)} \simeq (\sigma_q)_{(0)}$ pour tout couple de nombres premiers (p, q), alors il existe une section σ de g_n ayant pour p-localisé σ_p pour tout $p \in \mathcal{P}$, [Cor95].

Remarquons qu'un CW-complexe à deux cellules, non contractile, est de catégorie 1 ou 2. La propriété d'être de catégorie 1 étant générique [McG94], on en déduit immédiatement:

Proposition 2. *Dans la catégorie des espaces ayant le type d'homotopie d'un CW-complexe à deux cellules, la LS-catégorie est générique.*

2. Généricité de bornes inférieures de la catégorie

W. J. Gilbert démontre l'équivalence entre les deux conditions de la Définition 1 en faisant apparaître G_nX comme un produit fibré homotopique de $T^n(X) \hookrightarrow X^{n+1} \leftarrow X$. Complétons ce produit fibré homotopique en explicitant les cofibres:

$$\begin{array}{ccc}
G_nX & \longrightarrow & T^nX \\
\downarrow{\scriptstyle g_n} & & \downarrow{\scriptstyle j_n} \\
X & \xrightarrow{\Delta_n} & X^{n+1} \\
\downarrow{\scriptstyle \rho_n} & & \downarrow{\scriptstyle q_{n+1}} \\
\mathcal{C}_nX & \xrightarrow{c_n} & X^{[n+1]}
\end{array}$$

$\mathcal{C}_nX$ (resp. $X^{[n+1]}$) est la cofibre de g_n (resp. j_n); $\overline{\Delta}_n := q_{n+1} \circ \Delta_n$ est la diagonale réduite.

Définition 3. Soit X un *espace*.

1) *La catégorie faible de* X, $\mathrm{wcat}(X)$, est le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ pour lequel la diagonale réduite $\overline{\Delta}_n$ est homotopiquement triviale, [BH60].

2) *La* σ^i*-catégorie de* X, $\sigma^i\mathrm{cat}(X)$, est le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que l'application $\Sigma^{i-1}X \stackrel{\Sigma^{i-1}\rho_n}{\to} \Sigma^{i-1}\mathcal{C}_nX$ soit homotopiquement triviale, [Van00].

3) *La strict category weight de* X, $\mathrm{cat}(X)$, est la borne inférieure des $\sigma^i\mathrm{cat}X$, pour $i \in \mathbb{N}$, [Rud99], [Str99].

Soit Υ l'un des trois invariants mentionnés ci-dessus:

Théorème 1. *Soit X un espace tel que $\Upsilon(X_{(p)}) \leq n$, pour tout nombre premier p, alors on a: $\Upsilon(X) \leq n$.*

Démonstration. Pour 1) et 2), notons Ψ l'application intervenant dans la définition de Υ. Le résultat découle de [HMR75, Théorème 5.6]:

$$\Psi \simeq * \text{ ssi } \Psi_{(p)} \simeq *, \text{ pour tout nombre premier } p,$$

et du fait que: $(G_nX)_{(p)} \simeq G_n(X_{(p)})$, $(T^nX)_{(p)} \simeq T^n(X_{(p)})$. La propriété 3) est une conséquence de 2). $\square$

On en déduit directement:

Corollaire 4. *Les invariants homotopiques* Υ *sont génériques, i.e.: si* $Y \in \mathcal{G}(X)$ *alors* $\Upsilon(X) = \Upsilon(Y)$.

3. LS-catégorie d'un H-espace rationnel

Théorème 2. *Si* X *est un espace ayant le type d'homotopie rationnelle d'un produit de sphères impaires, on a:*
1) $\max\{\mathrm{cat}(X_{(p)}) \mid p \in \mathcal{P}\} \leq \mathrm{cat}(X) \leq \max\{\mathrm{cat}(X_{(p)}) \mid p \in \mathcal{P}\} + 1$.
2) $Y \in \mathcal{G}(X) \Rightarrow \mathrm{cat}(Y) \leq \mathrm{cat}(X) + 1$.

Le résultat provient d'une étude des sections des fibrations de Ganea rationalisées:

Proposition 5. *Soit* $T = S^{n_1} \times \cdots \times S^{n_r}$ *un produit de sphères rationnelles de degré impair et soit* $k \geq r$. *Deux sections* σ *et* τ *de la fibration de Ganea* $g_k : G_kT \longrightarrow T$ *vérifient* $i_k^{k+1} \circ \sigma \simeq i_k^{k+1} \circ \tau$, *où* $i_k^{k+1} : G_kT \longrightarrow G_{k+1}T$ *est l'application définie dans la Section 1.*

Démonstration. Nous utilisons le modèle minimal de Sullivan pour déterminer la catégorie d'un espace rationnel, renvoyant le lecteur à [FH82], [Fél89], [FHT01].

Soit $(\Lambda V, d)$ le modèle minimal de T et soit Z_j un espace rationnel du même type d'homotopie que l'adgc (pour algèbre différentielle graduée commutative) $(\Lambda V/\Lambda^{>j}V, \overline{d})$. D'après Y. Félix [Fél89, Théorème 4.1.1, Théorème 4.1.2], on a un diagramme commutatif à homotopie près:

$$\begin{tikzcd}
G_jT \arrow[r, "i_j^{j+1}"] \arrow[d, "\psi_j"'] & G_{j+1}T \arrow[d, "\psi_{j+1}"] \\
Z_j \vee (\bigvee_{\alpha\in I_j} S^\alpha) \arrow[r, "\rho_j"'] \arrow[d, "p_j"'] & Z_{j+1} \vee (\bigvee_{\alpha\in I_{j+1}} S^\alpha) \arrow[d, "p_{j+1}"'] \\
T \arrow[r, equal] & T
\end{tikzcd}$$

où les flèches ψ_j sont des équivalences faibles et la composée $p_j \circ \psi_j$ est homotope à la fibration de Ganea g_j. L'application ρ_j est définie par:
– sa restriction à Z_j a pour modèle la surjection canonique

$$(\Lambda V/\Lambda^{>j+1}V, \overline{d}) \to (\Lambda V/\Lambda^{>j}V, \overline{d});$$

– sa restriction au bouquet de sphères est l'application constante sur le point de base.

L'application p_j est définie par:
– sa restriction à Z_j a pour modèle la surjection canonique

$$(\Lambda V, d) \to (\Lambda V/\Lambda^{>j+1}V, \overline{d});$$

– sa restriction au bouquet de sphères est l'application constante.

Si $k \geq r$, on constate que $\Lambda V/\Lambda^{>k}V = \Lambda V$ donc T et Z_k ont même type d'homotopie et la composée: $G_kT \xrightarrow{\psi_k} T \vee (\bigvee_{\alpha\in I_k} S^\alpha) \xrightarrow{id_T \vee *} T$ est homotope à g_k. Le diagramme ci-dessus devient le diagramme homotopiquement commutatif suivant, dans lequel nous considérons l'inclusion canonique $\iota_T : T \longrightarrow T \vee (\bigvee_{\alpha \in I_{k+1}} S^\alpha)$:

$$\begin{tikzcd}
G_kT \arrow[rr, "i_k^{k+1}"] \arrow[dr, "\psi_k"] \arrow[dd, "g_k"] & & G_{k+1}T \arrow[dr, "\psi_{k+1}"] \arrow[dd, "g_{k+1}"] & \\
& T \vee (\bigvee_{\alpha \in I_k} S^\alpha) \arrow[rr, "\rho_k \simeq id_T \vee *"] \arrow[dl, "p_k \simeq id_T \underline{\vee} *"] & & T \vee (\bigvee_{\alpha \in I_{k+1}} S^\alpha) \arrow[dl, "id_T \underline{\vee} *"'] \\
T \arrow[uu, dotted, bend left, "\sigma"] \arrow[uu, dotted, bend left=15, "\tau"'] \arrow[rr, equal] & & T \arrow[ur, bend right, "\iota_T"'] &
\end{tikzcd}$$

Soit σ et τ deux sections de g_k. L'application ρ_k se factorisant à travers p_k, i.e. $\rho_k \simeq \iota_T \circ p_k$, on a: $\psi_{k+1} \circ i_k^{k+1} \circ \sigma \simeq \iota_T \simeq \psi_{k+1} \circ i_k^{k+1} \circ \tau$. L'application ψ_{k+1} étant une équivalence faible, on en déduit: $i_k^{k+1} \circ \sigma \simeq i_k^{k+1} \circ \tau$. $\square$

Démonstration du Théorème 2. Si σ est une section de g_k, alors $\sigma_{(p)}$ est une section de $(g_k)_{(p)}$, d'où $\mathrm{cat}(X_{(p)}) \leq \mathrm{cat}(X)$ pour tout p. La première inégalité, due à Toomer [Too75], est donc redémontrée.

Pour la deuxième inégalité, notons $n_p = \mathrm{cat}(X_{(p)})$ et choisissons une section arbitraire de $(g_{n_p})_{(p)}$, $\sigma_{n_p} : X_{(p)} \to G_{n_p}X_{(p)}$ pour chaque nombre premier p. La catégorie de X étant finie, la borne supérieure des nombres $\mathrm{cat}(X_{(p)})$, p premier, est atteinte pour un nombre l premier.

Définissons $\phi^p : G_{n_p}X \to G_{n_l}X$ par:

$$\begin{cases} i_{n_l-1}^{n_l} \circ \cdots \circ i_{n_p}^{n_p+1} : G_{n_p}X \to G_{n_l}X & \text{si } n_l \neq n_p, \\ id_{G_{n_l}X} & \text{si } n_l = n_p. \end{cases}$$

Pour tout nombre premier p, on construit une section de $(g_{n_l+1})_{(p)} : G_{n_l+1}X_{(p)} \to X_{(p)}$ par $\overline{\sigma_p} := (i_{n_l}^{n_l+1})_{(p)} \circ (\phi^p)_{(p)} \circ \sigma_{n_p} : X_{(p)} \to G_{n_l+1}X_{(p)}$. La proposition précédente implique $(\overline{\sigma_p})_{(0)} \simeq (\overline{\sigma_q})_{(0)}$ pour tout couple (p, q) de nombres premiers. La condition de compatibilité rationnelle est vérifiée, donc: $\mathrm{cat}(X) \leq n_l + 1 = max\{\mathrm{cat}(X_{(p)}) \mid p \in \mathcal{P}\} + 1$.

Comme on l'a déjà remarqué, la propriété 2) est une conséquence de 1). $\square$

Nous terminons cette section par deux exemples; chacun d'eux utilise les modèles de Quillen en algèbres de Lie différentielles graduées (ldg); nous renvoyons le lecteur à [Tan83], [FHT01] pour leurs définition et principales propriétés. Rappelons que le modèle de Quillen d'un espace X est de la forme $(\mathbb{L}(V), d)$, où:

– $\mathbb{L}(V)$ est l'algèbre de Lie libre sur l'espace vectoriel gradué V;

– L'espace vectoriel gradué V_* est isomorphe à $H_{*+1}(X; \mathbb{Q})$;

– La différentielle d est décomposable; c'est-à-dire que $d(v)$ est une combinaison linéaire de crochets. Une fois fixé un isomorphisme entre éléments de V et cellules, la différentielle $d(v)$ est l'application d'attachement de la cellule v;

– $H_*(\mathbb{L}(V), d)$ est isomorphe à l'algèbre de Lie $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$ munie du crochet de Samelson.

Commenons par un exemple établissant que la méthode utilisée pour les H_0-espaces ne se généralise pas au cas d'un espace quelconque. En effet, le point clé de la preuve du Théorème 2 est le fait suivant: dans le cas d'un produit T de sphères rationnelles de degré impair, si σ et τ sont deux sections de $g_k\colon G_kT \to T$, on a: $i_k^{k+1} \circ \sigma \simeq i_k^{k+1} \circ \tau$. Cette propriété n'est pas vraie en général:

Exemple 6. Notons Y la cofibre homotopique de l'application:

$$S^3 \vee S^6 \xrightarrow{\eta + [\iota_2, \iota_5]} S^2 \vee S^5 \,,$$

où η est l'application de Hopf et $[\iota_2, \iota_5]$ le crochet de Whitehead des classes fondamentales de S^2 et S^5 . Cette cofibre peut aussi se décrire par: $Y = \mathbb{C}\mathrm{P}^2 \cup_{\mathrm{S}^2} \left(\mathrm{S}^2 \times \mathrm{S}^5\right)$. L'espace Y étant un 2-cône, on a: $\mathrm{cat}(Y) \leq 2$. *La fibration de Ganea g_2 admet deux sections rationnelles $\sigma : Y_{\mathbb{Q}} \to G_2Y_{\mathbb{Q}}$, $\tau : Y_{\mathbb{Q}} \to G_2Y_{\mathbb{Q}}$ telles que $i_2^3 \circ \sigma$ et $i_2^3 \circ \tau$ ne soient pas homotopes.*

Démonstration. Déterminons les modèles de Quillen des applications figurant dans le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
G_2Y \arrow[r, "i_2^3"] \arrow[d, "g_2"'] & G_3Y \arrow[dl, "g_3"] \\
Y \arrow[u, bend left, dotted, "\tau"] \arrow[u, bend right, dotted, "\sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

• La décomposition cellulaire donne le modèle de Quillen de Y: c'est une ldg, $(\mathbb{L}(V), d)$, où l'espace vectoriel rationnel V est engendré par les éléments (x_1, x_3, x_4, x_6), x_i de degré i, de différentielle: $dx_1 = dx_4 = 0$, $dx_3 = [x_1, x_1]$, $dx_6 = [x_1, x_4]$.

• Nous utilisons l'existence d'une section $\sigma\colon Y \to G_2Y$ de g_2 pour construire le modèle de Quillen de G_2Y comme une KQ-extension [Tan83] de $(\mathbb{L}(V), d)$, c'est-à-dire: le modèle de σ est construit comme un monomorphisme canonique de ldg $(\mathbb{L}(V), d) \hookrightarrow (\mathbb{L}(V \oplus W), \delta)$.

Pour connaître W en bas degré, remarquons que la fibre de g_2 a le type d'homotopie du joint itéré $*^3\Omega Y$; son 7-squelette est donc une sphère S^5. En utilisant la suite spectrale de Serre de la fibration associée à g_2, on constate:

$$H_5(G_2Y; \mathbb{Q}) \cong H_5(Y; \mathbb{Q}) \oplus H_5(*^3\Omega Y; \mathbb{Q})\,.$$

L'espace vectoriel W_4, isomorphe à $H_5(*^3\Omega Y; \mathbb{Q})$, est donc de dimension 1; on note b_4 une base de W_4 correspondant à la sphère S^5 de $*^3\Omega Y$. C'est un élément sphérique, donc de différentielle nulle: $\delta(b_4) = 0$.

Remarquons maintenant que l'espace vectoriel des cycles du modèle de G_2Y en dimension 5 contient $[x_1, b_4]$. Le groupe d'homotopie:

$$\pi_5(\Omega(G_2Y)) \otimes \mathbb{Q} \cong (\pi_5(\Omega(Y)) \otimes \mathbb{Q}) \oplus \left(\pi_5(\Omega(*^3\Omega Y)) \otimes \mathbb{Q}\right)$$

étant nul, il existe un élément b_6 dans W tel que $\delta(b_6) = [x_1, b_4]$.

• Construisons maintenant le modèle de Quillen de G_3Y comme cofibre homotopique de $*^3\Omega Y \to G_2Y$. En dimension inférieure à 7, l'homologie de $*^3\Omega Y$ est réduite à celle d'une sphère S^5 dont la classe fondamentale correspond à b_4. La construction classique d'une cofibre en modèle de Quillen donne pour modèle de G_3Y une ldg $(\mathbb{L}(U), \overline{\delta})$ telle que:

en degrés inférieurs à 7, U admet comme base $(x_1, x_3, x_4, x_6, b_6)$ avec la différentielle $\overline{\delta}(x_1) = \overline{\delta}(x_4) = \overline{\delta}(b_6) = 0$, $\overline{\delta}(x_3) = [x_1, x_1]$, $\overline{\delta}(x_6) = [x_1, x_4]$.

• Nous construisons deux sections de g_2 en les définissant au niveau des modèles par:

σ est l'injection canonique $(\mathbb{L}(V), d) \hookrightarrow (\mathbb{L}(V \oplus W), \delta)$;

$\tau(x_1) = x_1$, $\tau(x_3) = x_3$, $\tau(x_4) = x_4 + b_4$, $\tau(x_6) = x_6 + b_6$.

• Pour conclure, il suffit de remarquer que les applications $i_2^3 \circ \sigma$ et $i_2^3 \circ \tau$, de $(\mathbb{L}(V), d)$ dans $(\mathbb{L}(U), \overline{\delta})$ ne sont pas homotopes car elles ne coïncident pas en homologie:

$$(i_2^3 \circ \sigma)(x_6) = x_6 \neq x_6 + b_6 = (i_2^3 \circ \tau)(x_6)\,.$$

□

Terminons par un exemple exhibant plusieurs classes d'homotopie de sections aux fibrations de Ganea d'un espace rationnel T égal à un produit de sphères impaires. Ceci justifie la composition avec i_k^{k+1} utilisée dans la preuve du Théorème 2.

Exemple 7. Il existe au moins deux classes d'homotopie de sections à la fibration de Ganea g_2 de l'espace rationnel T égal au rationalisé de $S^3 \times S^5$.

Démonstration. Comme précédemment, la preuve se situe au niveau des modèles de Quillen.

• Dans le modèle de Quillen de T, $(\mathbb{L}(V),\, d)$, l'espace vectoriel V admet pour base (x_2, x_4, x_7), avec x_i de degré i et $d(x_2) = d(x_4) = 0$, $d(x_7) = [x_2, x_4]$.

• Avec un argument similaire à celui utilisé dans l'Exemple 6, on construit le modèle de Quillen de G_2T à partir d'un monomorphisme

$$(\mathbb{L}(V), d) \hookrightarrow (\mathbb{L}(V \oplus W), \delta).$$

L'espace vectoriel W n'a pas de générateurs en degrés inférieurs strictement à 7 et W_7 admet pour base un élément b_7 à différentielle nulle.

• Deux sections de $g_2 \colon G_2T \to T$ sont définies par:

σ est l'injection canonique $(\mathbb{L}(V), d) \hookrightarrow (\mathbb{L}(V \oplus W), \delta)$;

$\tau(x_2) = x_2$, $\tau(x_4) = x_4$, $\tau(x_7) = x_7 + b_7$.

Elles ne sont pas homotopes car elles ne coïncident pas en homologie. □

4. H-espaces de rang deux

Exemple 8. La LS-catégorie est générique pour les H-espaces de rang deux.

Démonstration. Les résultats sur les H-espaces de rang 2 utilisés dans cette démonstration proviennent de [MNT73].

• Les H-*espaces* de rang deux ayant un type différent de $(3, 7)$ et $(3, 11)$ ayant un genre trivial, il suffit d'étudier ces deux cas.

• *Les H-espaces de type* $(3, 7)$ *sont classifiés par* $\{E_k \mid k = 0, 1, 3, 4, 5\}$, où E_k est le S^3- fibré principal de base S^7 et d'application classifiante $kw \in \pi_7(BS^3) = \pi_6(S^3) = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, avec ω l'élément de Blakers-Massey. L'espace E_k étant un fibré en sphère de base une sphère, il admet une décomposition cellulaire avec 3 cellules: $E_k = S^3 \cup_{kw} e^7 \cup e^{10}$. Il vérifie donc $\mathrm{cat}(E_k) \leq 3$. Décrivons le genre des E_k:

– Le genre de E_k est trivial pour $k \in \{0, 3, 4\}$.

– Les espaces $E_1 = Sp(2)$ et E_5 ont même genre. Dans [Sch65], Schweitzer montre que $\mathrm{wcat}(Sp(2)) = \mathrm{cat}(Sp(2)) = 3$. Le Définition 1 implique: $3 = \mathrm{cat}(Sp(2)) = \mathrm{wcat}(Sp(2)) = \mathrm{wcat}(E_5) \leq \mathrm{cat}(E_5) \leq 3$.

• *Les H-espaces de type* $(3, 11)$ *sont classifiés par* $\{X_k \mid k \in \mathbb{Z}, -2 \leq k \leq 5\}$. L'espace X_0 est le groupe de Lie exceptionnel $\mathbb{G}_2$, qui peut-être vu comme l'espace total d'un S^3-fibré principal, de base la variété de Stiefel $V_{7,2} = S^5 \cup e^6 \cup e^{11}$; notons $\beta \in [V_{7,2}, BS^3]$ son application classifiante.

La variété de Stiefel est la cofibre d'une application $S^{10} \to S^5 \cup e^6$; notons $c\colon V_{7,2} \to V_{7,2} \vee S^{11}$ la co-opération de Puppe de cette cofibration. Les espaces X_k sont les S^3-fibrés principaux d'application classifiante:

$$V_{7,2} \xrightarrow{c} V_{7,2} \vee S^{11} \xrightarrow{\beta \vee k\alpha} BS^3$$

où α est le générateur de $\pi_{11}(BS^3) = \pi_{10}(S^3) = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$. Décrivons le genre des espaces X_k:

– Le genre de X_k est trivial pour $k = -2$ et $k = 3$;
– $\mathcal{G}(X_1) = \{X_1,\ X_4\}$;
– $\mathcal{G}(\mathbb{G}_2) = \{X_{-1}\,,\ \mathbb{G}_2\,,\ X_2\,,\ X_5\}$.

Nous allons maintenant montrer que $\mathrm{cat}(X_k) = 4$ *pour tout* k, $-2 \leq k \leq 5$, *ce qui terminera la preuve.* Nous rappelons que tous les espaces X_k admettent la décomposition cellulaire suivante : $X_k = S^3 \cup e^5 \cup e^6 \cup e^8 \cup e^9 \cup e^{11} \cup e^{14}$.

D'une part, la LS-catégorie d'un espace X est majorée par le quotient $\dim(X)/(r+1)$, où r est la connectivité de X. Dans notre cas, on a: $\mathrm{cat}(X_k) \leq 4$.

D'autre part, la LS-catégorie est minorée par la longueur maximale du cup-produit de l'algèbre de cohomologie. Ici, cette longueur vaut 4, comme le montre l'isomorphisme: $\widetilde{H}^*(X_k\,;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[x_3]/[x_3^4] \otimes \Lambda(x_5)$ [MNT73, Théorème 2.1]. On a donc $\mathrm{cat}(X_k) = 4$ comme annoncé. □

Remerciements

Je remercie Daniel Tanré pour l'attention qu'il a portée à ce travail, et pour son aide lors de la rédaction. Je remercie également Yves Félix qui m'a signalé l'Exemple 6.

References

[BH60] I. Berstein and P. J. Hilton, *Category and generalized Hopf invariants*, Illinois J. Math. **4** (1960), 437–451. MR **23:**A3572

[Cor95] O. Cornea, *Lusternik-Schnirelmann categorical sections*, Ann. Sci. Ec. Norm. Super. **28** (1995), 689–704. MR **96h:**55008

[Fél89] Y. Félix, *La dichotomie elliptique-hyperbolique en homotopie rationnelle*, Astérisque, vol. 176, Soc. Math. France, 1989. MR **91c:**55016

[FH82] Y. Félix and S. Halperin, *Rational LS-category and its applications*, Trans. Am. Math. Soc. **273** (1982), 1–37. MR **84h:**55011

[FHT01] Y. Félix, S. Halperin, and J.-C. Thomas, *Rational Homotopy Theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 205, Springer-Verlag, New York, 2001. CMP 2001:06

[Gan60] T. Ganea, *Lusternik-Schnirelmann category and cocategory*, Proc. London Math. Soc. **10** (1960), 623–639. MR **23:**A3574

[HMR75] P. Hilton, G. Mislin, and J. Roitberg, *Localization of nilpotent groups and spaces*, Notas de Matemática, vol. 15, North Holland, New York, 1975. MR **57:**17635

[Mar80] Howard J. Marcum, *Fibrations over double mapping cylinders*, Illinois J. Math. **24** (1980), 344–358. MR **81j:**55011

[McG94] Charles A. McGibbon, *The Mislin genus of a space*, The Hilton Symposium 1993 (Montreal, PQ), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 75–102. MR **96a:**55018

[MNT73] M. Mimura, G. Nishida, and H. Toda, *On the classification of H-spaces of rank two*, J. Math. Kyoto Univ. **13** (1973), 611–627. MR **48:**12514

[Roi00] J. Roitberg, *The Lusternik-Schnirelmann category of certain infinite CW-complexes*, Topology **39** (2000), 95–101. MR **2000g:**55012

[Rud99] Y.B. Rudyak, *On category weight and its applications*, Topology **38** (1999), 37–55. MR **99f:**55007

[Sch65] P. Schweitzer, *Secondary cohomology operations induced by the diagonal mapping*, Topology **3** (1965), 337–355. MR **32:**451

[Str99] J. A. Strom, *Essential category weight*, Preprint, 1999.

[Tan83] D. Tanré, *Homotopie Rationnelle: Modèles de Chen, Quillen, Sullivan*, Lecture Notes Series, vol. 1025, Springer-Verlag, 1983. MR **86b:**55010

[Too75] G.H. Toomer, *Topological localization, category and cocategory*, Can. J. Math. **27** (1975), 319–322. MR **51:**6798

[Van00] L. Vandembroucq, *Suspension of Ganea fibrations and a Hopf invariant*, Topology and Its Applns. **105** (2000), 187–200. MR **2001c:**55002

[Whi78] G.W. Whitehead, *Elements of Homotopy Theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 61, Springer-Verlag, New York, 1978. MR **80b:**55001

U.F.R. de Mathématiques, U.M.R. 8524, Université de Lille 1, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France – and – Département de Mathématiques, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, CH-1015 Lausanne, Switzerland

E-mail address: `costoya@gat.univ-lille1.fr`

E-mail address: `costoya@masg1.epfl.ch`