PROCEEDINGS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 131, Number 3, Pages 933–936
S 0002-9939(02)06731-X
Article electronically published on October 15, 2002

UNE PROPRIÉTÉ DE CONTINUITÉ DU TEMPS LOCAL

LUCIEN CHEVALIER

(Communicated by Claudia M. Neuhauser)

ABSTRACT. Let $L^0(M)$ denote the local time (at 0) associated with a martingale M. The aim of this note is to prove that the mapping $M \mapsto L^0(M)$ is continuous from L^1 into weak-L^1.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t))$ un espace probabilisé filtré satisfaisant aux conditions usuelles de la théorie des martingales. Pour $1 \leq p < +\infty$, nous désignons par L^p l'ensemble des processus adaptés X définis sur cet espace et tels que

$$\|X\|_p = \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}^{1/p}(|X_t|^p) < +\infty$$

et par L^1_{f} l'ensemble des processus adaptés X définis sur cet espace et tels que

$$\sup_{t\geq 0}\sup_{\lambda>0} \lambda\mathbb{P}(|X_t| > \lambda) < +\infty\ ,$$

muni de la "norme" associée à cette quantité. Étant donné une martingale locale continue M, nous lui associons sa "transformée de Lévy" $\widetilde{M}$ définie par

$$\widetilde{M}_t = \int_0^t \mathrm{sgn}(M_s)\, dM_s$$

et son temps local en 0, noté $L^0(M)$. On sait depuis les travaux de M. T. Barlow et M. Yor ([2]) que les applications $M \mapsto L^0(M)$ et $M \mapsto \widetilde{M}$ sont continues de L^p dans L^p pour $1 < p < +\infty$. Le but de ce qui suit est de prouver que l'application $M \mapsto L^0(M)$ est continue de L^1 dans L^1_{f}, ce qui, grâce à la formule de Tanaka, revient à montrer que la transformation de Lévy l'est. Or on a plus précisément le

Théorème. *Il existe une constante universelle C telle que, pour tout couple (M, N) de martingales continues appartenant à L^1, on ait*

$$\sup_{t\geq 0}\sup_{\lambda>0} \lambda\mathbb{P}(|\widetilde{M}_t - \widetilde{N}_t| > \lambda) \leq C(\|M-N\|_1)^{1/2}(\|M\|_1 + \|N\|_1)^{1/2}\ . \tag{1}$$

Dans ce qui suit, nous désignerons par C une constante universelle, dont la valeur peut varier d'une ligne à l'autre. Nous poserons, pour toute martingale locale continue M et tout $t \geq 0$, $S_t(M) = \langle M\rangle_t^{1/2}$. Nous commencerons par déduire le théorème du

Received by the editors August 18, 2001.
2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G44.
Key words and phrases. Martingales, continuity, local time.

©2002 American Mathematical Society

Lemme. *Il existe une constante universelle C telle que, pour tout couple (M,N) de martingales locales continues, tout $\lambda > 0$, tout $c > 0$ et tout $t \geq 0$, on ait*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(|\widetilde{M}_t - \widetilde{N}_t| > \lambda) \\
&\qquad \leq C\left(\mathbb{P}(S_t(M-N) > c\lambda) + \mathbb{P}(S_t(M) + S_t(N) > \lambda/c)\right) \\
&\qquad\quad + \frac{C}{\lambda^2}\,\mathbb{E}^{1/2}\left(S_t^2(M-N)\,;\; S_t(M-N) \leq c\lambda\right) \\
&\qquad\qquad \times \mathbb{E}^{1/2}\left(S_t^2(M) + S_t^2(N)\,;\; S_t(M) + S_t(N) \leq \lambda/c\right)\ .
\end{aligned} \tag{2}$$

Admettant provisoirement ce résultat, nous fixons $\lambda > 0$ et $t \geq 0$, et nous nous donnons un nombre $c > 0$, dont la valeur sera choisie ultérieurement. Nous rappelons qu'on a, pour toute martingale locale continue X, tout $t \geq 0$ et tout $\lambda > 0$, l'inégalité classique

$$\mathbb{P}(S_t(X) > \lambda) \leq \frac{C}{\lambda}\|X\|_1 \tag{3}$$

de D. L. Burkholder ([3]). En utilisant cette inégalité, on voit que, pour tout $c > 0$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(S_t(M-N) > c\lambda) + \mathbb{P}(S_t(M) + S_t(N) > \lambda/c) \\
&\qquad \leq C\left(\frac{1}{c\lambda}\,\|M-N\|_1 + \frac{c}{\lambda}\left(\|M\|_1 + \|N\|_1\right)\right)\ .
\end{aligned} \tag{4}$$

Nous majorons maintenant la seconde partie du second membre de l'inégalité (2). On a, pour toute variable aléatoire $X \geq 0$ et tout nombre $a \geq 0$,

$$\mathbb{E}(X^2\,;\; X \leq a) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X^2 \mathbf{1}_{\{X \leq a\}} > \mu)\,d\mu \leq \int_0^{a^2} \mathbb{P}(X > \sqrt{\mu})\,d\mu\,,$$

ce qui permet d'obtenir, en utilisant encore l'inégalité (3),

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(S_t^2(M-N)\,;\; S_t(M-N) \leq c\lambda\right) \\
&\qquad \leq \int_0^{c^2\lambda^2} \mathbb{P}(S_t(M-N) > \sqrt{\mu})\,d\mu \\
&\qquad \leq C\|M-N\|_1 \int_0^{c^2\lambda^2} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu}} = Cc\lambda\|M-N\|_1\,.
\end{aligned}$$

En procédant de la même manière, on obtient l'inégalité

$$\mathbb{E}\left(S_t^2(M) + S_t^2(N)\,;\; S_t(M) + S_t(N) \leq \lambda/c\right) \leq C\frac{\lambda}{c}\left(\|M\|_1 + \|N\|_1\right)\ .$$

On déduit de ces deux estimations qu'on a, pour tout $t \geq 0$, tout $\lambda > 0$ et tout $c > 0$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda^2}\,\mathbb{E}^{1/2}\left(S_t^2(M-N)\,;\; S_t(M-N) \leq c\lambda\right) \\
&\qquad \times \mathbb{E}^{1/2}\left(S_t^2(M) + S_t^2(N); S_t(M) + S_t(N) \leq \lambda/c\right) \\
&\qquad\qquad \leq \frac{C}{\lambda}\left(\|M-N\|_1\right)^{1/2}\left(\|M|_1 + \|N\|_1\right)^{1/2}\ .
\end{aligned} \tag{5}$$

On choisit maintenant

$$c = \frac{\left(\|M-N\|_1\right)^{1/2}}{\left(\|M\|_1 + \|N\|_1\right)^{1/2}}$$

de façon à minimiser le second membre de l'inégalité (4). Il est clair que cette inégalité ainsi optimisée et l'inégalité (5) permettent d'obtenir l'estimation (1) à partir de l'inégalité (2).

Passons à la preuve du lemme. Ayant fixé tous les paramètres, nous introduisons l'ensemble

$$A = \left\{ S_t(M-N) \le c\lambda \ ; \ S_t(M) + S_t(N) \le \frac{\lambda}{c} \right\} ,$$

la martingale associée a définie (pour $0 \le s \le t$) par $a_s = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A/\mathcal{F}_s)$, et nous posons $B = \{(1-a)^*_t \le 1/2\}$.[1] On a évidemment

$$\mathbb{P}(|\widetilde{M}_t - \widetilde{N}_t| > \lambda) \le \mathbb{P}(|\widetilde{M}_t - \widetilde{N}_t| > \lambda \ ; \ B) + \mathbb{P}(B^c) ,$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B^c) &= \mathbb{P}((1-a)^*_t > 1/2) \le 2\,\mathbb{E}(1-a_t) = 2\mathbb{P}(A^c) \\ &\le 2\left(\mathbb{P}(S_t(M-N) > c\lambda) + \mathbb{P}(S_t(M) + S_t(N) > \lambda/c)\right) , \end{aligned}$$

donc il nous suffit de contrôler convenablement $\mathbb{P}(|\widetilde{M}_t - \widetilde{N}_t| > \lambda \ ; \ B)$. Pour cela, nous commençons par remarquer que, sur B, $a_{s^-} \ge 1/2$ pour tout $s \le t$ et donc, l'intégrale stochastique étant locale, on a pour toute martingale X et tout $s \le t$,

$$X_s = X'_s = \int_0^s \mathbf{1}_{\{a_{r^-} \ge 1/2\}}\, dX_r$$

sur l'ensemble B. Pour la même raison, on a aussi $(\widetilde{X})'_s = (\widetilde{X'})_s$ sur B pour tout $s \le t$. Nous pouvons donc écrire

$$\mathbb{P}(|\widetilde{M}_t - \widetilde{N}_t| > \lambda \ ; \ B) = \mathbb{P}(|\widetilde{M}'_t - \widetilde{N}'_t| > \lambda \ ; \ B) \le \frac{1}{\lambda^2}\mathbb{E}\left((\widetilde{M}'_t - \widetilde{N}'_t)^2\right) . \tag{6}$$

Or on a, d'après un résultat de M. T. Barlow et M. Yor ([2])

$$\mathbb{E}((\widetilde{X}_t - \widetilde{Y}_t)^2) \le C\mathbb{E}^{1/2}((X_t - Y_t)^2)\mathbb{E}^{1/2}(X_t^2 + Y_t^2)$$

pour tout couple (X, Y) de martingales locales continues et tout $t \ge 0$. Par conséquent, on déduit de (6) que

$$\mathbb{P}(|\widetilde{M}_t - \widetilde{N}_t| > \lambda \ ; \ B) \le \frac{C}{\lambda^2}\mathbb{E}^{1/2}((M'_t - N'_t)^2)\mathbb{E}^{1/2}((M'_t)^2 + (N'_t)^2) . \tag{7}$$

D'autre part

$$\langle M' - N' \rangle_t = \int_0^t \mathbf{1}_{\{a_{s^-} \ge 1/2\}}\, d\langle M - N \rangle_s \le 2\int_0^t a_{s^-}\, d\langle M - N \rangle_s ,$$

et

$$\int_0^t a_{s^-}\, d\langle M - N \rangle_s = a_t\langle M - N \rangle_t - a_0\langle M - N \rangle_0 - \int_0^t \langle M - N \rangle_s\, da_s ,$$

en vertu de la formule 38.1, p. 315 de [4]. On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((M'_t - N'_t)^2) &= \mathbb{E}(\langle M' - N' \rangle_t) \le \mathbb{E}(S_t^2(M-N) \ ; \ A) \\ &\le \mathbb{E}(S_t^2(M-N) \ ; \ S_t(M-N) \le c\lambda) . \end{aligned} \tag{8}$$

De la même manière, on voit que

$$\mathbb{E}((M'_t)^2 + (N'_t)^2) \le \mathbb{E}(S_t^2(M) + S_t^2(N) \ ; \ S_t(M) + S_t(N) \le \lambda/c) . \tag{9}$$

[1]Etant donné un processus X et $s \ge 0$, on pose (comme c'est l'usage) $X^*_s = \sup_{r \le s} |X_r|$.

On déduit donc des estimations (7), (8) et (9) que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|\widetilde{M}_t - \widetilde{N}_t| > \lambda\ ;\ B)& \\ &\leq \frac{C}{\lambda^2}\mathbb{E}^{1/2}(S_t^2(M-N)\ ;\ S_t(M-N) \leq c\lambda) \\ &\qquad \times \mathbb{E}^{1/2}(S_t^2(M) + S_t^2(N)\ ;\ S_t(M) + S_t(N) \leq \lambda/c)\ ,\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Nous ne savons pas si le temps local définit une application continue de L^1 dans L^1. En d'autres termes, peut-on remplacer le premier membre de l'inégalité (1) par $\|\tilde{M} - \tilde{N}\|_1$? Rappelons que, en ce qui concerne la *bornitude* de l'application L^0 dans les espaces L^p, on dispose ([1]) de l'estimation $\|L^0(M)\|_p \leq p\|M\|_p$ pour tout $p \geq 1$, qui constitue un résultat beaucoup plus satisfaisant. Mais bien entendu, l'application concernée manquant totalement de linéarité, on est dépourvu d'arguments pour déduire la continuité de la bornitude.

References

[1] J. Azéma et M. Yor. *En guise d'introduction.* Astérisque **52-53** (Temps locaux), Société mathématique de France (1978), 3-16.

[2] M. T. Barlow and M. Yor. *Semi-martingale inequalities and local times.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete. **55** (1981), 237-254. MR **82h:**60092

[3] D. L. Burkholder. *Martingale transforms.* Ann. Math. Stat. **37** (1966), 1494-1504. MR **34:**8456

[4] P. A. Meyer. *Un cours sur les intégrales stochastiques.* Séminaire de Probabilités X, Lecture Notes in Mathematics 511, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York (1976), 246-354. MR **58:**18721

Institut Fourier, U.M.R. 5582 C.N.R.S., Université Joseph Fourier, B.P. 74, 38402 Saint Martin d'Hères, France

E-mail address: lucchev@fourier.ujf-grenoble.fr