PROCEEDINGS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 137, Number 8, August 2009, Pages 2671–2683
S 0002-9939(09)09803-7
Article electronically published on February 3, 2009

SUR L'EXISTENCE D'UNE SOLUTION RAMIFIÉE POUR DES ÉQUATIONS DE FUCHS À CARACTÉRISTIQUE SIMPLE

PATRICE PONGÉRARD

(Communicated by Matthew J. Gursky)

ABSTRACT. The aim of this paper is to construct a holomorphic solution, ramified around a simple characteristic hypersurface, for some linear Fuchsian equation of order $m \geq 1$. We consider an operator L, holomorphic in a neighborhood of the origin in $\mathbb{C}_t \times \mathbb{C}_x^n$, of the form $L = tA + B$ where A and B are linear partial differential operators of order m and $m-1$, and where A has a simple characteristic hypersurface transverse to $S : t = 0$. Under an assumption linking the principal symbols of A and B, the question is reduced to the study of an integro-differential Fuchsian equation with an additional variable z that describes the universal covering of a pointed disk. It is an equation where terms like $t^l D_t^h D_x^\alpha (tD_t + 1)^{-1} D_z^{-q}$, $l, h, q \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}^n$ with $l \leq 1$ and $h + |\alpha| \leq l + q$ appear. The problem is solved by the fixed-point theorem with appropriate estimations in a Banach space.

1. Notations et résultat

Les coordonnées d'un point (t, x) de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ seront notées $(t, x_1, \ldots, x_n)$. L'ensemble des entiers naturels étant noté $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, l'opérateur de dérivation par rapport à la variable t (resp. x_j) sera noté D_t (resp. D_j) et nous poserons D_t^l et $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$ pour tout $l \in \mathbb{N}$ et tout $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. On considère un opérateur différentiel linéaire L, à coefficients holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, de la forme

$$L(t, x; D_t, D) = tA(t, x; D_t, D) + B(t, x; D_t, D), \tag{1.1}$$

où A (resp. B) est un opérateur différentiel linéaire d'ordre $m \geq 1$ (resp. $m - 1$) dont le symbole principal sera noté g_A (resp. g_B) et où $g_A(\bullet; 1, 0) \equiv 1$. On vérifie que L est un opérateur différentiel fuchsien d'ordre m et de poids $m - 1$ ayant pour partie fuchsienne

$$a(t, x, D_t) \equiv g_A(0, x; 1, 0)tD_t^m + g_B(0, x; 1, 0)D_t^{m-1}. \tag{1.2}$$

On note $\mathcal{O}_0 = \mathcal{D}_0 \times \Omega_0$ un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ sur lequel tous les coefficients de l'opérateur L sont définis et holomorphes.

Received by the editors February 25, 2008, and, in revised form, October 16, 2008.
2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35A07; Secondary 35A20.

Nous supposons que le polynôme $\tau \mapsto g_A(0;\tau,1,0,\dots,0)$ admet une racine simple $\bar{\tau}$. On a donc

$$D_\tau g_A(0;\bar{\tau},1,0,\dots,0) \neq 0 \tag{1.3}$$

ce qui assure que le problème

$$\begin{cases} g_A(t,x;\bigtriangledown k(t,x)) & = 0, \\ \bigtriangledown k(0) & = (\overline{\tau},1,0,\dots,0), \\ k(0,x) & = x_1 \end{cases} \tag{1.4}$$

admet une unique solution holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$; on peut donc supposer que la fonction k est définie et holomorphe sur $\mathcal{O}_0$ et que $D_1 k(t,x) \neq 0$ pour tout $(t,x) \in \mathcal{O}_0$. Ceci permet de définir une hypersurface $K = \{(t,x) \in \mathcal{O}_0 \mid k(t,x) = 0\}$ transverse à S. En notant T l'hyperplan de S d'équation $t = x_1 = 0$, on a $K \cap S = \Omega_0 \cap T$: l'ensemble K est une hypersurface caractéristique simple issue de T et transverse à S.

Pour tout $\delta > 0$, on pose $D_\delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \delta\}$ et on note $\mathcal{R}_\delta$ le revêtement universel du disque pointé $\dot{D}_\delta = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \delta\}$. Si v est une fonction holomorphe ramifiée autour de K, on peut trouver un réel $\delta > 0$ et un voisinage ouvert connexe $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_0$ de l'origine de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ tels que v soit de la forme

$$v(t,x) = \tilde{v}(z,t,x)_{|z=k(t,x)}, \tag{1.5}$$

où $\tilde{v}$ est une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}$; quitte à réduire $\mathcal{O}$, on peut supposer que $|k(t,x)| < \delta$ pour tout $(t,x) \in \mathcal{O}$. La fonction (1.5) est alors définie et holomorphe sur le revêtement universel de $\mathcal{O} - K$.

On se propose de construire une solution de l'équation

$$L(t,x;D_t,D)u(t,x) = v(z,t,x)|_{z=k(t,x)}. \tag{1.6}$$

Cette construction est possible si l'opérateur L satisfait à la condition suivante. On utilisera la partie fuchsienne d'ordre 1 et de poids 0,

$$b(t,x,D_t) \equiv D_\tau g_A(0,x;\bigtriangledown k(0,x))tD_t + g_B(0,x;\bigtriangledown k(0,x)), \tag{1.7}$$

à coefficients définis et holomorphes sur Ω_0. On associe à b son polynôme caractéristique

$$P(x,\lambda) = D_\tau g_A(0,x;\bigtriangledown k(0,x))\lambda + g_B(0,x;\bigtriangledown k(0,x)),$$

qui vérifie $P(x,tD_t) = b(t,x,D_t)$, et on suppose que

$$P(0,\lambda) \neq 0 \quad \text{pour tout} \quad \lambda \in \mathbb{N}. \tag{1.8}$$

On a alors le théorème suivant.

Théorème 1.1. *Soit $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_0$ un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$, il existe $\delta_0 > 0$ et un voisinage ouvert $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ de l'origine de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ tels que : soit $0 < \delta \leq \delta_0$, pour toute fonction $v \in \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O})$, il existe une solution de l'équation (1.6) de la forme $u(k(t,x),t,x)$, où $u \in \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}')$.*

Remarque 1.2. Considérons le problème (2.6)-(2.7) de [6] :

$$\begin{cases} A(t,x;D_t,D)\big[u(z,t,x)|_{z=k(t,x)}\big] & = w_1(k(t,x),t,x), \\ u(z,t,x) - w_0(z,t,x) & = 0 \quad \text{pour} \quad t = 0, \end{cases} \tag{1.9}$$

avec des fonctions w_0, w_1 qui sont holomorphes au voisinage de $\mathcal{R}_\delta \times \{0\}$ pour un $\delta > 0$. En prenant comme inconnue $w_0 + tu$, le problème s'écrit

$$(tA + D_\tau A)\big[u(z,t,x)|_{z=k(t,x)}\big] = w_1 - A\big[w_0(z,t,x)|_{z=k(t,x)}\big].$$

Pour cette équation, la condition (1.8) s'écrit simplement

$$D_\tau g_A(0; \bigtriangledown k(0))(\lambda + 1) \neq 0 \quad \text{lorsque } \lambda \in \mathbb{N},$$

soit $D_\tau g_A(0; \bigtriangledown k(0)) \neq 0$; autrement dit, la condition (1.8) est vide dans ce cas. Ceci prouve que le problème (1.9) est un cas particulier du problème (1.6)-(1.8).

Remarque 1.3. Il n'y a en général aucune relation entre (1.2) et (1.7) sauf lorsque $m = 1$, auquel cas, on a $a(t,x,D_t) = b(t,x,D_t)$ et l'équation (1.6) est une équation fuchsienne de poids 0 : le théorème 1.1 donne l'existence d'une solution ; on a également l'unicité dans ce cas d'après (1.8) et le lemme 1.4 de [11]. Considérons ensuite le problème de Cauchy

$$(1.10) \qquad \begin{cases} L(t,x;D_t,D)u(t,x) &= v(t,x), \\ D_t^h u(0,x) &= w_h(x) \quad \text{pour} \quad 0 \leq h < m-1 \end{cases}$$

et notons $\mathcal{C}(x,\lambda)$ le polynôme caractéristique de la partie fuchsienne $a(t,x;D_t,D)$. Sous la condition $\mathcal{C}(0,k) \neq 0$ pour tout entier $k \geq m-1$, nous savons (Baouendi-Goulaouic, [1]) que pour toutes fonctions $(w_h)_{0 \leq h < m-1}$ et v holomorphes au voisinage de $x = 0$ et $(t,x) = (0,0)$ respectivement, le problème de Cauchy (1.10) admet une unique solution holomorphe au voisinage de $(t,x) = (0,0)$.

Supposons que l'opérateur L soit d'ordre 2, qu'il admette deux hypersurfaces caractéristiques simples K_1, K_2 transverses à S et issues de T et que l'ensemble $V = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}^*} \{x \in \Omega_0 \mid \mathcal{C}(x,\lambda) = 0\}$ ait pour équation locale, $V : x_1 = 0$. Lorsque w_0 et v sont des fonctions holomorphes ramifiées autour de T et de K_1 respectivement, S. Ouchi a montré [7, Théorèmes 1.7 et 1.8] que toute solution de (1.10) (holomorphe au voisinage d'un point $(0,\alpha) \in S,\ \alpha \notin V$) se prolonge en une fonction holomorphe ramifiée autour de $S \cup K_1 \cup K_2$.

Nous étudions ici des opérateurs d'ordre $m \geq 1$ et aucune hypothèse n'est faite sur la partie fuchsienne $a(t,x;D_t,D)$; sous la condition (1.8) qui porte sur l'opérateur $b(t,x;D_t,D)$, nous obtenons le théorème 1.1.

Exemple 1.4. Considérons au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}_t \times \mathbb{C}_x$ le cas d'un opérateur d'ordre 2 de la forme $L = tA + B$, où

$$A \equiv D_t^2 - D_x^2 \quad \text{et} \quad B \equiv a(x)D_t.$$

La partie fuchsienne de L s'écrit $tD_t^2 + a(x)D_t$ et a pour polynôme caractéristique

$$\mathcal{C}(x,\lambda) = \lambda[\lambda + a(x) - 1].$$

La condition $\mathcal{C}(0,k) \neq 0$ pour tout entier $k \geq 1$ signifie $a(0) \notin -\mathbb{N}$. Si $a(0) \in -\mathbb{N}$, nous avons montré [11] que toute solution du problème de Cauchy (1.10) (holomorphe au voisinage d'un point $(0,\alpha) \in S$, $\alpha \neq 0$) se prolonge en une fonction holomorphe sur le revêtement universel d'un ouvert de la forme $\{(t,x) \in \mathbb{C} \times \Omega \mid |t| \leq \kappa |x|^2\}$. Pour un a particulier tel que $a(0) \in -\mathbb{N}$ est impair et $a \not\equiv 0$, S. Fujiié [2] a montré que le problème de Cauchy (1.10) admet une unique solution (holomorphe au voisinage d'un point $(0,\alpha) \in S$, $\alpha \neq 0$) qui se prolonge en une fonction holomorphe ramifiée autour de $S \cup K_1 \cup K_2$. Revenons à la condition

(1.8) ; le polynôme $g_A(\tau,1) = \tau^2 - 1$ admet deux racines distinctes $\tau_1 = 1 = -\tau_2$ et on a $K_i : \tau_i t + x = 0,\ i = 1, 2$. La condition (1.8) s'écrit : pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$,

$$D_\tau g_A(\triangledown k_i)\lambda + a(0)\tau_i \neq 0, \quad (i = 1 \text{ ou } 2);$$

soit $2\lambda + a(0) \neq 0$, autrement dit $a(0) \in -\mathbb{N}$ est impair. Dans ce cas, si v est ramifiée autour de K_i, il existe d'après le théorème 1.1 une solution de l'équation $Lu = v$, ramifiée autour de K_i.

2. Réduction

On cherche a priori une solution sous la forme $u(z,t,x)|_{z=k(t,x)}$ et, pour expliciter (1.6), c'est-à-dire

$$L(t,x;D_t,D)\big[u(z,t,x)|_{z=k(t,x)}\big] = v(z,t,x)_{|z=k(t,x)},$$

on utilise le lemme suivant [8, Lemme 6.1].

Lemme 2.1. *Soient $M(t,x;D_t,D)$ un opérateur différentiel linéaire d'ordre m à coefficients holomorphes dans un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ et $k : \mathcal{O} \mapsto \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Il existe des opérateurs différentiels linéaires $M_q(t,x;D_t,D)$, $0 \le q \le m$, d'ordre $\le q$ à coefficients holomorphes dans $\mathcal{O}$ tels que, pour tout $a \in \mathcal{O}$ et tout germe u au point $(k(a),a) \in \mathbb{C}\times\mathcal{O}$, on ait pour (t,x) voisin de a,*

$$M(t,x;D_t,D)u(k(t,x),t,x) = \sum_{q=0}^{m} M_q(t,x;D_t,D)D_z^{m-q}u(z,t,x)|_{z=k(t,x)}.$$

En outre, les coefficients de M_q sont des combinaisons linéaires de ceux de M dont les coefficients sont des polynômes en les dérivées de k. Si g est le symbole principal de M, le symbole principal de M_q, en tant qu'opérateur d'orde q, est donné par la formule

$$\sigma(M_q)(t,x;\tau,\xi) = \sum_{h+|\alpha|=q} D_\tau^h D_\xi^\alpha g\big(t,x;\triangledown k(t,x)\big)\frac{\tau^h\xi^\alpha}{h!\alpha!}. \tag{2.1}$$

D'après ce lemme, on a

$$\begin{cases} A[u(k(t,x),t,x)] &= \sum_{q=0}^{m} A_q(t,x;D_t,D)D_z^{m-q}u(z,t,x)|_{z=k(t,x)}, \\ B[u(k(t,x),t,x)] &= \sum_{q=0}^{m-1} B_q(t,x;D_t,D)D_z^{m-1-q}u(z,t,x)|_{z=k(t,x)}, \end{cases} \tag{2.2}$$

où les opérateurs A_q et B_q sont d'ordre $\le q$; vu (1.4) et (2.1), on constate que $A_0 = \sigma(A_0) = 0$ et, par conséquent,

$$L(t,x;D_t,D)u(k(t,x),t,x) = \sum_{q=0}^{m-1}(tA_{q+1} + B_q)D_z^{m-1-q}u(z,t,x)|_{z=k(t,x)}.$$

Introduisons maintenant un inverse à droite de l'opérateur de dérivation D_z. Soient $\mathcal{R}_\delta$ le revêtement universel du disque pointé $\dot{D}_\delta$ et $\pi :\ \mathcal{R}_\delta \to \dot{D}_\delta$ la surjection canonique. On choisit un point $\hat{a}_1$ de $\mathcal{R}_\delta$ tel que $\pi(\hat{a}_1) = a_1$ et pour toute fonction holomorphe $u :\ \mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O} \to \mathbb{C}$, on définit la primitive de u qui s'annule au point $\hat{a}_1$ par

$$D_z^{-1}u(z,t,x) = \int_{\hat{a}_1}^{z} u(\sigma,t,x)\,d\sigma,$$

où l'intégrale s'effectue sur des chemins joignant les points $\hat{a}_1$ et z ; bien entendu, la valeur de cette intégrale ne dépend pas du chemin choisi. On obtient ainsi une fonction holomorphe $D_z^{-1}u: \mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ et un opérateur $D_z^{-1}: \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}) \to \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O})$ vérifiant $D_z \circ D_z^{-1} = Id$.

Lemme 2.2. *Soient $\delta > 0$ et $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$. L'opérateur D_z^{-1} est un endomorphisme continu de l'espace $\mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O})$.*

Démonstration. Considérons le revêtement universel de $\dot{D}_\delta$ défini par l'ouvert simplement connexe $Z_\delta = \{\zeta \in \mathbb{C}^\star \mid e^\zeta \in \dot{D}_\delta\}$ et par l'application $p: Z_\delta \to \dot{D}_\delta$, où $p(\zeta) = e^\zeta$. Il existe un homéomorphisme $h: \mathcal{R}_\delta \to Z_\delta$ tel que $\pi = p \circ h$. Soit K une partie compacte de $\mathcal{R}_\delta$, posons

$$K' = \bigcup_{z \in K} h^{-1}([h(\hat{a}_1), h(z)]).$$

Il est clair que $K' = h^{-1}(L)$, où $L = \bigcup_{\zeta \in h(K)} [h(\hat{a}_1), \zeta]$ est une partie compacte de Z_δ. Soit $\gamma: [0,1] \to Z_\delta$ le segment joignant $h(\hat{a}_1)$ et $h(z)$, on a

$$D_z^{-1}u(z,t,x) = \int_{\hat{a}_1}^{z} u(\sigma,t,x)d\sigma = \int_0^1 u\big(h^{-1} \circ \gamma(s), t, x\big)(p \circ \gamma)'(s)ds$$

car $\pi \circ h^{-1} = p$. Si M est une partie compacte de $\mathcal{O}$, on obtien finalement

$$\max_{K \times M} |D_z^{-1}u| \le c \max_{K' \times M} |u|, \quad \text{où} \quad c \equiv \max_K |h - h(\hat{a}_1)| \times \max_L |p|,$$

d'où le lemme. □

On peut ensuite écrire

$$L(t,x;D_t,D)u(k(t,x),t,x) = D_z^{m-1} \sum_{q=0}^{m-1} (tA_{q+1} + B_q) D_z^{-q} u(z,t,x)|_{z=k(t,x)}.$$

En outre, d'après (2.1), on a

$$B_0(t,x) = g_B(t,x; \triangledown k(t,x))$$

et

$$\sigma(A_1)(t,x;\tau,\xi) = D_\tau g_A(t,x;\triangledown k(t,x))\tau + \sum_{j=1}^{n} D_{\xi_j} g_A(t,x;\triangledown k(t,x))\xi_j.$$

En utilisant la notation (1.7), il en résulte que

$$\{(tA_1 + B_0)(t,x;D_t,D) = b(t,x;D_t) + \sum_{l+|\alpha| \le 1} a_{l,\alpha}(t,x) t^{l+1} D_t^l D^\alpha,$$

où les $a_{l,\alpha}$ sont des fonctions holomorphes sur $\mathcal{O}_0$. En notant, pour $1 \le q \le m-1$,

$$A_q^{l+q} = \begin{cases} B_q & \text{si } l = 0, \\ A_{q+1} & \text{si } l = 1, \end{cases}$$

on obtient finalement

$$L(t,x;D_t,D)u(k(t,x),t,x) = D_z^{m-1}\Big(b(t,x;D_t) + \sum_{l+|\alpha| \le 1} a_{l,\alpha}(t,x) t^{1+l} D_t^l D^\alpha + \sum_{\substack{0 \le l \le 1 \\ 1 \le q \le m-1}} t^l A_q^{l+q}(t,x;D_t,D) D_z^{-q}\Big) u(z,t,x)|_{z=k(t,x)},$$

où l'ordre des opérateurs A_q^{l+q} est $\leq l+q$. Notons que $k(0,a) = a_1$ d'après (1.4) ; pour que (1.6) soit vérifié, il suffit d'avoir, pour (z,t,x) voisin de $(a_1, 0, a)$,

$$\Big(b(t,x;D_t) + \sum_{l+|\alpha|\leq 1} a_{l,\alpha}(t,x) t^{1+l} D_t^l D^\alpha + \sum_{\substack{0\leq l\leq 1\\ 1\leq q\leq m-1}} t^l A_q^{l+q}(t,x;D_t,D) D_z^{-q}\Big) u = D_z^{1-m} v.$$

Autrement dit, il suffit d'étudier une équation de la forme

$$\text{(2.3)}\quad P(x,tD_t)u = \sum_{l+|\alpha|\leq 1} a_{l,\alpha}(t,x) t^{1+l} D_t^l D^\alpha \\ + \sum_{\substack{0\leq l\leq 1\\ 1\leq q\leq m-1}} t^l A_q^{l+q}(t,x;D_t,D) D_z^{-q} u + v,$$

où P demeure inchangé et, après avoir changé de notations, les $a_{l,\alpha}$ sont des fonctions holomorphes sur $\mathcal{O}_0$, les A_q^{l+q} sont des opérateurs différentiels linéaires holomorphes sur $\mathcal{O}_0$ d'ordre $\leq l+q$ et v est une fonction appartenant à l'espace $\mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O})$. Il s'agit d'une équation fuchsienne intégro-différentielle dont l'étude ne figure pas, semble-t-il, dans les travaux antérieurs.

L'hypothèse (1.8) permet d'établir le lemme suivant. Pour tout $R > 0$, on pose

$$D_R = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < R\}.$$

Lemme 2.3. *Il existe un voisinage ouvert $\Omega_1 \subset \Omega_0$ de l'origine de $\mathbb{C}^n$ et une constante $c_0 > 0$ tels que :*
a. $|P(x,k)| \geq c_0(k+1)$ pour tout $x \in \Omega_1$ et tout $k \in \mathbb{N}$.
b. Soient $\delta > 0$, $R > 0$ et $\Omega \subset \Omega_1$ un ouvert de $\mathbb{C}^n$. L'opérateur $P \equiv P(x,tD_t)$ est un homéomorphisme linéaire de l'espace $\mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times D_R \times \Omega)$ sur lui même et

$$\text{(2.4)}\qquad (P^{-1}u)(z,t,x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{t^k}{k!} \frac{D_t^k u(z,0,x)}{P(x,k)} \ ;$$

de plus, les opérateurs P^{-1} et D_z^q commutent quel que soit $q \in \mathbb{Z}$.
c. Soient $\delta > 0$, $R' > 0$ et $\mathcal{U}$ une partie de l'ensemble des ouverts de Ω_1. L'assertion b est encore vraie lorsque l'ouvert $D_R \times \Omega$ est remplacé par un ouvert de la forme

$$\text{(2.5)}\qquad \mathcal{O} = \bigcup_{(R,\Omega)\in]0,R'[\times\mathcal{U}} D_R \times \Omega.$$

Démonstration. a. On a $P(x,\lambda) = \sum_{l=0}^1 a_l(x)\lambda^l$, où les a_l appartiennent à $\mathcal{H}(\Omega_0)$ et $a_1(0) \neq 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on a donc

$$k^{-1}P(x,k) = f(x,k^{-1}), \quad \text{où} \quad f(x,y) = \sum_{l=0}^{1} a_l(x) y^{1-l} \ ;$$

la fonction f étant continue au voisinage du compact $\{(0,k^{-1})\ ;\ k \in \mathbb{N}^\star\} \cup \{(0,0)\}$ et non nulle sur ce compact par hypothèse, il existe un voisinage ouvert $\Omega_1 \subset \Omega_0$ et une constante $c > 0$ telle que

$$|f(x,k^{-1})| \geq c \quad \text{pour tout } x \in \Omega_1 \text{ et tout } k \in \mathbb{N}^\star.$$

D'autre part, on peut supposer

$$|P(x,0)| \geq c \quad \text{pour tout } x \in \Omega_1.$$

Par conséquent, on obtient

$$|P(x,k)| \geq c \max(1,k) \quad \text{pour tout } x \in \Omega_1 \text{ et tout } k \in \mathbb{N},$$

d'ou le résultat voulu.

b. Il est clair que l'opérateur $P : \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times D_R \times \Omega) \to \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times D_R \times \Omega)$ est linéaire continu. Soit $u \in \mathcal{H}\big(\mathcal{R}_\delta \times D_R \times \Omega\big)$, vu que $(tD_t)^l t^k = k^l t^k$ pour tout $k,\ l \in \mathbb{N}$, on a $P(x, tD_t)u(z,t,x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{t^k}{k!} P(x,k) D_t^k u(z,0,x)$ dans $\mathcal{R}_\delta \times D_R \times \Omega$. L'opérateur P est donc injectif d'après a ; son inverse est formellement donné par la série (2.4). Soient $0 < r < s < R$ et $\mathcal{K}$ un compact de $\mathcal{R}_\delta \times \Omega$, il existe $c = c(s,\mathcal{K}) \geq 0$ tel que $|\dfrac{t^k}{k!} D_t^k u(z,0,x)| \leq c\Big(\dfrac{r}{s}\Big)^k$ pour tout $(z,t,x) \in \mathcal{R}_\delta \times D_r \times \Omega$. Ceci prouve que la série (2.4) converge dans $\mathcal{H}\big(\mathcal{R}_\delta \times D_R \times \Omega\big)$ puisque $|1/P(x,k)| \leq 1/c_0$; (2.4) étant aussi une série entière de t, son image par P est bien égale à u. La continuité de P^{-1} résulte directement des majorations précédentes. Enfin, il est clair que $D_z^q \circ P(x,tD_t) = P(x,tD_t) \circ D_z^q$, ce qui prouve *b*.

c. Ce point se déduit de la démonstration précédente en remarquant que si K est une partie compacte de $\mathcal{O}$, alors il existe un nombre fini d'ouverts $\mathcal{O}_i$ relativement compacts dans $D_{R_i} \times \Omega_i$, $(R_i, \Omega_i) \in\ ]0, R'[\ \times \mathcal{U}$, tels que $\mathcal{O}$ soit contenu dans la réunion des $\mathcal{O}_i$, d'où le lemme. □

Posons $\mathcal{Q} = \{q \in \mathbb{N} \mid 0 \leq q \leq m-1\}$ et pour tout $q \in \mathcal{Q}$, notons S_q l'endomorphisme continu de l'espace $\mathcal{H}\big(\mathcal{R}_\delta \times D_R \times \Omega\big)$ défini par

$$S_q = \begin{cases} \sum_{l+|\alpha|\leq 1} a_{l,\alpha}(t,x) t^{1+l} D_t^l D^\alpha \circ P^{-1} & \text{si } q = 0, \\ \sum_{0\leq l\leq 1} t^l A_q^{l+q}(t,x; D_t, D) \circ P^{-1} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.6}$$

En remplaçant u par $P^{-1}u$, on en déduit que l'équation (2.3) est équivalente à

$$u = \mathcal{A}u + v, \quad \text{où} \quad \mathcal{A} = \sum_{q\in\mathcal{Q}} S_q D_z^{-q} \tag{2.7}$$

et que le théorème 1.1 résulte de la proposition suivante.

Proposition 2.4. *Soit $\mathcal{O} \subset \mathcal{D}_0 \times \Omega_1$ un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, il existe $\delta_0 > 0$ et un voisinage ouvert $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ de l'origine de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ tels que : soit $0 < \delta \leq \delta_0$, pour toute fonction $v \in \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O})$, l'équation (2.7) admet une unique solution $u \in \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}')$.*

Nous construisons cette solution par la méthode des approximations successives :

$$u_0 = v \quad \text{et} \quad u_{k+1} = \mathcal{A}u_k + v \quad \text{pour } k \in \mathbb{N}. \tag{2.8}$$

Pour étudier la convergence de cette suite (u_k), nous allons la lire sur des chemins tracés sur $\mathcal{R}_\delta$. On note Γ_δ l'ensemble des chemins $\gamma \in \mathcal{C}^1([0,\Lambda]; \dot{D}(0,\delta))$ d'origine a_1 paramétrés par leur abscisse curviligne ; Λ est par conséquent la longueur de γ. On note enfin $\hat{\gamma} : [0,\Lambda] \to \mathcal{R}_\delta$ le relèvement d'origine $\hat{a}_1$ de γ. Pour toute fonction $u \in \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O})$ et tout $\gamma \in \Gamma_\delta$, on pose

$$u_\gamma(s,t,x) = u(\hat{\gamma}(s),t,x), \text{ où } s \in [0,\Lambda] \ ;$$

la fonction u_γ est continue sur $[0,\Lambda] \times \mathcal{O}$ et holomorphe sur $\mathcal{O}$, autrement dit, u_γ appartient à l'espace $\mathcal{C}([0,\Lambda]; \mathcal{H}(\mathcal{O}))$. On observe que

$$(D_z^{-1}u)_\gamma(s,t,x) = \int_{\hat{a}_1}^{\hat{\gamma}(s)} u(\sigma,t,x) d\sigma = \int_0^s u_\gamma(\sigma,t,x)\gamma'(\sigma)\, d\sigma,$$

ce qui conduit à poser

$$\mathcal{D}_\gamma^{-1}U(s,t,x) \equiv \int_0^s U(\sigma,t,x)\gamma'(\sigma)\,d\sigma \quad \text{pour tout } U \in \mathcal{C}([0,\Lambda];\mathcal{H}(\mathcal{O})).$$

L'opérateur $\mathcal{D}_\gamma^{-1}$ ainsi obtenu est clairement un endomorphisme de l'espace $\mathcal{C}([0,\Lambda];\mathcal{H}(\mathcal{O}))$. En outre, on a

$$(D_z^q u)_\gamma = \mathcal{D}_\gamma^q u_\gamma \quad \text{pour tout entier } q < 0.$$

Enfin, on a

$$(P^{-1}u)_\gamma(s,t,x) = P^{-1}u_\gamma(s,t,x),$$

où

$$P^{-1}U(s,t,x) \equiv \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{t^k}{k!}\frac{D_t^k U(s,0,x)}{P(x,k)} \quad \text{pour tout } U \in \mathcal{C}([0,\Lambda];\mathcal{H}(\mathcal{O})). \tag{2.9}$$

Quitte à reprendre partiellement la démonstration du lemme 2.3, on vérifie aisément le

Lemme 2.5. *Soient $\Lambda > 0$ et $\mathcal{O}$ un ouvert de la forme* (2.5)*. L'expression* (2.9) *définit une fonction appartenant à l'espace $\mathcal{C}([0,\Lambda];\mathcal{H}(\mathcal{O}))$; de plus, les opérateurs P^{-1} et $\mathcal{D}_\gamma^q$ commutent quel que soit $q \in \mathbb{Z}_-$.*

La convergence de la suite (u_k) sera déduite de celle de $(u_{k,\gamma})$ grâce au lemme suivant.

Lemme 2.6. *Soit (u_k) une suite de $\mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O})$ telle que, pour tout $\gamma \in \Gamma_\delta$ de longueur $\Lambda \le 2\delta$, la suite $(u_{k,\gamma})$ converge uniformément sur tout compact de $[0,\Lambda] \times \mathcal{O}$, alors la suite (u_k) converge uniformément sur tout compact de $\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}$ et $(\lim_{k\to\infty} u_k)_\gamma = \lim_{k\to\infty} u_{k,\gamma}$.*

Démonstration. Étant donné un point $t \in \mathcal{R}_\delta$, il est possible de trouver un chemin $\gamma \in \Gamma_\delta$ de longueur $\le 2\delta$ tel que le relèvement $\hat{\gamma}$ d'origine $\hat{a}_1$ de $\hat{\gamma}$ enlace le point t ; on obtient ainsi la convergence uniforme locale sur $\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}$ et par conséquent (u_k) converge uniformément sur tout compact vers une fonction $u \in \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O})$. On remarque ensuite que $\sup_{[0,\Lambda]\times K} |u_{k,\gamma} - u_\gamma| = \sup_{\hat{\gamma}([0,\Lambda])\times K} |u_k - u|$ pour tout $\gamma \in \Gamma_\delta$ de longueur $\le 2\delta$ et tout compact K de $\mathcal{O}$, d'où le lemme. □

Les équations (2.7) et (2.8) lues sur γ s'écrivent alors

$$\begin{cases} u_\gamma = \mathcal{A}_\gamma u_\gamma + v_\gamma, \\ u_{0,\gamma} = 0 \quad \text{et} \quad u_{k+1,\gamma} = \mathcal{A}_\gamma u_{k,\gamma} + v_\gamma \quad \text{pour } k \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{2.10}$$

où, pour tout $U \in \mathcal{C}\big([0,\Lambda];\mathcal{H}(\mathcal{O})\big)$,

$$\mathcal{A}_\gamma U = \sum_{q\in\mathcal{Q}} S_q \mathcal{D}_\gamma^{-q} U. \tag{2.11}$$

En notant $V = v_\gamma \in \mathcal{C}([0,\Lambda];\mathcal{H}(\mathcal{O}))$, il s'agit finalement d'étudier l'équation

$$U = \mathcal{A}_\gamma U + V \tag{2.12}$$

par la méthode des approximations successives

$$U_0 = 0 \quad \text{et} \quad U_{k+1} = \mathcal{A}_\gamma U_k + V \quad \text{pour } k \in \mathbb{N}. \tag{2.13}$$

Cette étude repose sur le théorème du point fixe dans un espace de Banach que nous allons préciser.

3. Cadre fonctionnel et estimation de l'opérateur $\mathcal{A}_\gamma$

Nous utiliserons les variables $\xi = \sum_{j=1}^n x_j$, et $\tau = \rho t$, où ρ est un paramètre > 1.

Définition 3.1. Soit $\phi \in \mathbb{R}_+\{\xi\}$ une fonction majorante de rayon de convergence $\geq R > 0$, soient $\rho > 1$, $\omega, \Lambda > 0$ tels que $\omega\Lambda < R$, on pose

$$\mathcal{O}(R,\rho,\omega,\Lambda) = \{(t,x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \mid \rho|t| + \sum_{j=1}^n |x_j| < R - \omega\Lambda\}$$

et on note $\mathcal{K}_\phi$ l'espace vectoriel des fonctions $U \in \mathcal{C}\big([0,\Lambda];\mathcal{H}(\mathcal{O}(R,\rho,\omega,\Lambda))\big)$ pour lesquelles il existe $c \geq 0$ tel que

$$\forall s \in [0,\Lambda], \quad U(s,t,x) \ll c\phi(\tau + \xi + \omega s). \tag{3.1}$$

Il est clair que $\mathcal{K}_\phi$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}\big([0,\Lambda];\mathcal{H}(\mathcal{O}(R,\rho,\omega,\Lambda))\big)$ et que la plus petite constante $c \geq 0$ pour laquelle (3.1) ait lieu est une norme sur cet espace vectoriel, notée $\| \bullet \|_\phi$.

Lemme 3.2. *L'espace $\mathcal{K}_\phi$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit (U_n) une suite de Cauchy de l'espace $\mathcal{K}_\phi$ et soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, n' \geq N$ et tout $s \in [0,\Lambda]$,

$$(U_n - U_{n'})(s,t,x) \ll \varepsilon\phi(\tau + \xi + \omega s). \tag{3.2}$$

Si K est une partie compacte de $\mathcal{O}(R,\rho,\omega,\Lambda)$, on a donc

$$\max_{[0,\Lambda]\times K} |U_n - U_{n'}| \leq \varepsilon C_K,$$

où $C_K = \max_{(t,x)\in K} \phi(\rho|t| + \sum_{j=1}^n |x_j| + \omega\Lambda)$ est $< +\infty$ car l'application $(t,x) \mapsto \phi(\rho t + \sum_{j=1}^n x_j + \omega\Lambda)$ est holomorphe dans $\mathcal{O}(R,\rho,\omega,\Lambda)$. Ceci prouve que la suite (U_n) est de Cauchy dans l'espace $\mathcal{C}\big([0,\Lambda];\mathcal{H}(\mathcal{O}(R,\rho,\omega,\Lambda))\big)$, elle converge donc uniformément vers une fonction $U \in \mathcal{C}\big([0,\Lambda];\mathcal{H}(\mathcal{O}(R,\rho,\omega,\Lambda))\big)$ sur tout compact de $[0,\Lambda] \times \mathcal{O}(R,\rho,\omega,\Lambda)$; a fortiori, pour tout $s \in [0,\Lambda]$ et tout $(h,\alpha) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^n$, la suite $(D_t^h D^\alpha U_n(s,0,0))_n$ converge vers $D_t^h D^\alpha U(s,0,0)$. On peut alors passer à la limite sur n' dans la relation (3.2) et on en déduit que (U_n) converge vers U dans $\mathcal{K}_\phi$. □

Lemme 3.3. *L'opérateur $\mathcal{D}_\gamma^{-1}$ induit une application $\mathcal{D}_\gamma^{-1} : \mathcal{K}_{D\phi} \to \mathcal{K}_\phi$ linéaire continue de norme $\leq \omega^{-1}$.*

Démonstration. Soit $U \in \mathcal{K}_{D\phi}$; pour tout $s \in [0,\Lambda]$ et tout $(h,\alpha) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^n$, on a

$$|D_t^h D^\alpha U(s,0,0)| \leq \|U\|_{D\phi}\, \rho^h D^{h+|\alpha|+1}\phi(\omega s),$$

d'où

$$|D_t^h D^\alpha \mathcal{D}_\gamma^{-1} U(s,0,0)| \leq \|U\|_{D\phi}\rho^h \int_0^s D^{h+|\alpha|+1}\phi(\omega\sigma)d\sigma \leq \|U\|_{D\phi}\frac{\rho^h}{\omega} D^{h+|\alpha|}\phi(\omega s);$$

c'est-à-dire $\mathcal{D}_\gamma^{-1} U \ll \omega^{-1}\|U\|_{D\phi}\ \phi(\tau + \xi + \omega s)$, ce qui prouve le lemme. □

Dans tout ce qui suit, $\phi \in \mathbb{R}_+\{\xi\}$ désignera une fonction majorante de rayon de convergence $\geq R > 0$ vérifiant $0 \ll (R-\xi)\phi(\xi)$.

Rappelons [4, Proposition 6.1] que, si $\phi \in \mathbb{R}_+[[\xi]]$ vérifie $0 \ll (R-\xi)\phi(\xi)$, alors les dérivées $D^p\phi$ de ϕ vérifient également $0 \ll (R-\xi)D^p\phi(\xi)$ et

$$\frac{\eta R}{\eta R - \xi} D^p\phi(\xi) \ll \frac{\eta}{\eta - 1} D^p\phi(\xi) \quad \text{pour tout } \eta > 1 \text{ et tout } p \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Pour tout $R > 0$, on pose

$$\Delta_R = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \max_{1\leq j\leq n} |x_j| < R\}.$$

On fixe une fois pour toutes $\eta > 1$ et $R_0 > 0$ tels que $\mathcal{D}_0 \times \Omega_1$ $(\subset \mathcal{D}_0 \times \Omega_0 = \mathcal{O}_0)$ contienne le polydisque $\overline{D}_{\eta R_0} \times \overline{\Delta}_{\eta R_0}$. D'après le lemme 2.3-$a$ et les inégalités de Cauchy, on a

$$\frac{1}{P(x,k)} \ll \frac{c_0^{-1}}{k+1} \frac{\eta R}{\eta R - \xi} \quad \text{pour tout } R \in]0, R_0] \text{ et tout } k \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Il est clair que $\mathcal{O}(R,\rho,\omega,\Lambda) \subset D_R \times \Delta_R \subset \mathcal{D}_0 \times \Omega_1$. En outre, en posant pour tout $R > 0$,

$$\Omega_R = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{j=1}^n |x_j| < R\},$$

on observe que

$$\mathcal{O}(R,\rho,\omega,\Lambda) = \bigcup_{r \in]0, R-\omega\Lambda[} D_{r/\rho} \times \Omega_{R-\omega\Lambda-r}; \tag{3.5}$$

autrement dit, $\mathcal{O}(R,\rho,\omega,\Lambda)$ est un ouvert de la forme (2.5). Voici alors une estimation de P^{-1}.

Lemme 3.4. *Il existe une constante c $(= c_0^{-1}\frac{\eta}{\eta-1}) > 0$ telle que : soit $R \in]0, R_0]$, si $U \in \mathcal{K}_\phi$, alors $P^{-1}U \in \mathcal{C}\big([0,\Lambda]; \mathcal{H}(\mathcal{O}(R,\rho,\omega,\Lambda)\big)$ vérifie*

$$P^{-1}U \ll c\|U\|_\phi \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k \frac{D^k\phi(\xi+\omega s)}{(k+1)!}\ . \tag{3.6}$$

Démonstration. Soit $U \in \mathcal{K}_\phi$, alors d'après (3.5) et le lemme 2.5-c, $P^{-1}U \in \mathcal{C}\big([0,\Lambda]; \mathcal{H}(\mathcal{O}(R,\rho,\omega,\Lambda))\big)$. La relation $U(s,t,x) \ll \|U\|_\phi \phi(\tau+\xi+\omega s)$ signifie aussi

$$D_t^k U(s,0,x) \ll \|U\|_\phi \rho^k D^k\phi(\xi+\omega s) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Vu (2.9), on a $D_t^k(P^{-1}U)(s,0,x) = \dfrac{D_t^k U(s,0,x)}{P(x,k)}$ et, d'après (3.3) et (3.4), on en déduit

$$\frac{1}{k!} D_t^k(P^{-1}U)(s,0,x) \ll c\|U\|_\phi \rho^k \frac{D^k\phi(\xi+\omega s)}{k!(k+1)} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N},$$

c'est-à-dire le résultat voulu. □

Note. L'identité

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tau^k \frac{D^k\phi(\xi)}{(k+1)!} = (tD_t+1)^{-1}[\phi(\tau+\xi)]$$

montre que l'opérateur P^{-1} se majore comme l'opérateur $(tD_t+1)^{-1}$.

Nous allons maintenant contrôler les opérateurs S_q. A cet effet, nous utiliserons le lemme suivant [10, lemme 1.4].

Lemme 3.5. *Soit $\phi \in \mathbb{R}_+[[\xi]]$ tel que $0 \ll (R-\xi)\phi(\xi)$, alors pour tout entier $i \leq j$,*

$$R^i \frac{D^i \phi}{i!} \ll R^j \frac{D^j \phi}{j!} \ .$$

Dans les majorations qui vont suivre, toute constante qui dépend des paramètres c_0, η, R_0 déjà fixés, sera notée c, sauf mention expresse. Étant donné que $\overline{D}_{\eta R_0} \times \overline{\Delta}_{\eta R_0} \subset \mathcal{O}_0$, tous les coefficients des opérateurs S_q sont holomorphes et bornés sur $D_{\eta R_0} \times \Delta_{\eta R_0}$. Soit $R \in\,]0, R_0]$, si b désigne l'un de ces coefficients, on a d'après les inégalités de Cauchy,

$$b(t,x) \ll c \frac{\eta R}{\eta R - (\tau + \xi)} \ . \tag{3.7}$$

Lemme 3.6. *Il existe $c > 0$ tel que, pour tout $R \in\,]0, R_0]$, l'opérateur S_q induise une application linéaire continue $S_q : \mathcal{K}_\phi \to \mathcal{K}_{D^q\phi}$ de norme*

$$\|S_q\| \leq \begin{cases} c\rho^{-1} & \text{si } q = 0, \\ c\rho^q & \text{si } q > 0. \end{cases}$$

Démonstration. Soit $U \in \mathcal{K}_\phi$; d'après le lemme 2.5, $S_q U \in \mathcal{C}\big([0,\Lambda]; \mathcal{H}(\mathcal{O}(R,\rho,\omega,\Lambda))\big)$. Si $q = 0$, S_q est une somme finie de termes de la forme

$$b(t,x) t^{l+1} D_t^l D^\alpha P^{-1}, \quad \text{où} \quad l + |\alpha| \leq 1.$$

Grâce à (3.3) et (3.7), nous pouvons faire abstraction du coefficient $b(t,x)$. Vu (3.6), on a

$$t^{l+1} D_t^l D^\alpha P^{-1} U \ll c \|U\|_\phi \rho^{-1} \sum_{k \geq l} \tau^{k+1} \frac{k!}{(k-l)!} \frac{D^{k+|\alpha|}\phi(\xi + \omega s)}{(k+1)!}.$$

Étant donné que $|\alpha| \leq 1$, on a d'après le lemme 3.5,

$$\frac{D^{k+|\alpha|}\phi}{(k+|\alpha|)!} \ll R^{1-|\alpha|} \frac{D^{k+1}\phi}{(k+1)!}.$$

On note que $R^{1-|\alpha|} \leq R_0^{1-|\alpha|} \leq c$; on remarque ensuite que

$$\frac{k!}{(k-l)!} \frac{(k+|\alpha|)!}{(k+1)!} \leq 1 \quad \text{pour tout } k \geq l$$

car $l + |\alpha| \leq 1$. Il en résulte que

$$t^{l+1} D_t^l D^\alpha P^{-1} U \ll c \|U\|_\phi \rho^{-1} \sum_{k \geq l} \tau^{k+1} \frac{D^{k+1}\phi(\xi + \omega s)}{(k+1)!},$$

d'où le résultat voulu dans ce cas.

Lorsque q est > 0, rappelons que l'ordre des opérateurs A_q^{l+q} est $\leq l + q$; à nouveau, on en déduit qu'il s'agit de majorer les opérateurs

$$t^l D_t^h D^\alpha P^{-1}, \quad \text{où} \quad h + |\alpha| \leq l + q, \quad 0 \leq l \leq 1.$$

Vu (3.6), on a

$$t^l D_t^h D^\alpha P^{-1} U \ll c \|U\|_\phi \rho^{h-l} \sum_{k \geq h} \tau^{k-h+l} \frac{k!}{(k-h)!} \frac{D^{k+|\alpha|}\phi(\xi + \omega s)}{(k+1)!}.$$

Étant donné que $h+|\alpha|\le l+q$, on a $\rho^{h-l}\le\rho^q$ et, d'après le lemme 3.5,
$$D^{k+|\alpha|}\phi \ll cD^{k-h+l+q}\phi, \quad \text{où} \quad c=R_0^{l+q-(h+|\alpha|)}.$$
On observe alors que
$$\frac{k!}{(k-h)!}\frac{(k-h+l)!}{(k+1)!}\le 1 \quad \text{pour tout } k\ge h$$
car $0\le l\le 1$. On obtient donc
$$t^l D_t^h D^\alpha P^{-1}U \ll c\|U\|_\phi \rho^q \sum_{k\ge h}\tau^{k-h+l}\frac{D^{k-h+l+q}\phi(\xi+\omega s)}{(k-h+l)!},$$
d'où le lemme. □

Les lemmes 2.5 et 3.3 permettent d'en déduire aisément le corollaire suivant.

Lemme 3.7. *Il existe $c>0$ tel que, pour tout $R\in\,]0,R_0]$, l'opérateur $\mathcal{A}_\gamma$ induise un endomorphisme continu de l'espace $\mathcal{K}_\phi$ de norme $\le c[\rho^{-1}+\sum_{q\in\mathcal{Q}^\star}(\omega^{-1}\rho)^q]$.*

4. Preuve de la proposition 2.4

En choisissant $\rho\ge 1$ tel que $c\rho^{-1}<1/2$ et en prenant ensuite $\omega>0$ suffisamment grand pour que $c\sum_{q\in\mathcal{Q}^\star}(\omega^{-1}\rho)^q<1/2$, on obtient $\|\mathcal{A}_\gamma\|<1$.

Soit $\mathcal{O}\subset\mathcal{D}_0\times\Omega_1$ un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$. On choisit $R\in\,]0,R_0]$ tel que $\overline{D}_R\times\overline{\Delta}_R\subset\mathcal{O}$ puis $\Lambda_0>0$ tel que $\omega\Lambda_0<R$; on pose $\delta_0=\Lambda_0/2$ et $\mathcal{O}'=\mathcal{O}(R,\rho,\omega,\Lambda_0)$. Soient $0<\delta\le\delta_0$ et $v\in\mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta\times\mathcal{O})$. Si $\gamma\in\Gamma_\delta$ est un chemin de longueur $\Lambda\le 2\delta$, on pose $V=v_\gamma\in\mathcal{C}([0,\Lambda];\mathcal{H}(\mathcal{O}))$; l'ensemble $\hat\gamma([0,\Lambda])\times\overline{D}_R\times\overline{\Delta}_R$ étant une partie compacte de $\mathcal{R}_\delta\times\mathcal{O}$, il existe une constante $c_\gamma\ge 0$ telle que V soit bornée par c_γ sur $[0,\Lambda]\times D_R\times\Delta_R$. D'après les inégalités de Cauchy, on a donc
$$\forall s\in[0,\Lambda], \quad V(s,t,x)\ll c_\gamma R\phi(\tau+\xi),$$
où ϕ désigne la simple fonction majorante
$$\phi(\xi)=\frac{1}{R-\xi}$$
à laquelle on peut appliquer les résultats du paragraphe pécédent. Étant donné que $\omega\Lambda<R$, on a
$$\forall s\in[0,\Lambda], \quad \phi(\tau+\xi)\ll\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\omega s)^k}{k!}D^k\phi(\tau+\xi)=\phi(\tau+\xi+\omega s)$$
et on en déduit que la fonction V appartient à l'espace $\mathcal{K}_\phi$. Il en résulte que l'équation (2.12) admet une unique solution $\mathcal{U}$ appartenant à $\mathcal{K}_\phi$ et que la relation (2.13) définit une suite (U_k) de $\mathcal{K}_\phi$ qui converge vers U dans $\mathcal{K}_\phi$. Vu que $\Lambda\le\Lambda_0$, on observe que $\mathcal{O}'\subset\mathcal{O}(R,\rho,\omega,\Lambda)$ et, comme expliqué dans la preuve du lemme 3.2, il existe pour tout compact K de $\mathcal{O}'$ une constante C_K telle que
$$\forall\, U\in\mathcal{K}_\phi, \quad \max_{[0,\Lambda]\times K}|U|\le C_K\|U\|_\phi.$$
Par conséquent, la suite (U_k) converge vers U dans l'espace $\mathcal{C}\big([0,\Lambda];\mathcal{H}(\mathcal{O}')\big)$. Si (u_k) est la suite de $\mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta\times\mathcal{O}')$ définie par (2.8), il est clair d'après le paragraphe 2 que $u_{k,\gamma}=U_k$; d'après le lemme 2.6, la suite (u_k) converge donc uniformément sur tout compact de $\mathcal{R}_\delta\times\mathcal{O}'$ vers une fonction $u\in\mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta\times\mathcal{O}')$. En outre, l'ouvert $\mathcal{O}'$ étant de la forme (2.5) vu (3.5), l'opérateur $\mathcal{A}:\ \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta\times\mathcal{O}')\to\mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta\times\mathcal{O}')$ est continu

par composition d'après les lemmes 2.2 et 2.3. On en déduit que u vérifie (2.7) ; montrons enfin que cette solution est unique. Si $u \in \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}')$ vérifie $u = \mathcal{A}u$, on choisit $R' \in]0, R_0]$ et $\Lambda' \in]0, 2\delta]$ tels que $\overline{D}_{R'} \times \overline{\Delta}_{R'} \subset \mathcal{O}'$ et $\omega\Lambda' < R'$; on pose $\delta' = \Lambda'/2$ et $\mathcal{O}'' = \mathcal{O}(R', \rho, \omega, \Lambda')$. Si $\gamma \in \Gamma_{\delta'}$ est un chemin de longueur $\Lambda \leq \Lambda'$, il s'en suit comme précédemment que u_γ appartient à l'espace $\mathcal{K}_\phi$ associé à ces nouveaux paramètres. Vu que $u_\gamma = \mathcal{A}_\gamma u_\gamma$ et $\|\mathcal{A}_\gamma\| < 1$, on a $u_\gamma = 0$ sur $[0, \Lambda] \times \mathcal{O}(R', \rho, \omega, \Lambda) \supset [0, \Lambda] \times \mathcal{O}''$; ce chemin γ étant arbitraire, on a $u = 0$ sur $\mathcal{R}_{\delta'} \times \mathcal{O}''$, d'où $u \equiv 0$. Ceci termine la preuve de la proposition 2.4. $\square$

Références

1. M. S. Baouendi et C. Goulaouic, *Cauchy problems with characteristic initial hypersurface*, Comm. Pure Appl. Math., **26**, 1973, pp. 455–475. MR0338532 (49:3296)
2. S. Fujiié, *Représentation hypergéométrique des singularités de la solution du problème de Cauchy caractéristique à données holomorphes*, Comm. Partial Diff. Eq., **18** (9-10), 1993, pp. 1589-1629. MR1239925 (95f:35005)
3. S. Fujiié, *Solutions ramifiées des problèmes de Cauchy caractéristiques et fonctions hypergéométriques à deux variables*, Tohoku Mathematical Publications. 6. Sendai : Tohoku University, 59 pp., Thèse, 1997. MR1478161 (99b:33030)
4. Y. Hamada, J. Leray et C. Wagschal, *Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples : problème de Cauchy ramifié ; hyperbolicité partielle*, J. Math. Pures Appl., **55**, 1976, pp. 297–352. MR0435614 (55:8572)
5. J. Leray, *Problème de Cauchy. I. Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy*, Bull. Soc. Math. France, **85**, 1957, pp. 389–429. MR0103328 (21:2102)
6. A. Nabaji et C. Wagschal, *Singularités à croissance lente*, J. Math. Pures Appl., **72**, 1993, pp. 335–375. MR1228997 (94k:35007)
7. S. Ouchi, *Singularities of solutions of equations with noninvolutive characteristics. I. The case of second order Fuchsian equations*, J. Math. Soc. Japan, **45** (2), 1993, pp. 215–251. MR1206651 (94h:35006)
8. P. Pongérard et C. Wagschal, *Ramification non abélienne*, J. Math. Pures Appl., **77**, 1998, pp. 51–88. MR1617590 (99d:35010)
9. P. Pongérard, *Sur une classe d'équations de Fuchs non linéaires*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **7**, 2000, pp. 423–448. MR1792735 (2001j:35003)
10. P. Pongérard, *Problème de Cauchy caractéristique à solution entière*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **8**, 2001, pp. 89–105. MR1818907 (2001m:35009)
11. P. Pongérard, *Ramification des solutions du problème de Cauchy fuchsien au voisinage de l'hypersurface initiale*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **12**, 2005, pp. 493–512. MR2206356 (2007b:35012)
12. J. Urabe, *Meromorphic representations of the solutions of the singular Cauchy problem. II*, J. Math. Kyoto Univ., **28** (2), 1988, pp. 335–342. MR953181 (92c:35005)
13. C. Wagschal, *Sur le problème de Cauchy ramifié*, J. Math. Pures Appl., **53**, 1974, pp. 147–164. MR0382832 (52:3714)
14. H. Yamane, *Singularities in Fuchsian Cauchy problems with holomorphic data*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **34**, 1998, pp. 179–190. MR1617067 (99h:35005)

Université de La Réunion, 23 allée des rubis, 97400 Saint-Denis, La Réunion, France
E-mail address: marc-patrice.pongerard@univ-reunion.fr