

**EXISTENCE GLOBALE DE SOLUTIONS FAIBLES
SOUS UNE HYPOTHÈSE UNILATERALE
POUR UN SYSTÈME HYPERBOLIQUE NON LINÉAIRE***

BY

D. SERRE

École Normale Supérieure de Lyon, Lyon, France

Abstract. We investigate a one-dimensional system of two conservation laws, cited by Leroux. The hyperbolicity region is nonconvex in the phase plane. It is a particular case of a general class studied by B. Temple.

We find a necessary and sufficient condition in order to solve the Riemann problem, using centered waves or shocks. Next, we generalize it to arbitrary initial data, as:

$$\forall x \leq y, \quad w_1(a(y)) \leq w_2(a(x)),$$

w_1, w_2 being the Riemann invariants of the system. Under this hypothesis, we prove a global existence theorem for BV solutions. The proof uses the random choice method of Glimm. The key point is the decrease of the total variation in space of the Riemann invariants, which was pointed out in a previous work.

The above condition does not exclude the development of discontinuities. Moreover, a new kind of wave (neutral wave) occurs in this system.

I. Introduction. Dans un article précédent (SERRE [5]), nous avons étudié les systèmes hyperboliques non linéaires de deux lois de conservation en dimension 1 que B. TEMPLE a caractérisé ([6]). Leurs courbes de k -détente et de k -choc coïncident. Nous avons montré l'existence globale de solutions faibles et la décroissance en temps de la variation totale des invariants de Riemann. L'hypothèse principale précisait que la condition initiale prenait ses valeurs dans un "quadrangle invariant" du domaine d'hyperbolicité.

L'existence découlait de la convergence des approximations suivantes:

- (a) les schémas aux différences finies de Lax, de Godunov et de Glimm,
- (b) la méthode de viscosité. Cette dernière méthode requérait moins d'hypothèses sur le système que les trois autres.

Rappelons que le schéma de Glimm permettait aussi de prouver un découplage en temps fini.

Pour des équations issues de la Chromatographie, B. TEMPLE ([7]) a également prouvé l'existence globale de solutions à l'aide du schéma de Godunov.

*Received April 13, 1987.

La condition relative aux valeurs initiales est assez contraignante puisque les quadrangles invariants sont convexes alors que \mathfrak{H} ne l'est pas. L'objet de ce nouvel article est une étude plus précise d'un cas particulier, cité initialement par LEROUX [3]:

$$\begin{aligned} u_t + (u^2 + v)_x &= 0, \\ v_t + (uv)_x &= 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Le domaine est alors l'extérieur d'une parabole Σ d'équation $4v + u^2 = 0$. Les invariants de Riemann en A , $w_1(A) \leq w_2(A)$, sont les pentes des tangentes à Σ passant par A .

Au paragraphe II, nous étudions le problème de Riemann entre deux états à gauche et à droite A_- et A_+ . Celui-ci n'admet une solution sous forme d'onde centrée que si A_- et A_+ appartiennent à \mathfrak{H} (pour un comportement différent dans d'autres systèmes changeant de type, voir par exemple M. RASCLE [4]), et si une condition supplémentaire est vérifiée (Théorème 4):

$$w_1(A_+) \leq w_2(A_-). \tag{1.2}$$

Cette étude suggère que le problème de Cauchy puisse avoir une solution pourvu qu'une condition unilatérale généralisant (1.2) soit satisfaite. Celle-ci apparaît lorsqu'on veut mettre en oeuvre le schéma de Glimm, puisque celui-ci fait appel à la résolution de problèmes de Riemann successifs. Nous sommes donc amenés à faire l'hypothèse suivante sur la condition initiale $a(x)$:

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, \quad x \leq y \Rightarrow w_1(a(y)) \leq w_2(a(x)). \tag{Q}$$

Ainsi la solution approchée n'entre pas dans la zone elliptique, bien qu'elle puisse atteindre la frontière Σ . La convergence vers une solution faible globale lorsque le pas d'espace tend vers zéro est alors standard puisqu'on a une estimation en variation totale. On obtient donc:

THÉORÈME. Soit $a: \mathbf{R} \rightarrow \mathfrak{H}$ une application vérifiant (Q) et telle que les fonctions $w_k \circ a$ soient à variation bornée. Alors le système (1.1), muni de la condition de Cauchy

$$(u(x, 0), v(x, 0)) = a(x), \quad \text{p.p. } x \in \mathbf{R} \tag{1.3}$$

possède une solution faible entropique sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+$. \square

Remarques.

1. L'hypothèse " $w_k \circ a$ sont à variation bornée" est plus forte, si $a(x)$ atteint Σ une infinité de fois, que " a est à variation bornée".

2. La convergence du schéma de Glimm semble la seule méthode utilisable ici. En effet, ni les schémas de Lax ou de Godunov, ni l'approximation par viscosité ne laissent stable \mathfrak{H} , même sous l'hypothèse (Q).

3. Il apparaît pour ce système un nouveau type d'onde simple centrée que nous appelons onde neutre. Il s'agit d'une solution régulière qui prend ses valeurs sur Σ . Les deux vitesses caractéristiques sont alors confondues.

4. Le résultat de découplage en temps fini (SERRE [5]) ne peut pas être obtenu ici car la condition (Q) n'entraîne pas que

$$\lambda_1(a(+\infty)) \leq \lambda_2(a(-\infty)).$$

II. Le problème de Riemann. Le schéma de Glimm est basé sur la résolution préalable du système (1.1) pour des données initiales particulièrement simples:

$$(u(x, 0), v(x, 0)) = \begin{cases} A_+ & \text{si } x > 0, \\ A_- & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Le problème (1.1), (2.1) est appelé problème de Riemann. Puisque la condition initiale et le système sont invariants par les homothéties $(x, t) \rightarrow (rx, rt)$, on cherche une solution autosemblable:

$$(u(x, t), v(x, t)) = A(x/t).$$

En notant $\dot{}$ la dérivation par rapport à la variable $\sigma = x/t$, le problème devient:

$$\text{Trouver } A(\sigma) \text{ tel que } (u^2 + v)^{\cdot} = \sigma \dot{u}, \quad (uv)^{\cdot} = \sigma \dot{v}, \quad \text{et } A(\pm\infty) = A_{\pm}. \quad (2.2)$$

Nous supposons que A_{\pm} appartiennent à l'adhérence $\bar{\mathfrak{H}}$ du domaine d'hyperbolicité, définie par $u^2 + 4v \geq 0$. On distingue trois types d'ondes simples: les détentes, les chocs et les ondes neutres. Ce dernier type provient de la perte d'hyperbolicité sur la courbe Σ d'équation $u^2 + 4v = 0$. Si la condition initiale se trouve dans un "quadrangle invariant", la solution n'atteindra pas Σ (SERRE [5]). Mais dans le cas général on ne peut pas éviter Σ , comme on le verra plus loin.

2.1. Détentes. On dit que A_- est relié à A_+ par une détente s'il existe une solution régulière de (2.2), dont les valeurs intermédiaires sont dans \mathfrak{H} . Dans ce cas, $\dot{A}(\sigma) = 0$ ou bien σ est égal à l'une des valeurs propres $\lambda_1(A(\sigma)) < \lambda_2(A(\sigma))$ de la matrice Jacobienne

$$J(A) = \begin{pmatrix} 2u & 1 \\ v & u \end{pmatrix}, \quad A = (u, v).$$

Lorsque $\sigma = \lambda_k(A(\sigma))$, on parle d'une k -détente; $\dot{A}(\sigma)$ est alors un vecteur propre à droite de $J(A(\sigma))$, associé à λ_k . Les courbes intégrales du champ de k -vecteurs propres sont donc appelées courbes de k -détente, et $A(\sigma)$ prend ses valeurs sur celle de ces courbes qui est issue de A_- . Pour le système (1.1), il est connu (LEROUX [3]) que les courbes de détente sont les demi-tangentes à Σ . Etant donné un point A de \mathfrak{H} , il passe par A deux demi-tangentes à Σ , notées $\Delta_i(A)$, $i = 1, 2$. Leurs pentes sont notées $w_i(A)$ avec le choix $w_2(A) > w_1(A)$. Ce sont les solutions de l'équation:

$$X^2 + uX - v = 0.$$

En particulier, on a

$$u = -w_1 - w_2, \quad v = -w_1 w_2. \quad (2.3)$$

On vérifie sans peine que $\Delta_k(A)$ est la courbe de k -détente passant par A , et que

$$\lambda_k(A) = 2u(A) + w_k(A). \quad (2.4)$$

A cause de $1 = \frac{d}{d\sigma} \lambda_k(A(\sigma))$, deux points A_- et A_+ situés sur un même demi-tangente Δ_k ne peuvent être joints par une k -détente que si λ_k est monotone croissante de A_- vers A_+ le long de Δ_k . D'après (2.4), ceci équivaut à $u_+ \geq u_-$.

LEMME 1. Le problème de Riemann possède une solution qui est une k -détente si et seulement si

$$w_k(A_+) = w_k(A_-) \quad \text{et} \quad u_+ \geq u_-. \quad \square$$

2.2. Chocs. Un choc de vitesse s est une solution de la forme

$$A(\sigma) = \begin{cases} A_+ & \text{si } x > st, \\ A_- & \text{si } x < st. \end{cases}$$

On l'appelle un k -choc si la condition d'admissibilité de Lax est vérifiée:

$$\lambda_{k-1}(A_-) < s \leq \lambda_k(A_-), \quad \lambda_k(A_+) \leq s < \lambda_{k+1}(A_+). \quad (2.5)$$

Les équations (2.2) s'appellent alors les conditions de Rankine-Hugoniot. En notant $[f] = f^+ - f^-$, elles s'écrivent:

$$[u^2 + v] = s[u] \quad \text{et} \quad [uv] = s[v]. \quad (2.6)$$

Eliminant s , il vient aisément

$$[v]^2 + u^- [u][v] - v^- [u]^2 = 0.$$

Le rapport $[v]/[u]$ est donc l'un des invariants de Riemann $w_k(A_-)$, pente de $\Delta_k(A_-)$. Ainsi $A_+ \in \Delta_k(A_-)$, le choc est un k -choc et la condition de Lax équivaut à

$$u^+ \leq u^-. \quad (2.7)$$

LEMME 2. Le problème de Riemann possède une solution qui est un k -choc si et seulement si

$$w_k(A_+) = w_k(A_-) \quad \text{et} \quad u_+ \leq u_-. \quad \square$$

Le fait que $\Delta_k(A)$, soit simultanément la courbe de détente et la courbe de choc passant par A s'explique par une étude générale de B. TEMPLE [6], mais était déjà connu de LEROUX [3].

2.3. Onde neutre. Une onde neutre est une solution régulière qui prend ses valeurs sur Σ . Comme pour les détentes, σ est la valeur propre de $J(A(\sigma))$. Celle-ci est unique et vaut $\frac{3}{2}u$. Ainsi

$$u(\sigma) = \frac{2\sigma}{3} \quad \text{et} \quad v(\sigma) = -\frac{\sigma^2}{9}.$$

LEMME 3. Le problème de Riemann possède une solution qui est une onde neutre si et seulement si

$$A_-, A_+ \in \Sigma \quad \text{et} \quad u_- \leq u_+. \quad \square$$

2.4. Superposition d'ondes centrées. Soient $Y(x/t)$ et $Z(x/t)$ deux solutions de (1.1) joignant respectivement A_- à A_0 et A_0 à A_+ . Nous dirons qu'elles sont superposables s'il existe un nombre réel s tel que

$$Y(s-0) = A_0 = Z(s+0).$$

Leur superposition est définie par

$$A(\sigma) = Y(\sigma) \quad \text{si } \sigma < s, \quad A(\sigma) = Z(\sigma) \quad \text{si } \sigma > s.$$

C'est une solution du problème de Riemann joignant A_- à A_+ .

Lorsque Y est une 1-onde et Z une 2-onde, elles sont toujours superposables pourvu que l'une au moins soit une détente (il suffit d'utiliser (2.5)).

De plus, une 1-détente, une onde neutre et une 2-détente sont superposables dans cet ordre. Par contre, deux chocs ne le sont pas toujours.

THÉORÈME 4. Soient $A_+, A_- \in \mathfrak{H}$, tels que

$$w_2(A_-) \geq w_1(A_+).$$

Il existe une solution du problème de Riemann obtenue par superposition d'ondes de détente, de k -choc ($k = 1$ ou 2) et d'au plus une onde neutre. \square

Démonstration. On examine deux cas, selon les positions respectives de A_+ par rapport à A_- .

1er cas: Si $w_2(A_+) \geq w_1(A_-)$, il existe un unique point $A_0 \in \overline{\mathfrak{H}}$ tel que

$$w_1(A_0) = w_1(A_-), \quad w_2(A_0) = w_2(A_+).$$

On peut joindre A_- à A_0 par une 1-onde (détente ou choc) $Y(\sigma)$, et A_0 à A_+ par une 2-onde $Z(\sigma)$. On vérifie sans peine que

$$Y(\sigma_0 - 0) = A_0 = Z(\sigma_0 + 0), \quad \sigma_0 = \frac{1}{2}(\lambda_1(A_-) + \lambda_2(A_+)).$$

Les deux ondes sont donc superposables. Remarquons que si $w_1(A_+) = w_2(A_-)$, la superposition des deux ondes (ce sont des chocs) ne prend pas la valeur A_0 .

2ème cas: Si $w_2(A_+) < w_1(A_-)$, il existe une 1-détente joignant A_- à un point B_- de Σ , et une 2-détente joignant un point B_+ de Σ à A_+ . Enfin B_- et B_+ peuvent être joints par une onde neutre, les trois ondes étant superposables.

Voir Figure 1.

2.5. Monotonie. Considérons la solution $A(\sigma)$ construite à l'alinéa précédent. Pour $\sigma < \sigma_-$, $A(\sigma) \in \Delta_1(A_-)$ donc $w_1(A(\sigma)) = w_1(A_-)$. De même pour $\sigma > \sigma_+$, $w_2(A(\sigma)) = w_2(A_+)$. On a $\sigma_- = \sigma_+$, ou bien $\sigma_- < \sigma_+$ s'il y a une onde neutre. Dans ce dernier cas, et pour $\sigma_- \leq \sigma \leq \sigma_+$ on a

$$w_1(A_-) \leq w_1(A(\sigma)) = w_2(A(\sigma)) \leq w_2(A_+).$$

Enfin, il est clair que $w_1(A(\sigma))$ est monotone pour $\sigma > \sigma_+$ de même que $w_2(A(\sigma))$ pour $\sigma < \sigma_-$. Finalement

PROPOSITION 5. On a pour $k = 1, 2$, $\sigma \in \mathbf{R}$:

$$\text{Min}(w_k(A_-), w_k(A_+)) < w_k(A(\sigma)) < \text{Max}(w_k(A_-), w_k(A_+)). \quad \square$$

III. Le schéma de Glimm.

3.1. Condition initiale en escalier. Soit $\{a_j, j \in \mathbf{Z}\}$ une suite bornée de points appartenant à \mathfrak{H} , et

$$a(x) = a_j \quad \text{pour } (j-1)h < x < (j+1)h, \quad j \text{ pair.}$$

Supposons que $w_1(a_{j+2}) \leq w_2(a_j)$.

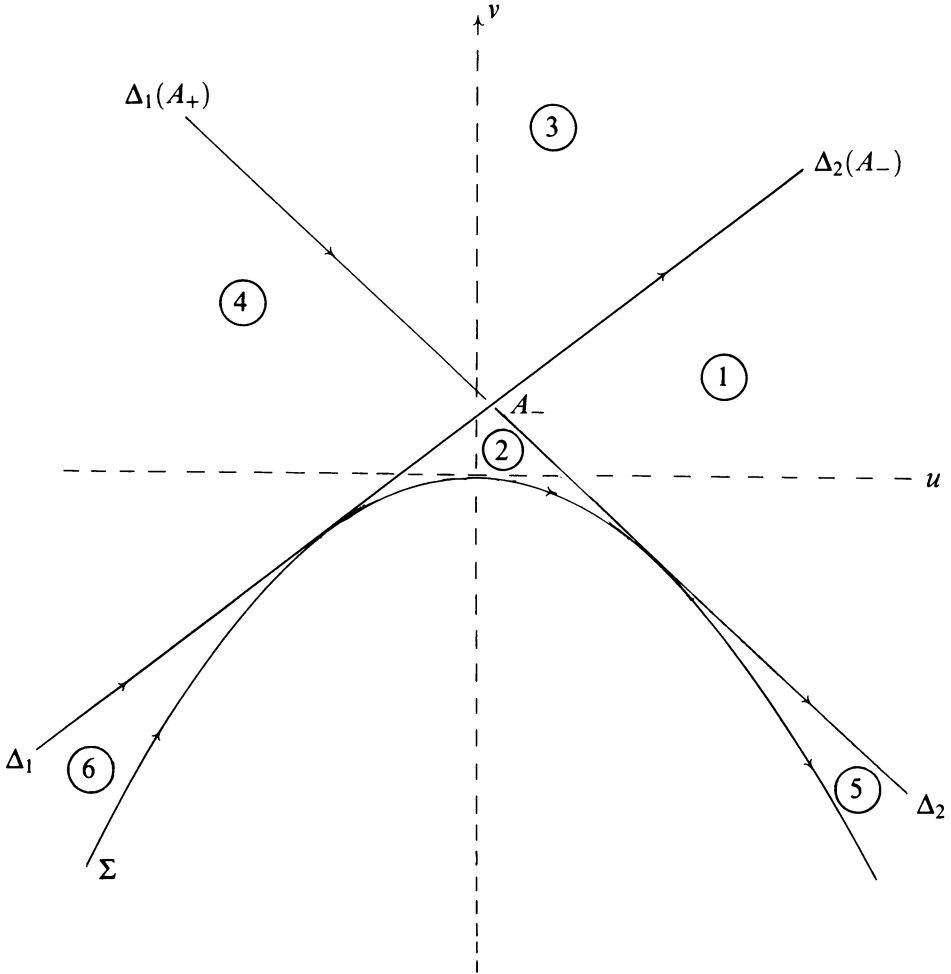


FIG. 1. Solution du problème de Riemann, suivant la position de A_+ .

Zone 1: 1-détente + 2-détente ($D1 + D2$)

Zone 2: $D1 + 2$ -choc ($S2$)

Zone 3: $S1 + D2$

Zone 4: $S1 + S2$

Zone 5: $D1 +$ onde neutre + $D2$

Zone 6: Pas de solution

Il existe alors (Théorème 4) une solution:

$$A_j \left(\frac{x - (j+1)h}{t} \right)$$

du problème de Riemann, joignant a_j à a_{j+2} , et centrée en $(j+1)h$. Les solutions A_j sont superposables pour $0 < t < T^*(a)$ en une solution $A(x, t)$ de (1.1) vérifiant

$$A(x, 0) = a(x), \quad x \notin h + 2\mathbf{Z}h,$$

avec

$$T^*(a) = 2\Delta x / \text{Sup}\{|\lambda_k(a_j)|, \quad j \in 2\mathbf{Z}, \quad k = 1 \text{ ou } 2\}.$$

3.2. Description du schéma. On considère maintenant une condition initiale quelconque $a(x)$, mais bornée et prenant ses valeurs dans $\bar{\mathfrak{H}}$. On pose:

$$\begin{aligned}\alpha &= \text{Inf}\{w_1(a(x)), \quad x \in \mathbf{R}\}, \\ \beta &= \text{Sup}\{w_2(a(x)), \quad x \in \mathbf{R}\}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Puis

$$\begin{aligned}K(\alpha, \beta) &= \{A \in \mathfrak{H}; w_1(A) \geq \alpha, w_2(A) \leq \beta\}, \\ \rho(\alpha, \beta) &= \text{Sup}\{|\lambda_k(A)|; A \in K(\alpha, \beta), k = 1 \text{ ou } 2\}.\end{aligned}$$

On fixe arbitrairement un pas d'espace $\Delta x > 0$ et on prend pour pas de temps

$$\Delta t = \frac{2\Delta x}{\rho(\alpha, \beta)}.\tag{3.2}$$

Nous allons construire une solution approchée du problème de Cauchy pour (1.1), constante par morceaux, dont les valeurs seront des points $a_j^n \in \bar{\mathfrak{H}}$ pour $n \in \mathbf{N}$ et $j \in n + 2\mathbf{Z}$. La construction se fait par récurrence sur n , et dépend d'une suite $\{c_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de nombres réels choisis dans l'intervalle $] - 1, + 1[$.

Pour $n = 0$, on pose

$$a_j^0 = a((j + c_0 + 0)\Delta x).\tag{3.3}$$

Supposons connus les a_j^n , $j \in n + 2\mathbf{Z}$. L'analyse de l'alinéa précédent nous fournit, sous certaine condition, une solution $A_n(x, t)$ du système (1.1) dans la bande

$$n\Delta t < t < (n + 1)\Delta t,$$

vérifiant la condition initiale ($j \in n + 2\mathbf{Z}$):

$$A(x, n\Delta t) = a_j^n, \quad (j - 1)\Delta x < x < (j + 1)\Delta x.\tag{3.4}$$

On pose alors ($j \in n + 1 + 2\mathbf{Z}$):

$$a_j^{n+1} = A_n((j + c_n + 0)\Delta x, (n + 1)\Delta t).\tag{3.5}$$

Cette construction est possible tant que sont vérifiées les deux conditions

$$a_j^n \in K(\alpha, \beta), \quad \forall j \in n + 2\mathbf{Z},\tag{K_n}$$

$$w_1(a_{j+2}^n) \leq w_2(a_j^n), \quad \forall j \in n + 2\mathbf{Z}.\tag{P_n}$$

La deuxième condition assure qu'on peut résoudre les problèmes de Riemann, tandis que la première permet de les superposer pour $n\Delta t < t < (n + 1)\Delta t$, puisqu'alors

$$\Delta t \leq T^*(a^n).$$

La première condition s'obtient par récurrence, en utilisant la proposition 5. Il n'en est pas de même pour (P_n) , qui n'implique pas (P_{n+1}) .

LEMME 6. La propriété

$$j \leq k \Rightarrow w_1(a_k^n) \leq w_2(a_j^n)\tag{Q_n}$$

est récurrente: (Q_n) implique (Q_{n+1}) . \square

Démonstration. Supposons que (Q_n) soit vraie, et choisissons $i \in n + 2\mathbf{Z}$. Il existe clairement $w^i \in \mathbf{R}$, tel que pour $j \leq i \leq k$ (de mêmes parités):

$$w_1(a_k^n) \leq w^i \leq w_2(a_j^n).$$

Soient alors $m, \ell \in n + 1 + 2\mathbf{Z}$, $\ell \leq m$. Si $m = \ell$, on a évidemment $w_1(a_m^{n+1}) \leq w_2(a_\ell^{n+1})$. Sinon, il existe $i \in n + 2\mathbf{Z}$ tel que $\ell < i < m$, et on a (Proposition 5)

$$\begin{aligned} w_1(a_m^{n+1}) &\leq \text{Max}(w_1(a_{m-1}^n), w_1(a_{m+1}^n)) \leq w^i, \\ w_2(a_\ell^{n+1}) &\geq \text{Min}(w_2(a_{\ell-1}^n), w_2(a_{\ell+1}^n)) \geq w^i. \end{aligned}$$

Ainsi, $w_1(a_m^{n+1}) \leq w_2(a_\ell^{n+1})$. Donc (Q_{n+1}) est vraie.

De ce lemme, et de $(Q_n) \Rightarrow (P_n)$, on déduit aisément

PROPOSITION 7. Supposons que

$$x \leq y \Rightarrow w_1(a(y)) \leq w_2(a(x)). \quad (\text{Q})$$

Alors le schéma de Glimm permet de définir les a_j^n quel que soit $n \in \mathbf{N}$. \square

3.3. Estimation BV. Nous faisons maintenant une dernière hypothèse sur la condition initiale: les fonctions $w_k(a(x))$ ($k = 1, 2$) sont à variation bornée sur \mathbf{R} . Ceci entraîne que $a(x)$ est bornée et à variation bornée en vertu de (2.3). La réciproque est fautive en général, si $a(x)$ prend des valeurs arbitrairement proches de Σ .

Rappelons que $\text{VT}(f)$ désigne la variation totale d'une fonction numérique définie sur \mathbf{R} :

$$\text{VT}(f) = \text{Sup}_y \sum_{i \in \mathbf{Z}} |f(y_i) - f(y_{i-1})|$$

où y parcourt l'ensemble des suites réelles croissantes. De même pour une suite $b = \{b_j; j \in \mathbf{Z}\}$ de nombres réels, on pose

$$\text{VT}(b) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} |b_j - b_{j-1}|.$$

On a clairement ($k = 1, 2$)

$$\text{VT}(w_k \circ a^0) \leq \text{VT}(w_k \circ a), \quad (3.6)$$

en remarquant que $y_j = (2j + c_0)\Delta x$ est une suite croissante.

Le point clé dans la démonstration de la convergence du schéma de Glimm est l'estimation suivante:

LEMME 8. Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\text{VT}(w_k \circ a^{n+1}) \leq \text{VT}(w_k \circ a^n). \quad \square$$

Démonstration. Soit $b_j = w(a_j^{n+1})$ pour $j \in n + 1 + 2\mathbf{Z}$, et $d_j = w(a_j^n)$ pour $j \in n + 2\mathbf{Z}$. Par définition,

$$\begin{aligned} \text{VT}(w_k \circ a^{n+1}) &= \sum_{j \in n+2\mathbf{Z}} |b_{j+1} - b_{j-1}|, \\ \text{VT}(w_k \circ a^n) &= \sum_{j \in n+2\mathbf{Z}} |d_j - d_{j-2}|. \end{aligned}$$

Par ailleurs, la proposition 5 assure que

$$\text{Min}(d_j, d_{j-2}) \leq b_{j-1} < \text{Max}(d_j, d_{j-2}),$$

ce qui entraîne

$$|d_j - b_{j-1}| + |b_{j-1} - d_{j-2}| = |d_j - d_{j-2}|. \quad (3.7)$$

Alors

$$\begin{aligned} \text{VT}(w_k \circ a^{n+1}) &\leq \sum_{j \in n+2\mathbf{Z}} \{|b_{j+1} - d_j| + |d_j - b_{j-1}|\} \\ &\leq \sum_{j \in n+2\mathbf{Z}} \{|b_{j-1} - d_{j-2}| + |d_j - b_{j-1}|\}, \end{aligned}$$

en réordonnant la série. Finalement, grâce à (3.7), il vient

$$\begin{aligned} \text{VT}(w_k \circ a^{n+1}) &\leq \sum_{j \in n+2\mathbf{Z}} |d_j - d_{j-2}| \\ &\leq \text{VT}(w_k \circ a^n). \end{aligned}$$

COROLLAIRE 9. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\begin{aligned} \text{VT}(u^n) &\leq \text{VT}(w_1 \circ a) + \text{VT}(w_2 \circ a), \\ \text{VT}(v^n) &\leq \text{Max}(|\alpha|, |\beta|)(\text{VT}(w_1 \circ a) + \text{VT}(w_2 \circ a)). \quad \square \end{aligned}$$

Démonstration. En appliquant le lemme précédent, on obtient par récurrence, avec (3.6):

$$\text{VT}(w_k \circ a_j^n) \leq \text{VT}(w_k \circ a), \quad \forall n \in \mathbf{N}. \quad (3.8)$$

Ensuite, (K_n) et (Q_n) entraînent que

$$\alpha \leq w_k(a_j^n) \leq \beta, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \forall j \in n + 2\mathbf{Z}.$$

Le corollaire s'obtient alors en appliquant (2.3).

Définissons maintenant la solution discrète $A^{c,\Delta x}$ par

$$\begin{aligned} A^{c,\Delta x}(x, t) &= a_j^n \quad \text{pour } n\Delta t \leq t < (n+1)\Delta t \\ &\quad \text{et } (j-1)\Delta x \leq x < (j+1)\Delta x, \quad j \in \mathbf{N} + 2\mathbf{Z} \end{aligned}$$

Une nouvelle application de (2.3) et (3.7) montre que

PROPOSITION 10. Pour tous $0 \leq t, t' < +\infty$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|A^{c,\Delta x}(x, t) - A^{c,\Delta x}(x, t')\| dx \leq M(\Delta t + |t - t'|),$$

où la constante M ne dépend que de $\alpha, \beta, \text{VT}(w_1 \circ a)$, et $\text{VT}(w_2 \circ a)$. \square

Démonstration. Il suffit de remarquer que si $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} |u^{c,\Delta x}(x, (n+1)\Delta t + 0) - u^{c,\Delta x}(x, n\Delta t + 0)| dx \\ &= \Delta x \sum_{j \in n+2\mathbf{Z}} \{|u_{j+1}^{n+1} - u_j^n| + |u_{j-1}^{n+1} - u_j^n|\}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

et de même pour $v^{c,\Delta x}$. En utilisant les formules (2.3), on se ramène à majorer

$$M_1 \Delta x \sum_{j \in n+2\mathbf{Z}} \{|w_k(a_{j+1}^{n+1}) - w_k(a_j^n)| + |w_k(a_{j-1}^{n+1}) - w_k(a_j^n)|\},$$

ce qu'on fait à l'aide de (3.7). Finalement, le second membre de (3.9) est majoré par

$$\Delta t \cdot \frac{1}{2} \rho \{\text{VT}(w_1 \circ a) + \text{VT}(w_2 \circ a)\}.$$

Il y a une majoration analogue pour $v^{c,\Delta x}$.

IV. Existence de solutions faibles.

4.1. Le résultat principal.

THÉORÈME 11. Soit $a: \mathbf{R} \rightarrow \mathfrak{H}$ une fonction vérifiant les hypothèses suivantes:

- i) Les fonctions $x \rightarrow w_k(a(x))$, $k = 1$ ou 2 , sont à variation bornée.
- ii) Pour tout couple $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$x \leq y \rightarrow w_1(a(y)) \leq w_2(a(x)).$$

Alors il existe une solution faible globale $A(x, t)$ du problème de Cauchy (1.1), (1.3), et telle que:

iii)

$$\forall t, t' \in \mathbf{R}^+, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \|A(x, t) - A(x, t')\| dx \leq M|t - t'|.$$

iv) La fonction $A(\cdot, t)$ est donc définie de manière unique dans $L^1(\mathbf{R})$, et on a:

$$\text{VT}(w_k(A(\cdot, t_1))) \leq \text{VT}(w_k(A(\cdot, t_2)))$$

pour $t_1 \geq t_2$. \square

Par ailleurs, on peut déterminer à l'avance un ensemble compact de \mathbf{R}^2 , $K(\alpha, \beta)$, dans lequel $A(x, t)$ prend ses valeurs.

La démonstration de ce Théorème utilise les résultats du paragraphe précédent. La condition initiale $a(x)$ détermine les constantes $\alpha, \beta, \rho = \rho(\alpha, \beta)$.

Pour chaque $\Delta x > 0$, et chaque suite $c \in [-1, +1]^{\mathbf{N}}$, on met en oeuvre le schéma de Glimm. Le pas de temps est donné par la formule (3.2). Grâce à l'hypothèse ii), les a_j^n sont définis pour tout $n \in \mathbf{N}$, et tout $j \in n + 2\mathbf{Z}$.

L'estimation de Glimm [1] (voir aussi SCHATZMAN [3]) montre qu'il existe une partie N de mesure nulle dans $[-1, +1]^{\mathbf{N}}$ telle que si $c \notin N$, alors pour tout champ test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)^2$, la quantité

$$\delta(c, \Delta x, \varphi) = \iint_{\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot A^{c, \Delta x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot f(A^{c, \Delta x}) \right\} dx dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, 0) a(x) dx$$

tend vers zéro lorsque Δx tend vers zéro. On a noté

$$f(u, v) = (u^2 + v, uv).$$

Fixons une suite c n'appartenant pas à N . D'après le corollaire 9 et la proposition 10, il existe une sous-suite Δx_m tendant vers zéro, telle que la suite associée de solutions approchées $A^{c, \Delta x}$ converge dans $L^1(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+)$ et presque partout, vers une limite que nous noterons $A(x, t)$. La suite étant bornée dans $L^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+)$ et φ étant à support compact, le Théorème de Lebesgue entraîne que

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot A + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot f(A) \right\} dx dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, 0) a(x) dx \\ = \lim_{m \rightarrow \infty} \delta(c, \Delta x_m, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)^2. \end{aligned}$$

Ainsi, A est une solution faible du problème de Cauchy (1.1), (1.3), qui satisfait évidemment les estimations iii) et iv), obtenues par passage à la limite sur $A^{c, \Delta x}$.

Enfin le même procédé assure que si $c \notin N_1$ (ensemble de mesure nulle contenant N), alors pour toute entropie convexe E , de flux F , on a aussi l'inégalité au sens des distributions:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \leq 0 \quad \text{dans } \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. GLIMM, *Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations*, C.P.A.M. XVII, 697–715 (1965)
- [2] P. D. LAX, *Hyperbolic systems of conservation laws II*, C.P.A.M. X, 537–566 (1957)
- [3] A. Y. LEROUX and M. SCHATZMAN, *Analyse et approximation de problèmes hyperboliques non linéaires*, Cours INRIA (1978), non publié
- [4] M. RASCLE, *The Riemann problem for a nonlinear non-strictly hyperbolic system arising in biology*, Comp. Math. Appl. 11, 223–238 (1985)
- [5] D. SERRE, *Solutions à variation bornée pour certains systèmes hyperboliques de lois de conservation*, J. D. E. 68, No. 2, 137–168 (1987)
- [6] B. TEMPLE, *Systems of conservation laws with invariant submanifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. 280, 781–795 (1983)
- [7] R. J. LEVEQUE and B. TEMPLE, *Stability of Godunov's method for a class of 2×2 systems of conservation laws*, Trans. Amer. Math. Soc. 288, No. 1, 115–123 (1985)