ZUR LINEAREN TRANSFORMATION DER ϑ-REIHEN*

VON

F. MERTENS

§ 1.

Es sei ω eine complexe Grösse, in welcher der Coefficient von i positiv ist, und zur Abkürzung

$$q = e^{i\pi\omega}.$$

Definirt man die ϑ-Reihen durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\vartheta_0(x, \omega) &= \sum (-1)^n q^{n^2} e^{2n\pi ix}, \\
\vartheta_1(x, \omega) &= -i \sum (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)\pi ix}, \\
\vartheta_2(x, \omega) &= \sum q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)\pi ix}, \\
\vartheta_3(x, \omega) &= \sum q^{n^2} e^{2n\pi ix},
\end{aligned}$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots)$$

so besteht die lineare Transformation dieser Reihen in der Ersetzung von ω durch $(\gamma + \delta\omega)/(\alpha + \beta\omega)$, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze der Gleichung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

genügende Zahlen sind.

Wird zur Abkürzung

$$\alpha + \beta\omega = N, \quad \gamma + \delta\omega = M$$

gesetzt, so kann mit Hilfe der elementaren Transformationsformeln:

$$\begin{aligned}
\vartheta_0(x, 1 + \omega) &= \vartheta_3(x, \omega), \\
\vartheta_1(x, 1 + \omega) &= e^{\frac{i\pi}{4}} \vartheta_1(x, \omega), \\
\vartheta_2(x, 1 + \omega) &= e^{\frac{i\pi}{4}} \vartheta_2(x, \omega), \\
\vartheta_3(x, 1 + \omega) &= \vartheta_0(x, \omega), \\
\vartheta_0\left(\frac{x}{\omega}, -\frac{1}{\omega}\right) &= \sqrt{-i\omega}\, e^{\frac{i\pi x^2}{\omega}} \vartheta_2(x, \omega),
\end{aligned}$$

* Presented to the Society (Chicago) April 6, 1901. Received for publication March 5, 1901.

$$\vartheta_1\left(\frac{x}{\omega}, -\frac{1}{\omega}\right) = -i\sqrt{-i\omega}\, e^{\frac{i\pi x^2}{\omega}}\, \vartheta_1(x, \omega),$$

$$\vartheta_2\left(\frac{x}{\omega}, -\frac{1}{\omega}\right) = \sqrt{-i\omega}\, e^{\frac{i\pi x^2}{\omega}}\, \vartheta_0(x, \omega),$$

$$\vartheta_3\left(\frac{x}{\omega}, -\frac{1}{\omega}\right) = \sqrt{-i\omega}\, e^{\frac{i\pi x^2}{\omega}}\, \vartheta_3(x, \omega),$$

leicht gezeigt werden, dass $\vartheta_1(x/N, M/N)$ die Gestalt $a e^{bx^2}\vartheta_1(x, \omega)$ hat, wo a, b Constanten bezeichnen.

Ist nämlich β nicht $= 0$, so sei β' der kleinste nicht negative Rest von δ in Bezug auf den Theiler β und

$$\delta = g\beta + \beta', \qquad \gamma = g\alpha + \alpha',$$

$$\gamma' = -\alpha, \qquad \delta' = -\beta,$$

$$\alpha' + \beta'\omega = N', \qquad \gamma' + \delta'\omega = M'.$$

Es ist dann

$$\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1, \qquad |\beta'| < |\beta|,$$

$$\vartheta_1\left(\frac{x}{N}, \frac{M}{N}\right) = \vartheta_1\left(\frac{-x}{M'}, g - \frac{N'}{M'}\right) = -e^{\frac{g\pi i}{4}}\vartheta_1\left(\frac{x}{M'}, \frac{-N'}{M'}\right)$$

$$= ie^{\frac{g\pi i}{4}}\sqrt{\frac{-iM'}{N'}}\; e^{\frac{i\pi x^2}{M'N'}}\,\vartheta_1\left(\frac{x}{N'}, \frac{M'}{N'}\right);$$

$\vartheta_1(x/N, M/N)$ wird also die behauptete Gestalt haben, wenn $\vartheta_1(x/N', M'/N')$ sie hat. Die Ausdrücke M', N' sind aber insofern einfacher wie M, N, als $|\beta'| < |\beta|$ ist.

Ist β' noch nicht $= 0$, so können ebenso Ausdrücke

$$M'' = \gamma'' + \delta''\omega, \qquad N'' = \alpha'' + \beta''\omega$$

angegeben werden, in welchen $|\beta''| < |\beta'|$ ist, und $\vartheta_1(x/N, M/N)$ hat zugleich mit $\vartheta_1(x/N'', M''/N'')$ die behauptete Gestalt.

Durch Fortsetzung dieser Schlüsse gelangt man zu einer linearen Transformation $(\gamma^{(m)} + \delta^{(m)}\omega)/(\alpha^{(m)} + \beta^{(m)}\omega)$, in welcher $\beta^{(m)} = 0$ ist. Es genügt daher die behauptete Gestalt von $\vartheta_1(x/N, M/N)$ für den Fall $\beta = 0$ nachzuweisen.

Der Gleichung

$$\alpha\delta = 1$$

zufolge ist dann $\alpha = \delta = \pm 1$ und daher

$$\vartheta_1\left(\frac{x}{N}, \frac{M}{N}\right) = \vartheta_1(\alpha x, \alpha\gamma + \omega) = \alpha\, e^{\frac{\alpha\gamma\pi i}{4}}\,\vartheta_1(x, \omega).$$

Um die Constante b zu bestimmen, ersetze man x durch $x + N$. Es wird

$$\vartheta_1\left(\frac{x+N}{N}, \frac{M}{N}\right) = -\vartheta_1\left(\frac{x}{N}, \frac{M}{N}\right) = a\, e^{b(x+N)^2}\vartheta_1(x+N, \omega)$$

$$= a\, e^{bx^2+2bNx+bN^2}(-1)^{\alpha+\beta}\,\frac{\vartheta_1(x, \omega)}{q^{\beta^2}e^{2\beta\pi i x}}$$

und nach Forthebung von $a\,e^{bx^2}\vartheta_1(x, \omega)$

$$-1 = e^{2(bN-i\beta\pi)x}\, e^{bN^2}\, q^{-\beta^2}(-1)^{\alpha+\beta}\,.$$

Es muss also

$$bN - \beta\pi i = 0, \quad b = \frac{\beta\pi i}{N}$$

sein.

Die grösste Schwierigkeit bereitet die Bestimmung der Constante a. Differentiirt man die Gleichung

$$\vartheta_1\left(\frac{x}{N}, \frac{M}{N}\right) = a\, e^{bx^2}\vartheta_1(x, \omega)$$

nach x und setzt hierauf $x = 0$, so ergiebt sich

$$\frac{1}{N}\vartheta_1'\left(0, \frac{M}{N}\right) = a\,\vartheta_1'(0, \omega)\,.$$

Es ist aber, wenn mit Herrn DEDEKIND

$$\eta(\omega) = q^{\frac{1}{12}}\Pi(1-q^{2n}) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

gesetzt wird,

$$\vartheta_1'(0, \omega) = 2\pi\,\eta^3(\omega)$$

und daher

$$a = \frac{1}{N}\left(\frac{\eta(M/N)}{\eta(\omega)}\right)^3.$$

Die Bestimmung von a ist hierdurch auf die von $\eta(M/N)$ zurückgeführt.

In dem Folgenden soll der Ausdruck $\eta(M/N)$ mit Hilfe der Formeln

$$\eta(1+\omega) = e^{\frac{i\pi}{12}}\eta(\omega),$$

$$\eta\left(-\frac{1}{\omega}\right) = \sqrt{-i\omega}\;\eta(\omega)$$

ermittelt werden.*

---

* HERMITE, Liouville's Journal, Ser. II., T. III.

DEDEKIND, *Erläuterungen zum XXVII Fragment in Riemann's Werken.*

H. WEBER, *Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen* und *Zur Theorie der elliptischen Funktionen*, Acta Mathematica, Bd. VI.

§ 2.

Hilfssatz. Es seien A, B von Null verschiedene complexe Grössen, deren reelle Bestandtheile nicht negativ und nicht beide $= 0$ sind. Zieht man die Quadratwurzeln $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$ so aus, dass ihre reellen Bestandtheile positiv sind, so hat auch das Product $\sqrt{A}\,\sqrt{B}$ einen positiven reellen Bestandtheil und ist daher derjenige Werth der Quadratwurzel $\sqrt{AB}$, welcher dieselbe Eigenschaft hat.

Setzt man

$$\sqrt{A} = a + ia', \quad \sqrt{B} = b + ib',$$

so ist

$$A = a^2 - a'^2 + 2iaa', \quad B = b^2 - b'^2 + 2ibb',$$

$$\sqrt{A}\,\sqrt{B} = ab - a'b' + i(ab' + ba'),$$

und nach der Annahme a, b positiv, eine der Grössen $a^2 - a'^2$, $b^2 - b'^2$ positiv, die andere nicht negativ. Ist etwa $a^2 - a'^2$ positiv, so sind $a + a'$, $a - a'$ positiv. Da ferner die Grössen $b + b'$, $b - b'$ nicht entgegengesetzte Vorzeichen haben und ihre Summe positiv ist, so ist eine derselben positiv, die andere nicht negativ. Daher ist auch eine der Grössen

$$(a + a')(b - b'), \quad (a - a')(b + b')$$

positiv, die andere nicht negativ und ihre Summe $2(ab - a'b')$ somit positiv.

§ 3.

Es sei

$$\alpha + \beta\omega = N, \quad \gamma + \delta\omega = M,$$

wo α, β, γ, δ ganze, der Gleichung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

genügende, Zahlen sind, und es handele sich um die Bestimmung des Ausdrucks $\eta(M/N)$.

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $\alpha\delta$ oder $\beta\gamma$ ungerade ist.

Sind α, δ ungerade, so darf α positiv angenommen werden, da man eintretendenfalls die Vorzeichen aller vier Zahlen α, β, γ, δ umkehren könnte, ohne den Quotienten M/N zu ändern.

Es sei zunächst β gerade und vom Null verschieden.

Der absolut kleinste Rest δ_1 der ungeraden Zahl $\delta - \beta(\gamma + 1)$ in Bezug auf den Theiler 2β ist ungerade und liegt demzufolge, vom Vorzeichen abgesehen, unter β. Setzt man

$$\delta = g\beta + \delta_1, \quad \gamma = g\alpha + \gamma_1,$$

so ist

$$\alpha\delta_1 - \beta\gamma_1 = 1$$

und γ_1 den Congruenzen

$$g \equiv \gamma + 1 \pmod 2),$$

$$\gamma_1 \equiv \gamma - g \pmod 2)$$

zufolge ungerade. Es sei ferner β_1 der absolut kleinste Rest von β in Bezug auf den Theiler $2\delta_1$ und

$$\beta = h\delta_1 + \beta_1, \quad a = h\gamma_1 + a_1,$$

so dass h, β_1 gerade, a_1 ungerade sind.

Bezeichnet $\mathfrak{a}$ die Einheit mit dem Verzeichen von a_1 und setzt man

$$a_1 = \mathfrak{a}a', \quad \beta_1 = \mathfrak{a}\beta', \quad \gamma_1 = \mathfrak{a}\gamma', \quad \delta_1 = \mathfrak{a}\delta',$$

$$a' + \beta'\omega = N', \quad \gamma' + \delta'\omega' = M',$$

so ist

$$a'\delta' - \beta'\gamma' = 1,$$

a' positiv und die Bestimmung von $\eta(M/N)$ auf die von $\eta(M'/N')$ zurückführbar.

Man hat, wenn zur Abkürzung

$$a_1 + \beta_1\omega = N_1, \quad \gamma_1 + \delta_1\omega = M_1,$$

$$e^{\frac{i\pi}{12}} = \rho$$

gesetzt wird,

$$\eta\left(\frac{M}{N}\right) = \eta\left(g + \frac{M_1}{N}\right) = \rho^g \eta\left(\frac{M_1}{N}\right),$$

$$\eta\left(\frac{M_1}{N}\right) = \sqrt{\frac{iN}{M_1}}\,\eta\left(-\frac{N}{M_1}\right),$$

$$\eta\left(\frac{-N}{M_1}\right) = \eta\left(-h - \frac{N_1}{M_1}\right) = \rho^{-h}\eta\left(\frac{-N_1}{M_1}\right),$$

$$\eta\left(\frac{-N_1}{M_1}\right) = \sqrt{\frac{-iM_1}{N_1}}\,\eta\left(\frac{M_1}{N_1}\right) = \sqrt{\frac{-iM_1}{N_1}}\,\eta\left(\frac{M'}{N'}\right),$$

wo die Quadratwurzeln, wie überall in dem Folgenden, mit positivem reellen Bestandtheil auszuziehen sind. Hiernach wird

$$\eta\left(\frac{M}{N}\right) = \rho^{g-h}\sqrt{\frac{iN}{M_1}}\sqrt{\frac{-iM_1}{N_1}}\,\eta\left(\frac{M'}{N'}\right).$$

Bezeichnen $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ die Einheit mit dem Vorzeichen von γ_1 beziehungsweise δ_1, so hat β der Gleichung $\beta = (a\delta_1 - 1)/\gamma_1$ zufolge das Vorzeichen von $\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ und jede der Grössen $iN/M_1, -i\mathfrak{d}M_1, -i\mathfrak{c}\mathfrak{d}N$ einen positiven reellen Bestandtheil, daher ist

$$\sqrt{\frac{iN}{M_1}}\sqrt{-i\mathfrak{d}M_1} = \sqrt{\mathfrak{d}N},$$

$$\sqrt{-i\mathfrak{c}\mathfrak{d}N}\sqrt{\mathfrak{c}i} = \sqrt{\mathfrak{d}N}, \quad \sqrt{-i\mathfrak{c}\mathfrak{d}N}\sqrt{\mathfrak{c}\mathfrak{d}i} = \sqrt{N}$$

und sonach

$$\sqrt{\frac{iN}{M_1}} = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{-i\mathfrak{d}M_1}}\frac{\sqrt{\mathfrak{c}i}}{\sqrt{\mathfrak{c}\mathfrak{d}i}}.$$

Ist β_1 von Null verschieden, so hat es, der Gleichung $\beta_1 = (\alpha_1\delta_1 - 1)/\gamma_1$ zufolge, das Vorzeichen von $\alpha_1\delta_1/\gamma_1$ oder $\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ und die reellen Bestandtheile der Grössen $-iM_1/N_1, -1/i\mathfrak{d}M_1, -i\mathfrak{c}\mathfrak{d}N'$ sind positiv. Sonach ist

$$\sqrt{\frac{-iM_1}{N_1}}\sqrt{\frac{1}{-i\mathfrak{d}M_1}} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{d}N_1}} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{d}N'}},$$

$$\sqrt{-i\mathfrak{c}\mathfrak{d}N'}\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{c}i} = \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{d}N'}, \quad \sqrt{-i\mathfrak{c}\mathfrak{d}N'}\sqrt{\mathfrak{c}\mathfrak{d}i} = \sqrt{N'},$$

und demzufolge

$$\sqrt{\frac{-iM_1}{N_1}} = \frac{\sqrt{-i\mathfrak{d}M_1}}{\sqrt{N'}}\frac{\sqrt{\mathfrak{c}\mathfrak{d}i}}{\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{c}i}}.$$

Diese Gleichung ist aber auch noch richtig, wann $\beta_1 = 0$ ist, weil dann $\alpha_1\delta_1 = 1$, also

$$\alpha_1 = \delta_1 = \mathfrak{a} = \mathfrak{d}, \quad N' = 1,$$

$$\sqrt{\frac{-iM_1}{N_1}} = \sqrt{-i\mathfrak{d}M_1}, \quad \sqrt{i\mathfrak{a}\mathfrak{c}} = \sqrt{\mathfrak{c}\mathfrak{d}i}$$

ist.

Die Einsetzung der gefundenen Werthe von $\sqrt{iN/M_1}, \sqrt{-iM_1/N_1}$ ergiebt

$$\eta\left(\frac{M}{N}\right) = \frac{\rho^{g-h}\sqrt{\mathfrak{c}i}\sqrt{N}}{\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{c}i}\sqrt{N'}}\,\eta\left(\frac{M'}{N'}\right);$$

da aber

$$\mathfrak{c}i = i^{\mathfrak{c}}, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{c}i = i^{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}$$

ist, so wird

$$\sqrt{\mathfrak{c}i} = e^{\frac{\mathfrak{c}\pi i}{4}}, \quad \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{c}i} = e^{\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}\pi i}{4}},$$

$$\frac{\sqrt{\mathfrak{c}i}}{\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{c}i}} = e^{\frac{i\pi}{4}\mathfrak{c}(1-\mathfrak{a})} = i^{\frac{\mathfrak{c}(1-\mathfrak{a})}{2}}$$

und demnach

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\,\eta\left(\frac{M}{N}\right) = \rho^{g-h}i^{\frac{\mathfrak{c}(1-\mathfrak{a})}{2}}\frac{1}{\sqrt{N'}}\,\eta\left(\frac{M'}{N'}\right).$$

Die Potenz

$$i^{\frac{\mathfrak{c}(1-\mathfrak{a})}{2}}$$

lässt sich mit Hilfe des LEGENDRE-JACOBI'schen Zeichens vereinfachen.

Die Identität

$$\begin{aligned}\mathfrak{c}(1-\mathfrak{a}) &= (1-\mathfrak{a})a'\gamma_1 + (\mathfrak{a}-1)(a'\gamma_1 - \mathfrak{c}) \\ &= (a'-a)\gamma_1 + (a-a_1)\gamma_1 + \mathfrak{c}(\mathfrak{a}-1)(a'\mathfrak{c}\gamma_1 - 1)\end{aligned}$$

ergiebt nach Ersetzung von $a - a_1$ durch $h\gamma_1$

$$\mathfrak{c}(1-\mathfrak{a}) = h\gamma_1^2 + (a'-a)\gamma_1 + \mathfrak{c}(\mathfrak{a}-1)(a'\mathfrak{c}\gamma_1 - 1),$$

und es wird daher, weil γ_1 ungerade ist,

$$\mathfrak{c}(1-\mathfrak{a}) \equiv h + (a'-a)\gamma_1 + (\mathfrak{a}-1)(a'\mathfrak{c}\gamma_1 - 1) \pmod 8,$$

$$i^{\frac{\mathfrak{c}(1-\mathfrak{a})}{2}} = i^{\frac{h+(a'-a)\gamma_1}{2}}(-1)^{\frac{\mathfrak{a}-1}{2}\frac{a'\mathfrak{c}\gamma_1-1}{2}}.$$

Es ist aber

$$(-1)^{\frac{\mathfrak{a}-1}{2}\frac{a'\mathfrak{c}\gamma_1-1}{2}} = \left(\frac{\mathfrak{a}}{a'\mathfrak{c}\gamma_1}\right) = \left(\frac{\mathfrak{a}}{a'}\right)\left(\frac{\mathfrak{a}}{\gamma_1}\right),$$

$$i^{\frac{(a'-a)\gamma_1}{2}} = i^{\frac{a-a'}{2}}(-1)^{\frac{a'-1}{2}\frac{\gamma_1+1}{2}}(-1)^{\frac{a-1}{2}\frac{\gamma_1+1}{2}}$$

und nach dem quadratischen Reciprocitätssatze,

$$(-1)^{\frac{a-1}{2}\frac{\gamma_1+1}{2}} = \left(\frac{a'}{-\gamma_1}\right)\left(\frac{-\gamma_1}{a'}\right) = \left(\frac{a'}{\gamma_1}\right)\left(\frac{-\gamma_1}{a'}\right),$$

$$(-1)^{\frac{a-1}{2}\frac{\gamma_1+1}{2}} = \left(\frac{a}{-\gamma_1}\right)\left(\frac{-\gamma_1}{a}\right) \quad \left(\frac{a}{\gamma_1}\right)\left(\frac{-\gamma_1}{a}\right).$$

Aus den Gleichungen

$$a = h\gamma_1 + a_1,$$

$$-\beta\gamma_1 = 1 - a\delta_1, \quad -\beta_1\gamma_1 = 1 - a_1\delta_1$$

folgt überdies

$$\left(\frac{a}{\gamma_1}\right) = \left(\frac{a_1}{\gamma_1}\right) = \left(\frac{\mathfrak{a}a'}{\gamma_1}\right) = \left(\frac{\mathfrak{a}}{\gamma_1}\right)\left(\frac{a'}{\gamma_1}\right),$$

$$\left(\frac{-\beta\gamma_1}{a}\right) = \left(\frac{-\gamma_1}{a}\right)\left(\frac{\beta}{a}\right) = 1, \quad \left(\frac{-\gamma_1}{a}\right) = \left(\frac{\beta}{a}\right),$$

$$\left(\frac{-\beta_1\gamma_1}{a'}\right) = \left(\frac{-\gamma_1}{a'}\right)\left(\frac{\beta_1}{a'}\right) = 1, \quad \left(\frac{-\gamma_1}{a'}\right) = \left(\frac{\beta_1}{a'}\right) = \left(\frac{\mathfrak{a}}{a'}\right)\left(\frac{\beta'}{a'}\right).$$

Somit wird

$$i^{\frac{c(1-\alpha)}{2}} = i^{\frac{h+\alpha-\alpha'}{2}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right).$$

Nach Ersetzung von $i^{h/2}$ durch ρ^{3h} ergiebt sich daher

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\frac{i^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\sqrt{N}}\,\eta\left(\frac{M}{N}\right) = \rho^{g+2h}\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right)\frac{i^{\frac{1-\alpha'}{2}}}{\sqrt{N'}}\,\eta\left(\frac{M'}{N'}\right).$$

Der Factor ρ^{g+2h} kann in zwei andere zerlegt werden, welche beziehungsweise nur von α, β, γ, δ und α', β', γ', δ' abhängen.

Der einfachste Weg zu dieser Zerlegung beruht auf dem Umstande, dass die Produkte $(\alpha^2-1)(\beta^2-1)$, $(\gamma_1^2-1)(\delta_1^2-1)$ Vielfache von 24 sind. Denn einer der Factoren α^2-1, β^2-1 muss nach dem FERMAT'schen Satze ein Vielfaches von 3 sein, weil α, β nicht beide durch 3 theilbar sein können, und α^2-1 ist ein Vielfaches von 8. Dieselben Gründe gelten für $(\gamma_1^2-1)(\delta_1^2-1)$. Es ist daher

$$\left.\begin{aligned} 1 &\equiv \alpha^2+\beta^2-\alpha^2\beta^2 \\ 1 &\equiv \gamma_1^2+\delta_1^2-\gamma_1^2\delta_1^2 \end{aligned}\right\} \pmod{24},$$

und die Multiplication mit g, h ergiebt

$$\left.\begin{aligned} g &\equiv \alpha\, g\alpha + \beta\, g\beta - \alpha^2\beta\, g\beta \\ h &\equiv \gamma_1 h\gamma_1 + \delta_1 h\delta_1 - h\gamma_1^2\delta_1^2 \end{aligned}\right\} \pmod{24}.$$

Nach Ersetzung von $g\alpha$, $g\beta$, $h\gamma_1$, $h\delta_1$, durch $\gamma-\gamma_1$, $\delta-\delta_1$, $\alpha-\alpha_1$, $\beta-\beta_1$ folgt hieraus

$$\left.\begin{aligned} g &\equiv \alpha(\gamma-\gamma_1)+\beta(\delta-\delta_1)-\alpha^2\beta(\delta-\delta_1) \\ h &\equiv \gamma_1(\alpha-\alpha_1)+\delta_1(\beta-\beta_1)-h\gamma_1^2\delta_1^2 \end{aligned}\right\} \pmod{24},$$

und man erhält durch Addition

$$\begin{aligned} g+h \equiv \alpha\gamma-\alpha_1\gamma_1+\beta\delta-\beta_1\delta_1-\alpha^2\beta\delta+\alpha_1^2\beta_1\delta_1 \\ +\delta_1(\alpha^2\beta-\alpha_1^2\beta_1)-h\gamma_1^2\delta_1^2 \pmod{24}. \end{aligned}$$

Ersetzt man aber in den Identitäten

$$\alpha^2\beta-\alpha_1^2\beta_1 = (\alpha^2+\alpha\alpha_1+\alpha_1^2)(\beta-\beta_1)+(\alpha+\alpha_1)(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta),$$

$$\alpha\beta-\alpha_1\beta_1 = (\alpha+\alpha_1)(\beta-\beta_1)+\alpha\beta_1-\alpha_1\beta$$

$\beta-\beta_1$ durch $h\delta_1$, $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta$ durch $-h$, so wird

$$\delta_1(\alpha^2\beta-\alpha_1^2\beta_1) = h\delta_1^2(\alpha^2+\alpha\alpha_1+\alpha_1^2)-h\delta_1(\alpha+\alpha_1),$$

$$\alpha\beta-\alpha_1\beta_1 = h\delta_1(\alpha+\alpha_1)-h,$$

und die Addition ergiebt

$$\delta_1(a^2\beta - a_1^2\beta_1) = -a\beta + a_1\beta_1 - h + h\delta_1^2(a^2 + aa_1 + a_1^2).$$

Mit Hilfe dieser Gleichung nimmt die vorstehende Congruenz für $g + h$, wenn zur Abkürzung

$$A = a\gamma + \beta\delta - a^2\beta\delta - a\beta,$$

$$A' = a'\gamma' + \beta'\delta' - a'^2\beta'\delta' - a'\beta',$$

$$C = h(a^2 + aa_1 + a_1^2 - \gamma_1^2)$$

gesetzt wird, die Gestalt

$$g + 2h \equiv A - A' + \delta_1^2 C \pmod{24}$$

an.

Nach Ersetzung von a durch $h\gamma_1 + a_1$ wird ferner

$$C = (h^3 - h)\gamma_1^2 + 3h^2 a_1\gamma_1 + 3ha_1^2.$$

Es ist also einerseits, weil $h^3 - h$ nach dem FERMAT'schen Satze ein Vielfaches von 3 ist,

$$C \equiv 0 \pmod 3$$

und anderseits, weil h gerade, a_1 und γ_1 ungerade sind,

$$C \equiv -h + h^2 + 3h = 4\frac{h}{2}\left(\frac{h}{2} + 1\right) \pmod 8$$

$$\equiv 0 \pmod 8.$$

Da hiernach C ein Vielfaches von 24 ist, so folgt

$$g + 2h \equiv A - A' \pmod{24},$$

$$\rho^{g+2h} = \rho^{A-A'},$$

und man hat

$$\left(\frac{\beta}{a}\right)\frac{i^{\frac{1-a}{2}}\rho^{-A}}{\sqrt{N}}\,\eta\left(\frac{M}{N}\right) = \left(\frac{\beta'}{a'}\right)\frac{i^{\frac{1-a'}{2}}\rho^{-A'}}{\sqrt{N'}}\,\eta\left(\frac{M'}{N'}\right).$$

Diese Gleichung zeigt, dass der Ausdruck

$$\left(\frac{\beta}{a}\right)\frac{i^{\frac{1-a}{2}}\rho^{-A}}{\sqrt{N}}\,\eta\left(\frac{M}{N}\right)$$

ungeändert bleibt, wenn man von den Zahlen a, β, γ, δ zu $a', \beta', \gamma', \delta'$ übergeht. Letztere Zahlen besitzen aber dieselben Eigenschaften, welche bei den ursprünglichen Zahlen a, β, γ, δ vorausgesetzt werden und sind insofern einfacher, als $|\beta'| < |\beta|$ ist. Denn es ist

$$a'\delta' - \beta'\gamma' = 1,$$

a', δ' ungerade, β' gerade, a' positiv und $|\beta'| < |\delta_1| < |\beta|$.

Ist β' noch nicht $= 0$, so kann eine neue Reihe von vier Zahlen a'', β'', γ'', δ'' ermittelt werden, für welche der vorstehende Ausdruck denselben Werth hat wie für a, β, γ, δ. Da die Zahlen $|\beta|$, $|\beta'|$, $\cdots$ eine abnehmende Reihe bilden, so führt dieses Verfahren nach einigen Schritten zu vier Zahlen $a^{(n)}$, $\beta^{(n)}$, $\gamma^{(n)}$, $\delta^{(n)}$, deren zweite $= 0$ ist.

Hiermit ist die Aufgabe in allen Fällen auf die Bestimmung des vorstehenden Ausdruckes in dem Falle $\beta = 0$ zurückgeführt. Dann ist aber

$$a = \delta = 1, \quad A = \gamma, \quad \left(\frac{\beta}{a}\right) = \left(\frac{0}{1}\right) = 1,$$

und der fragliche Ausdruck wird

$$= \rho^{-\gamma}\, \eta(\gamma + \omega) = \eta(\omega).$$

Somit ist bei geradem β

$$\eta\left(\frac{M}{N}\right) = \left(\frac{\beta}{a}\right) i^{\frac{a-1}{2}} \rho^{A} \sqrt{N}\, \eta(\omega).$$

Ist β ungerade, so ist $\beta - a$ gerade, $\delta - \gamma$ ungerade,

$$a(\delta - \gamma) - (\beta - a)\gamma = 1$$

und daher nach dem vorhergehenden Falle

$$\eta\left(\frac{M}{N}\right) = \eta\left[\frac{\gamma + \dfrac{(\delta - \gamma)\omega}{1 + \omega}}{a + \dfrac{(\beta - a)\omega}{1 + \omega}}\right] = \left(\frac{\beta - a}{a}\right) i^{\frac{a-1}{2}} \rho^{C} \sqrt{\frac{N}{1 + \omega}}\, \eta\left(\frac{\omega}{1 + \omega}\right),$$

wo

$$C = a\gamma + (\beta - a)(\delta - \gamma)(1 - a^2) - a(\beta - a).$$

Es ist aber

$$\left(\frac{\beta - a}{a}\right) = \left(\frac{\beta}{a}\right),$$

$$\begin{aligned} C - A - 1 &= (1 - a^2)(a\gamma - a\delta - \beta\gamma - 1) \\ &= (a^3 - a)(2\delta - \gamma) \\ &\equiv 0 \pmod{24}, \end{aligned}$$

weil $a^3 - a$ durch 3 und 8 theilbar ist, und

$$\eta\left(\frac{\omega}{1+\omega}\right) = \sqrt{\frac{i(1+\omega)}{\omega}}\,\eta\left(-1-\frac{1}{\omega}\right)$$

$$= \rho^{-1}\sqrt{\frac{i(1+\omega)}{\omega}}\;\eta\left(-\frac{1}{\omega}\right)$$

$$= \rho^{-1}\sqrt{\frac{i(1+\omega)}{\omega}}\;\sqrt{-i\omega}\,\eta(\omega).$$

Da überdies die Grössen iN/ω, $-i\omega/(1+\omega)$, $-i\omega$ positive reelle Bestandtheile haben, so wird

$$\sqrt{\frac{iN}{\omega}}\sqrt{\frac{-i\omega}{1+\omega}} = \sqrt{\frac{N}{1+\omega}}, \quad \sqrt{\frac{iN}{\omega}}\sqrt{-i\omega} = \sqrt{N}$$

und demnach

$$\sqrt{\frac{N}{1+\omega}} = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{-i\omega}}\sqrt{\frac{-i\omega}{1+\omega}}.$$

Daher ist, wie bei geradem β,

$$\eta\left(\frac{M}{N}\right) = \left(\frac{\beta}{a}\right) i^{\frac{a-1}{2}} \rho^{A} \sqrt{N}\,\eta(\omega).$$

§ 4.

Es sei $\beta\gamma$ ungerade. Man darf β positiv annehmen.

Man hat

$$\eta\left(\frac{M}{N}\right) = \eta\left\{\frac{\delta + \gamma\dfrac{1}{\omega}}{\beta + a\dfrac{1}{\omega}}\right\}$$

und daher auf Grund des bereits erledigten Falles

$$\eta\left(\frac{M}{N}\right) = \left(\frac{-a}{\beta}\right) i^{\frac{\beta-1}{2}} \rho^{B} \sqrt{\frac{N}{\omega}}\,\eta\left(\frac{-1}{\omega}\right),$$

wo

$$B = \beta\delta + a\gamma - a\gamma\beta^2 + a\beta$$

ist. Es ist aber

$$\left(\frac{-a}{\beta}\right) = \left(\frac{-1}{\beta}\right)\left(\frac{a}{\beta}\right) = (-1)^{\frac{\beta-1}{2}}\left(\frac{a}{\beta}\right),$$

$$\eta\left(\frac{-1}{\omega}\right)=\sqrt{-i\omega}\,\eta(\omega),$$

$$\sqrt{-iN}\,\frac{1}{\sqrt{-i\omega}}=\sqrt{\frac{N}{\omega}}$$

und sonach

$$\eta\left(\frac{M}{N}\right)=\left(\frac{a}{\beta}\right)i^{\frac{1-\beta}{2}}\,\rho^{B}\sqrt{-iN}\,\eta(\omega).$$