ÜBER DIE REDUCIBILITÄT DER GRUPPEN LINEARER HOMOGENER SUBSTITUTIONEN*

VON

ALFRED LOEWY

In dem folgenden Aufsatze beehre ich mich, im § 1 einen neuen Fundamentalsatz aus der Theorie der Gruppen linearer homogener Substitutionen mitzuteilen; derselbe bezieht sich auf die Reducibilität irgend einer Gruppe linearer homogener Substitutionen und ist wegen seines allgemeinen Charakters sehr anwendungsfähig. In der vorliegenden Arbeit habe ich mich darauf beschränkt, den fraglichen Satz im § 2 und § 3 auf endliche Gruppen und auf diejenige Gruppengattung, die ich früher als Gruppen vom Typus einer endlichen Gruppe bezeichnete, anzuwenden. In der Einleitung möchte ich mir nur noch erlauben, kurz darauf hinzuweisen, dass der Satz „Bei allen Zerlegungen eines linearen homogenen Differentialausdruckes in irreducible Factoren lassen die Factoren sich eineindeutig so zuordnen, dass die zugeordneten Factoren, als lineare homogene Differentialgleichungen aufgefasst, dieselbe Rationalitätsgruppe besitzen" † ein unmittelbares Corollar des hier im § 1 mitgeteilten Satzes ist; dies ergiebt sich sofort aus den Bemerkungen, die ich in den Leipziger Berichten dem eigentlichen Beweise des angeführten Satzes vorausschickte.

In § 4 und § 5 setze ich voraus, dass eine Gruppe linearer homogener Substitutionen vorgelegt sei, bei der alle Coefficienten sämtlicher Substitutionen Zahlen aus einem Körper Ω sind; unter dieser Annahme führe ich dann die analogen Untersuchungen wie im § 1 und § 2 durch.

§ 1.

Die Gruppen linearer homogener Substitutionen in n Variablen lassen sich in zwei grosse Klassen, nämlich in *reducible* und *irreducible*, einteilen. Eine Gruppe linearer homogener Substitutionen in n Variablen heisst *reducibel*, wenn man $m < n$ lineare homogene Functionen der Variablen mit constanten Coeffi-

* Presented to the Society at the Evanston meeting, September 2, 1902. Received for publication, August 7, 1902.

† A. LOEWY, *Über die irreduciblen Factoren eines linearen homogenen Differentialausdruckes.* Berichte der math.-phys. Classe der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wiss. zu Leipzig, Januar, 1902.

cienten finden kann, welche durch eine jede Substitution der vorgelegten Gruppe nur unter sich transformirt werden. Anders ausgedrückt: Für eine jede reducible Gruppe G linearer homogener Substitutionen in n Variablen existirt notwendig eine Matrix P $n$ten Grades von nicht verschwindender Determinante, dass die Matrices sämtlicher Substitutionen der ähnlichen Gruppe $\bar{G} = PGP^{-1}$ von der Form:

$$(a)\qquad \begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline a_{m+1\,1} & a_{m+1\,2} & \cdots & a_{m+1\,m} & a_{m+1\,m+1} & a_{m+1\,m+2} & \cdots & a_{m+1\,n} \\ a_{m+2\,1} & a_{m+2\,2} & \cdots & a_{m+2\,m} & a_{m+2\,m+1} & a_{m+2\,m+2} & \cdots & a_{m+2\,n} \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & a_{n\,m+1} & a_{n\,m+2} & \cdots & a_{nn} \end{array}$$

werden ($m < n$).

Eine jede Permutationsgruppe ist, als Gruppe linearer homogener Substitutionen betrachtet, stets reducibel; denn bei ihr wird die Summe der Variablen in sich transformirt.

Unterdrückt man in einer jeden Matrix der Gruppe $\bar{G}$ die letzten $n - m$ Colonnen und Zeilen, so wird einer jeden Matrix der Gruppe $\bar{G}$ eine Matrix zugeordnet, die nach (a) die Form hat:

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm}; \end{array}$$

die Gesamtheit von Matrices $m$ten Grades, die so allen Matrices der Gruppe $\bar{G}$ entspricht, bildet offenbar eine mit $\bar{G}$ isomorphe Gruppe, die wir mit $\bar{G}_{11}$ bezeichnen wollen.

Unterdrückt man ferner in einer jeden Matrix der Gruppe $\bar{G}$ die ersten m Colonnen und Zeilen, so wird einer jeden Matrix von $\bar{G}$ eine weitere Matrix zugeordnet; diese hat die Form:

$$\begin{array}{cccc} a_{m+1\,m+1} & a_{m+1\,m+2} & \cdots & a_{m+1\,n} \\ a_{m+2\,m+1} & a_{m+2\,m+2} & \cdots & a_{m+2\,n} \\ \vdots & & & \\ a_{n\,m+1} & a_{n\,m+2} & \cdots & a_{nn}. \end{array}$$

Die Gesamtheit der auf diese Art gewonnenen Matrices $n - m$ten Grades bildet auch eine zu $\bar{G}$ isomorphe Gruppe, die wir mit $\bar{G}_{22}$ bezeichnen. Bezeichnet man noch die Gesamtheit der Matrices, die aus den Matrices von $\bar{G}$ durch Streichen der ersten m Zeilen und letzten $n-m$ Colonnen hergeleitet wird, mit $\bar{G}_{21}$, so kann $\bar{G}$ auch leicht verständlich in der Form:

$$\begin{matrix} \bar{G}_{11} & 0 \\ \bar{G}_{21} & \bar{G}_{22} \end{matrix}$$

geschrieben werden.

Hat man eine reducible Gruppe G linearer homogener Substitutionen, so kann man offenbar, wie aus dem Voraufgehenden folgt, durch wiederholte Einführung linearer homogener Functionen der Variablen mit constanten Coefficienten, die Gruppe G durch eine Matrix R von nicht verschwindender Determinante, in eine ähnliche $\mathfrak{A} = RGR^{-1}$ transformiren, dass diese die Form:

$$(\mathfrak{A}) \qquad \begin{matrix} \mathfrak{a}_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ \mathfrak{a}_{21} & \mathfrak{a}_{22} & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ \mathfrak{a}_{31} & \mathfrak{a}_{32} & \mathfrak{a}_{33} & 0 & \cdots 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \mathfrak{a}_{\lambda-11} & \mathfrak{a}_{\lambda-12} & \mathfrak{a}_{\lambda-13} & \mathfrak{a}_{\lambda-14} & \cdots \mathfrak{a}_{\lambda-1\,\lambda-1} & 0 \\ \mathfrak{a}_{\lambda 1} & \mathfrak{a}_{\lambda 2} & \mathfrak{a}_{\lambda 3} & \mathfrak{a}_{\lambda 4} & \cdots \mathfrak{a}_{\lambda\,\lambda-1} & \mathfrak{a}_{\lambda\lambda} \end{matrix}$$

annimt; dabei bedeutet $\mathfrak{a}_{ki}$ ($k \geqq i$) eine Gesamtheit von Matrices mit f_k Zeilen und f_i Colonnen. Die *Teilgruppen* $\mathfrak{a}_{ii}$ ($i = 1, 2, \cdots \lambda$) sollen nach der vorgenommenen Transformation, was stets möglich ist und worauf für das Folgende besonderes Gewicht zu legen ist, *ausnahmslos irreducible Gruppen* sein.

Hat man eine reducible Gruppe G derartig in eine ähnliche Gruppe transformirt, dass alle in der Diagonale stehenden Matrices $\mathfrak{a}_{ii}$ ($i = 1, 2, \cdots, \lambda$) irreducible Gruppen sind, so sagen wir, die Gruppe G ist *unter Hervorhebung ihrer irreduciblen Bestandteile oder Teilgruppen in eine ähnliche Gruppe transformirt worden.* Die in der Diagonale stehenden irreduciblen Gruppen $\mathfrak{a}_{ii}$ ($i = 1, 2, \cdots, \lambda$) nennen wir die *irreduciblen Bestandteile oder Teilgruppen von G, die sich bei der Darstellung von G in der Form $\mathfrak{A}$ ergeben.*

Die Überführung einer Gruppe G in eine ähnliche unter Hervorhebung der irreduciblen Bestandteile ist durchaus nicht eindeutig. Es gilt nun der folgende Fundamentalsatz, mit dessen Beweis wir uns beschäftigen wollen:

Wie auch immer eine Gruppe G linearer homogener Substitutionen unter Hervorhebung ihrer irreduciblen Bestandteile in eine ähnliche Gruppe transformirt wird, so kann man die irreduciblen Bestandteile, die sich bei irgend einer Darstellung ergeben, den irreduciblen Bestandteilen, die sich bei irgend einer anderen Darstellung ergeben, eineindeutig so zuordnen, dass zwei zugeordnete irreducible Teilgruppen gleich viele Variablen haben und ähnliche Gruppen sind.

Sieht man also ähnliche Gruppen als nicht verschieden an, so sind die irreduciblen Teilgruppen einer linearen homogenen Substitutionsgruppe G, die sich bei allen Transformationen von G in ähnliche Gruppen unter Hervorhebung der irreduciblen Bestandteile ergeben, bis auf die Reihenfolge völlig eindeutig bestimmt.

Es sei G unter Hervorhebung seiner irreduciblen Bestandteile in Form der ähnlichen Gruppe $\mathfrak{A}$ dargestellt; ferner möge G unter Hervorhebung seiner irreduciblen Bestandteile in die ähnliche Gruppe $\mathfrak{B}$ der Form:

$$(\mathfrak{B}) \qquad \begin{matrix} \mathfrak{b}_{11} & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ \mathfrak{b}_{21} & \mathfrak{b}_{22} & 0 & \cdots 0 & 0 \\ \mathfrak{b}_{31} & \mathfrak{b}_{32} & \mathfrak{b}_{33} & \cdots 0 & 0 \\ \vdots \\ \mathfrak{b}_{\mu-1\,1} & \mathfrak{b}_{\mu-1\,2} & \mathfrak{b}_{\mu-1\,3} & \cdots \mathfrak{b}_{\mu-1\,\mu-1} & 0 \\ \mathfrak{b}_{\mu 1} & \mathfrak{b}_{\mu 2} & \mathfrak{b}_{\mu 3} & \cdots \mathfrak{b}_{\mu\,\mu-1} & \mathfrak{b}_{\mu\mu} \end{matrix}$$

transformirt werden können. Dabei bedeutet $\mathfrak{b}_{ki}$ eine Gesamtheit von Matrices von g_k Zeilen und g_i Colonnen; $\mathfrak{b}_{ii}(i = 1, 2, \cdots, \mu)$ sind Matrices irreducibler Gruppen linearer homogener Substitutionen in g_i Variablen.

Unser Satz behauptet, dass sich die irreduciblen Gruppen:

$$\mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{22}, \cdots, \mathfrak{a}_{\lambda\lambda}$$

und

$$\mathfrak{b}_{11}, \mathfrak{b}_{22}, \cdots, \mathfrak{b}_{\mu\mu}$$

einander eineindeutig so zuordnen lassen, dass jedem $\mathfrak{b}_{kk}$ ein $\mathfrak{a}_{ii}$ entspricht, $f_i = g_k$ wird und die zwei zugeordneten Gruppen stets innerhalb der allgemeinen linearen homogenen Gruppe von $g_k = f_i$ Variablen ähnlich sind.

Unser Satz gilt sicher für Gruppen in $n = 1$ Variablen; denn für $n = 1$ ist eine Gruppe linearer homogener Substitutionen notwendig irreducibel. Wir können daher das Theorem für alle Gruppen in $n - 1$ oder einer geringeren Anzahl von Variablen als bewiesen ansehen und brauchen es nur noch für solche in n Variablen zu beweisen.

Die Substitutionen von $\mathfrak{A}$ seien von der Form:

$$y_i = \sum_{s=1}^{s=n} a_{is}^{(t)} y'_s, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n);$$

t habe dabei die Werte $1, 2, 3, \cdots$, und charakterisire die einzelnen Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{A}$.

Die Transformationen von $\mathfrak{B}$ mögen:

$$z_i = \sum_{s=1}^{s=n} b_{is}^{(t)} z'_s, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

lauten; der obere Index t, welcher die Werte 1, 2, 3, $\cdots$ annehmen möge, soll dabei die einzelnen Transformationen der Gruppe $\mathfrak{B}$ angeben. Da $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Darstellungen der Gruppe G unter Hervorhebung der irreduciblen Teilgruppen vorstellen und wir G als reducible Gruppe annehmen, so werden einige der Coefficienten $a_{ik}^{(t)}$ und $b_{ik}^{(t)}$ für jeden möglichen Wert des t, d. h. durchgehend in allen Substitutionen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ den Wert Null haben.

Die Gruppe G ist ähnlich zu $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, daher werden die zwei Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ unter einander ähnlich sein, d. h. es werden zwei cogrediente Transformationen:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= q_{11} y_1 + q_{12} y_2 + \cdots + q_{1n} y_n, \\
z_2 &= q_{21} y_1 + q_{22} y_2 + \cdots + q_{2n} y_n, \\
&\vdots \\
z_n &= q_{n1} y_1 + q_{n2} y_2 + \cdots + q_{nn} y_n,
\end{aligned} \tag{1}
$$

und

$$
z_i' = q_{i1} y_1' + q_{i2} y_2' + \cdots + q_{in} y_n', \qquad (i=1, 2, \cdots, n), \tag{1'}
$$

mit nicht verschwindender Determinante $|q_{ik}|$ existiren, welche alle Transformationen der Gruppe $\mathfrak{A}$ in diejenigen von $\mathfrak{B}$ überführen, also wird die symbolische Relation:

$$\mathfrak{B} = Q \mathfrak{A} Q^{-1}$$

statthaben.

Es ist noch nötig, die Substitutionen von $\mathfrak{a}_{11}$ und $\mathfrak{b}_{11}$ herauszugreifen; die Substitutionen von $\mathfrak{a}_{11}$ mögen die Form:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}^{(t)} y_1' + a_{12}^{(t)} y_2' + \cdots + a_{1f_1}^{(t)} y_{f_1}', \\
y_2 &= a_{21}^{(t)} y_1' + a_{22}^{(t)} y_2' + \cdots + a_{2f_1}^{(t)} y_{f_1}', \qquad (t=1, 2, 3, \cdots; f_1 < n) \\
&\vdots \\
y_{f_1} &= a_{f_1 1}^{(t)} y_1' + a_{f_1 2}^{(t)} y_2' + \cdots + a_{f_1 f_1}^{(t)} y_{f_1}',
\end{aligned} \tag{2}
$$

die von $\mathfrak{b}_{11}$ die Form:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= b_{11}^{(t)} z_1' + b_{21}^{(t)} z_2' + \cdots + b_{1g_1}^{(t)} z_{g_1}', \\
z_2 &= b_{21}^{(t)} z_1' + b_{22}^{(t)} z_2' + \cdots + b_{2g_1}^{(t)} z_{g_1}', \qquad (t=1, 2, \cdots; g_1 < n) \\
&\vdots \\
z_{g_1} &= b_{g_1 1}^{(t)} z_1' + b_{g_1 2}^{(t)} z_2' + \cdots + b_{g_1 g_1}^{(t)} z_{g_1}',
\end{aligned} \tag{3}
$$

haben. Beim Beweise sind zwei Fälle zu unterscheiden:

I. Es sei l eine der Zahlen $1, 2, \cdots, g_1$, und es möge

$$z_l = q_{l1} y_1 + q_{l2} y_2 + \cdots + q_{lf_1} y_{f_1} \tag{4}$$

und infolgedessen für die cogrediente Substitution:

$$z_l' = q_{l1} y_1' + q_{l2} y_2' + \cdots + q_{lf_1} y_{f_1}' \tag{4'}$$

sein, also

$$q_{lf_1+1} = q_{lf_1+2} = \cdots = q_{ln} = 0.$$

Dann wird nach (4) und (2):

$$(5)\qquad z_l = \sum_{s=1}^{s=f_1} q_{ls} a_{s1}^{(t)} y_1' + \sum_{s=1}^{s=f_1} q_{ls} a_{s2}^{(t)} y_2' + \cdots + \sum_{s=1}^{s=f_1} q_{ls} a_{sf_1}^{(t)} y_{f_1}';$$

aus (3) und (1′) ergiebt sich:

$$(6)\qquad z_l = \sum_{s=1}^{s=g_1} b_{ls}^{(t)} q_{s1} y_1' + \sum_{s=1}^{s=g_1} b_{ls}^{(t)} q_{s2} y_2' + \cdots + \sum_{s=1}^{s=g_1} b_{ls}^{(t)} q_{sn} y_n'.$$

Der Vergleich von (5) und (6) lehrt, es müssen die Coefficienten von $y_{f_1+1}', y_{f_1+2}', \cdots, y_n'$ in (6) verschwinden, d. h. es müssen die Relationen bestehen:

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\sum_{s=1}^{s=g_1} b_{ls}^{(t)} q_{sf_1+1} = 0, \\ &\sum_{s=1}^{s=g_1} b_{ls}^{(t)} q_{sf_1+2} = 0, \\ &\quad\vdots \\ &\sum_{s=1}^{s=g_1} b_{ls}^{(t)} q_{sn} = 0. \end{aligned} \qquad (t=1, 2, \cdots)$$

Betrachten wir die erste derselben und bedenken, dass nach (4) $q_{lf_1+1} = 0$ ist, so lautet sie:

$$(7_1)\quad b_{l1}^{(t)} q_{1f_1+1} + b_{l2}^{(t)} q_{2f_1+1} + \cdots b_{ll-1}^{(t)} q_{l-1f_1+1} + b_{ll+1}^{(t)} q_{l+1f_1+1} + \cdots + b_{lg_1}^{(t)} q_{g_1f_1+1} = 0.$$

Nach Untersuchungen von Herrn Maschke* muss, da $\mathfrak{b}_{11}$ eine irreducible Gruppe linearer Substitutionen in g_1 Variablen ist, t mindestens $= g_1 - 1$ sein; denn eine jede Gruppe linearer homogener Substitutionen, bei der die Anzahl der Substitutionen gleich oder kleiner als die um 2 verminderte Zahl der Substitutionsvariablen ist, muss notwendig reducibel sein. (7_1) stellt daher ein System von $t \geqq g_1 - 1$ linearen homogenen Gleichungen für die $g_1 - 1$ Grössen $q_{1f_1+1}, q_{2f_1+1}, \cdots, q_{l-1f_1+1}, q_{l+1f_1+1}, q_{l+2f_1+1}, \cdots, q_{g_1f_1+1}$ dar; l ist dabei eine durch (4) ganz bestimmt fixirte Zahl aus der Reihe der Zahlen $1, 2, \cdots, g_1$. Sollen nun nicht sämtliche der angegebenen $g_1 - 1$ Grössen

$$q_{1f_1+1}, \cdots, q_{l-1f_1+1}, q_{l+1f_1+1}, \cdots, q_{g_1f_1+1}$$

verschwinden, so muss jede der Determinanten

$$\begin{vmatrix} b_{l1}^{(i_1)} & b_{l2}^{(i_1)} & \cdots b_{ll-1}^{(i_1)} & b_{ll+1}^{(i_1)} & \cdots b_{lg_1}^{(i_1)} \\ b_{l1}^{(i_2)} & b_{l2}^{(i_2)} & \cdots b_{ll-1}^{(i_2)} & b_{ll+1}^{(i_2)} & \cdots b_{lg_1}^{(i_2)} \\ \vdots & & & & \\ b_{l1}^{(i_{g_1-1})} & b_{l2}^{(i_{g_1-1})} & \cdots b_{ll-1}^{(i_{g_1-1})} & b_{ll+1}^{(i_{g_1-1})} & \cdots b_{lg_1}^{(i_{g_1-1})} \end{vmatrix},$$

* H. Maschke, *Beweis des Satzes, dass diejenigen endlichen linearen Substitutionsgruppen, in welchen einige durchgehends verschwindende Coefficienten auftreten, intransitiv sind*, Mathematische Annalen, Band 52, S. 365, 366.

die man erhält, wenn man $i_1, i_2, \cdots, i_{g_1-1}$ irgend welche $g_1 - 1$ verschiedene Zahlen aus der Reihe von Zahlen beilegt, die t annimt, den Wert Null haben. Anders ausgedrückt: Man muss aus der $l$ten Zeile der Substitutionsgruppe $\mathfrak{b}_{11}$ die folgenden $g_1 - 1$ Coefficienten

$$b_{l1}, b_{l2}, \cdots, b_{l\,l-1}, b_{l\,l+1}, \cdots, b_{lg_1}$$

herausgreifen können, dass eine jede der Determinanten, gebildet aus den entsprechenden Coefficienten jeder möglichen Combination von je $g_1 - 1$ Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{b}_{11}$, verschwindet. Wenn dies aber der Fall ist, so ist die Gruppe $\mathfrak{b}_{11}$ reducibel, wie aus einem Satze von Herrn MASCHKE † hervorgeht. Infolgedessen bleibt nur übrig, dass die $g_1 - 1$ Grössen:

$$(8) \qquad q_{1f_1+1}, q_{2f_1+1}, \cdots, q_{l-1f_1+1}, q_{l+1f_1+1}, q_{l+2f_1+1}, \cdots, q_{g_1f_1+1}$$

sämtlich gleichzeitig verschwinden.

Auf genau dieselbe Weise kann mit Hülfe der weiteren Gleichungen des Systemes (7) der Nachweis geführt werden, dass

$$(8) \qquad \begin{aligned} q_{1f_1+2} &= q_{2f_1+2} = \cdots = q_{l-1f_1+2} = q_{l+1f_1+2} = \cdots = q_{g_1f_1+2} = 0, \\ q_{1f_1+3} &= q_{2f_1+3} = \cdots = q_{l-1f_1+3} = q_{l+1f_1+3} = \cdots = q_{g_1f_1+3} = 0, \\ &\vdots \\ q_{1n} &= q_{2n} = \cdots = q_{l-1n} = q_{l+1n} = \cdots = q_{g_1n} = 0 \end{aligned}$$

ist.

Mithin lauten unter Berücksichtigung von (8) und:

$$q_{lf_1+1} = q_{lf_1+2} = q_{lf_1+3} = \cdots = q_{ln} = 0$$

die ersten g_1 Gleichungen von (1):

$$(9) \qquad \begin{aligned} z_1 &= q_{11}\, y_1 + q_{12}\, y_2 + \cdots + q_{1f_1}\, y_{f_1}, \\ z_2 &= q_{21}\, y_1 + q_{22}\, y_2 + \cdots + q_{2f_1}\, y_{f_1}, \\ &\vdots \\ z_{g_1} &= q_{g_11} y_1 + q_{g_12} y_2 + \cdots + q_{g_1f_1} y_{f_1}. \end{aligned}$$

Wäre $g_1 < f_1$, so würde, wie aus den Gleichungen (9) und (3) folgt, $\mathfrak{a}_{11}$ eine reducible Gruppe sein. Wäre $g_1 > f_1$, so würde man aus den Gleichungen (9) folgern, dass $z_1, z_2, \cdots, z_{g_1}$ nicht linear unabhängig sind. Es bleibt daher nur $f_1 = g_1$ übrig. Die Determinante:

$$\begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1f_1} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2f_1} \\ \vdots \\ q_{f_11} & q_{f_12} & \cdots & q_{f_1f_1} \end{vmatrix}$$

† H. MASCHKE, a. a. O., S. 364, 366.

ist von Null verschieden; denn sonst wäre die Determinante

$$|q_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, n)$$

der rechten Seite von (1) gleich Null, weil für

$$s \geqq f_1 + 1, \qquad r = 1, 2, \cdots, f_1 = g_1, \qquad q_{rs} = 0$$

ist (Gleichungen 8). Durch Beachtung von (2), (3) und (9) folgt, dass $\mathfrak{a}_{11}$ und $\mathfrak{b}_{11}$ ähnliche Gruppen sind.

Findet also die Relation (4) statt, so sind $\mathfrak{a}_{11}$ und $\mathfrak{b}_{11}$ ähnliche Gruppen. Transformiren wir jetzt die Gruppe $\mathfrak{A}$, indem wir die Gleichungen (9) und die zu (9) cogrediente Transformation anwenden. Dann gehen die Substitutionen:

$$y_i = \sum_{s=1}^{s=n} a_{is}^{(t)} y_s', \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots, n),$$

der Gruppe $\mathfrak{A}$ über in:

$$(10)\quad \begin{aligned}
z_1 &= b_{11}^{(t)} z_1' + b_{12}^{(t)} z_2' + \cdots + b_{1f_1}^{(t)} z_{f_1}',\\
z_2 &= b_{21}^{(t)} z_1' + b_{22}^{(t)} z_2' + \cdots + b_{2f_1}^{(t)} z_{f_1}',\\
&\vdots\\
z_{f_1} &= b_{f_1 1}^{(t)} z_1' + b_{f_1 2}^{(t)} z_2' + \cdots + b_{f_1 f_1}^{(t)} z_{f_1}',\\
y_{f_1+1} &= c_{f_1+1 1}^{(t)} z_1' + c_{f_1+1 2}^{(t)} z_2' + \cdots + c_{f_1+1 f_1}^{(t)} z_{f_1}' + a_{f_1+1 f_1+1}^{(t)} y_{f_1+1}' + \cdots + a_{f_1+1 n}^{(t)} y_n',\\
y_{f_1+2} &= c_{f_1+2 1}^{(t)} z_1' + c_{f_1+2 2}^{(t)} z_2' + \cdots + c_{f_1+2 f_1}^{(t)} z_{f_1}' + a_{f_1+2 f_1+1}^{(t)} y_{f_1+1}' + \cdots + a_{f_1+2 n}^{(t)} y_n',\\
&\vdots\\
y_n &= c_{n1}^{(t)} z_1' + c_{n2}^{(t)} z_2' + \cdots + c_{nf_1}^{(t)} z_{f_1}' + a_{nf_1+1}^{(t)} y_{f_1+1}' + \cdots + a_{nn}^{(t)} y_n'.
\end{aligned}$$

Bei Anwendung von (9) werden nämlich $y_{f_1+1}, y_{f_1+2}, \cdots, y_n$ beibehalten; die Anwendung von (9) ist daher rechter Hand nur in den Coefficienten der Variablen $y_1', y_2', \cdots, y_{f_1}'$, die durch $z_1', z_2', \cdots, z_{f_1}'$ ersetzt werden, wirksam; die Coefficienten von $y_{f_1+1}', y_{f_1+2}', \cdots, y_n'$ bleiben genau dieselben. $\mathfrak{a}_{11}$ geht in $\mathfrak{b}_{11}$ über; die Coefficienten c rechter Hand bei $z_1', z_2', \cdots, z_{f_1}'$ in den $n - f_1$ letzten Gleichungen sind aus den $q_{ik}\left(\substack{i=1,2,\cdots,f_1\\ k=1,2,\cdots,f_1}\right)$ und den a_{ik} gebildet.

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind ähnliche Gruppen; mithin ist die zu $\mathfrak{A}$ ähnliche Gruppe, die durch (10) dargestellt wird, auch mit $\mathfrak{B}$ ähnlich. Die Substitutionen von $\mathfrak{B}$ lauten:

$$\begin{aligned}
z_1 &= b_{11}^{(t)} z_1' + b_{12}^{(t)} z_2' + \cdots + b_{1f_1}^{(t)} z_{f_1}',\\
z_2 &= b_{21}^{(t)} z_1' + b_{22}^{(t)} z_2' + \cdots + b_{2f_1}^{(t)} z_{f_1}',\\
&\vdots\\
z_{f_1} &= b_{f_1 1}^{(t)} z_1' + b_{f_1 2}^{(t)} z_2' + \cdots + b_{f_1 f_1}^{(t)} z_{f_1}',\\
z_{f_1+1} &= b_{f_1+1 1}^{(t)} z_1' + b_{f_1+1 2}^{(t)} z_2' + \cdots + b_{f_1+1 f_1}^{(t)} z_{f_1}' + b_{f_1+1 f_1+1}^{(t)} z_{f_1+1}' + \cdots + b_{f_1+1 n}^{(t)} z_n',\\
z_{f_1+2} &= b_{f_1+2 1}^{(t)} z_1' + b_{f_1+2 2}^{(t)} z_2' + \cdots + b_{f_1+2 f_1}^{(t)} z_{f_1}' + b_{f_1+2 f_1+1}^{(t)} z_{f_1+1}' + \cdots + b_{f_1+2 n}^{(t)} z_n',\\
&\vdots\\
z_n &= b_{n1}^{(t)} z_1' + b_{n2}^{(t)} z_2' + \cdots + b_{nf_1}^{(t)} z_{f_1}' + b_{nf_1+1}^{(t)} z_{f_1+1}' + \cdots + b_{nn}^{(t)} z_n'.
\end{aligned}$$

Dabei können noch einige der $b^{(t)}_{f_1+k\, f_1+i}\left(\begin{smallmatrix}k=1,2,\cdots,n-f_1\\ i=1,2,\cdots,n-f_1\end{smallmatrix}\right)$ für jeden Wert von t durchgehend Null sein.

Da $\mathfrak{B}$ und die durch (10) dargestellte Gruppe ähnliche Gruppen sind, so muss es möglich sein, Relationen zu finden:

$$z_i = z_i \qquad (i=1, 2, \cdots, f_1),$$

$$(11)\quad z_{f_1+k} = s_{f_1+k\,1} z_1 + s_{f_1+k\,2} z_2 + \ldots + s_{f_1+k f_1} z_{f_1} + s_{f_1+k f_1+1} y_{f_1+1} + s_{f_1+k f_1+2} y_{f_1+2} + \cdots + s_{f_1+k\,n} y_n$$
$$(k=1, 2, \cdots, n-f_1),$$

und hierzu cogredient:

$$z'_i = z'_i \qquad (i=1, 2, \cdots, f_1),$$

$$(11')\quad z'_{f_1+k} = s_{f_1+k\,1} z'_1 + s_{f_1+k\,2} z'_2 + \cdots + s_{f_1+k f_1} z'_{f_1} + s_{f_1+k f_1+1} y'_{f_1+1} + s_{f_1+k f_1+2} y'_{f_1+2} + \cdots + s_{f_1+k\,n} y'_n$$
$$(k=1, 2, \cdots, n-f_1),$$

so dass durch diese Relationen die durch (10) dargestellte Gruppe in die Gruppe $\mathfrak{B}$ übergeht. Dabei kann die Determinante $|s_{f_1+k f_1+l}|$ $\left(\begin{smallmatrix}k=1,2,\cdots,n-f_1\\ l=1,2,\cdots,n-f_1\end{smallmatrix}\right)$ nicht verschwinden; denn sonst wäre die Substitutionsdeterminante von (11) Null. Aus den Relationen (11) und (11′) folgt unmittelbar, dass die zwei Gruppen, deren Matrices aus denjenigen von (10) und $\mathfrak{B}$ hervorgehen indem man die ersten f_1 Colonnen und Zeilen streicht, ähnlich sind; denn es bestehen die Relationen:

$$\sum_{t=f_1+1}^{t=n} s_{f_1+kt}\, a_{tf_1+l} = \sum_{t=f_1+1}^{t=n} b_{f_1+kt}\, s_{tf_1+l}$$
$$(k=1, 2, \cdots, n-f_1;\ l=1, 2, \cdots, n-f_1).$$

Benützen wir die Bezeichnungen auf S. 46 und 47, so haben wir die Ähnlichkeit der zwei durch

$$\begin{matrix}
\mathfrak{a}_{22} & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0\\
\mathfrak{a}_{32} & \mathfrak{a}_{33} & 0 & 0 & & 0 & 0\\
\mathfrak{a}_{42} & \mathfrak{a}_{43} & \mathfrak{a}_{44} & 0 & & 0 & 0\\
\vdots & & & \vdots & & & \\
\mathfrak{a}_{\lambda-1\,2} & \mathfrak{a}_{\lambda-1\,3} & \mathfrak{a}_{\lambda-1\,4} & \mathfrak{a}_{\lambda-1\,5} & \cdots & \mathfrak{a}_{\lambda-1\,\lambda-1} & 0\\
\mathfrak{a}_{\lambda 2} & \mathfrak{a}_{\lambda 3} & \mathfrak{a}_{\lambda 4} & \mathfrak{a}_{\lambda 5} & \cdots & \mathfrak{a}_{\lambda\,\lambda-1} & \mathfrak{a}_{\lambda\lambda}
\end{matrix}$$

und

$$\begin{matrix}
\mathfrak{b}_{22} & 0 & 0 & \cdots 0 & 0\\
\mathfrak{b}_{32} & \mathfrak{b}_{33} & 0 & \cdots 0 & 0\\
\mathfrak{b}_{42} & \mathfrak{b}_{43} & \mathfrak{b}_{44} & \cdots 0 & 0\\
\vdots & & & & \\
\mathfrak{b}_{\mu-1\,2} & \mathfrak{b}_{\mu-1\,3} & \mathfrak{b}_{\mu-1\,4} & \cdots \mathfrak{b}_{\mu-1\,\mu-1} & 0\\
\mathfrak{b}_{\mu 2} & \mathfrak{b}_{\mu 3} & \mathfrak{b}_{\mu 4} & \cdots \mathfrak{b}_{\mu\,\mu-1} & \mathfrak{b}_{\mu\mu}
\end{matrix}$$

dargestellten Gruppen bewiesen. Dieselben sind aber zwei unter Hervorhebung der irreduciblen Bestandteile ähnliche Gruppen in $n - f_1$ Variablen; für diese haben wir aber das Theorem als bewiesen angenommen, denn $f_1 \geqq 1$. (Vgl. Seite 47.) Man kann daher die Teilgruppen

$$\mathfrak{a}_{22},\ \mathfrak{a}_{33},\ \cdots,\ \mathfrak{a}_{\lambda\lambda},$$

und

$$\mathfrak{b}_{22},\ \mathfrak{b}_{33},\ \cdots,\ \mathfrak{b}_{\mu\mu},$$

einander in einer gewissen Reihenfolge eineindeutig zuordnen, so dass die zugeordneten stets ähnliche Gruppen sind. Im besonderen ist $\lambda = \mu$. Da $\mathfrak{a}_{11}$ und $\mathfrak{b}_{11}$ ähnlich sind, so ist unser Satz im Falle I völlig bewiesen.

II. Sollte zwischen $y_1, y_2, \cdots, y_{f_1}, z_1, z_2, \cdots, z_{g_1}$ irgend eine lineare homogene Relation bestehen:

$$d_1 y_1 + d_2 y_2 + \cdots + d_{f_1} y_{f_1} + e_1 z_1 + e_2 z_2 + \cdots + e_{g_1} z_{g_1} = 0,$$

wobei $d_1, d_2, \cdots, d_{f_1}, e_1, e_2, \cdots, e_{g_1}$ Constante bedeuten, so setze man:

$$\bar{z}_1 = e_1 z_1 + e_2 z_2 + \cdots + e_{g_1} z_{g_1}$$

und wähle $\bar{z}_2, \bar{z}_3, \cdots, \bar{z}_{g_1}$ als beliebige lineare homogene Functionen von $z_1, z_2, \cdots, z_{g_1}$ mit constanten Coefficienten:

$$\begin{aligned} \bar{z}_2 &= e_1^{(1)} z_1 + e_2^{(1)} z_2 + \cdots + e_{g_1}^{(1)} z_{g_1}, \\ \bar{z}_3 &= e_1^{(2)} z_1 + e_2^{(2)} z_2 + \cdots + e_{g_1}^{(2)} z_{g_1}, \\ &\vdots \\ \bar{z}_{g_1} &= e_1^{(g_1-1)} z_1 + e_2^{(g_1-1)} z_2 + \cdots + e_{g_1}^{(g_1-1)} z_{g_1}, \end{aligned}$$

wobei die $e_i^{(k)} \left({i=1,2,\cdots,g_1 \atop k=1,2,\cdots,g_1-1} \right)$ ganz willkürliche Constante sind, nur sollen sie so gewählt sein, dass $\left| e_i^{(k)} \right| \left({i=1,2,\cdots,g_1 \atop k=0,1,2,\cdots,g_1-1} \right)$ von Null vorschieden ist. $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \cdots, \bar{z}_{g_1}$ bestimmen dann eine zu $\mathfrak{b}_{11}$ ähnliche Gruppe $\bar{\mathfrak{b}}_{11}$. $\mathfrak{B}$ geht, wenn man $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \cdots, \bar{z}_{g_1}$ als Variable für $z_1, z_2, \cdots, z_{g_1}$ einführt und $z_{g_1+1}, z_{g_1+2}, \cdots, z_n$ beibehält in eine ähnliche Gruppe $\bar{\mathfrak{B}}$ über. Für die zwei ähnlichen Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\bar{\mathfrak{B}}$ haben wir dann eine Relation:

$$\bar{z}_1 = - d_1 y_1 - d_2 y_2 - \cdots - d_{f_1} y_{f_1}.$$

Diese Relation ist vom Typus (4); für diesen Fall haben wir den Satz bereits unter (I) bewiesen. Wir können daher für $y_1, y_2, \cdots, y_{f_1}, z_1, z_2, \cdots, z_{g_1}$ lineare Unabhängigkeit annehmen und brauchen unseren Satz nur noch für diesen Fall zu beweisen. Es mögen also $y_1, y_2, \cdots, y_{f_1}, z_1, z_2, \cdots, z_{g_1}$ linear unabhängig sein; man bilde sich dann die Gruppe:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}^{(t)} y_1' + a_{12}^{(t)} y_2' + \cdots + a_{1f_1}^{(t)} y_{f_1}', \\
y_2 &= a_{21}^{(t)} y_1' + a_{22}^{(t)} y_2' + \cdots + a_{2f_1}^{(t)} y_{f_1}', \\
&\vdots \\
y_{f_1} &= a_{f_1 1}^{(t)} y_1' + a_{f_1 2}^{(t)} y_2' + \cdots + a_{f_1 f_1}^{(t)} y_{f_1}', \\
z_1 &= b_{11}^{(t)} z_1' + b_{12}^{(t)} z_2' + \cdots + b_{1g_1}^{(t)} z_{g_1}', \\
z_2 &= b_{21}^{(t)} z_1' + b_{22}^{(t)} z_2' + \cdots + b_{2g_1}^{(t)} z_{g_1}', \\
&\vdots \\
z_{g_1} &= b_{g_1 1}^{(t)} z_1' + b_{g_1 2}^{(t)} z_2' + \cdots + b_{g_1 g_1}^{(t)} z_{g_1}'.
\end{aligned}
$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der $f_1 + g_1$ Variablen

$$y_1, y_2, \cdots, y_{f_1}, z_1, z_2, \cdots, z_{g_1},$$

haben wir eine Gruppe in $f_1 + g_1$ unabhängigen Variablen vor uns. Bedenken wir, dass $z_1, z_2, \cdots, z_{g_1}$ lineare homogene Functionen von $y_1, y_2, \cdots, y_n$ mit constanten Coefficienten sind, und führen wir zu den vorhandenen $f_1 + g_1$ unabhängigen Variablen $y_1, y_2, \cdots, y_{f_1}, z_1, z_2, \cdots, z_{g_1}$, noch $n - f_1 - g_1$ linear unabhängige Functionen von $y_1, y_2, \cdots, y_n$ mit constanten Coefficienten ein, damit wir eine mit der Gruppe $\mathfrak{A}$ ähnliche Gruppe erhalten. Die Gesamtheit der Matrices dieser zu $\mathfrak{A}$ ähnlichen Gruppe lässt sich dann in der Form:

$$
\begin{matrix}
\mathfrak{a}_{11} & 0 & 0 \\
0 & \mathfrak{b}_{11} & 0 \\
\vartheta_{31} & \vartheta_{32} & \vartheta_{33}
\end{matrix}
$$

schreiben; dabei bedeuten ϑ_{31}, ϑ_{32}, ϑ_{33} einen Inbegriff von Matrices mit $n - f_1 - g_1$ Zeilen und f_1, g_1, bez. $n - f_1 - g_1$ Colonnen. Wir transformiren jetzt die durch ϑ_{33} dargestellte Gruppe unter Hervorhebung ihrer irreducible Bestandteile in eine ähnliche Gruppe; diese laute:

$$
\begin{matrix}
\mathfrak{f}_{33} & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\
\mathfrak{f}_{43} & \mathfrak{f}_{44} & 0 & \cdots 0 & 0 \\
\vdots & & & & \\
\mathfrak{f}_{v-1\,3} & \mathfrak{f}_{v-1\,4} & \mathfrak{f}_{v-1\,5} & \cdots & \mathfrak{f}_{v-1\,v-1} & 0 \\
\mathfrak{f}_{v3} & \mathfrak{f}_{v4} & \mathfrak{f}_{v5} & \cdots & \mathfrak{f}_{v\,v-1} & \mathfrak{f}_{vv};
\end{matrix}
$$

dabei bedeuten $\mathfrak{f}_{33}, \mathfrak{f}_{44}, \cdots, \mathfrak{f}_{v-1\,v-1}, \mathfrak{f}_{vv}$, eine Gesamtheit von Matrices irreducibler Gruppen.

Beachtet man das soeben Durchgeführte, so wird die Gruppe $\mathfrak{A}$ unter Hervorhebung der irreduciblen Bestandteile in die ähnliche Gruppe transformirt, die durch:

$$(12)\qquad \begin{array}{ccccccc}
\mathfrak{a}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\
0 & \mathfrak{b}_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\
\mathfrak{f}_{31} & \mathfrak{f}_{32} & \mathfrak{f}_{33} & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\
\mathfrak{f}_{41} & \mathfrak{f}_{42} & \mathfrak{f}_{43} & \mathfrak{f}_{44} & 0 & \cdots 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & \\
\mathfrak{f}_{v-1\,1} & \mathfrak{f}_{v-1\,2} & \mathfrak{f}_{v-1\,3} & \mathfrak{f}_{v-1\,4} & \mathfrak{f}_{v-1\,5} & \cdots \mathfrak{f}_{v-1\,v-1} & 0 \\
\mathfrak{f}_{v1} & \mathfrak{f}_{v2} & \mathfrak{f}_{v3} & \mathfrak{f}_{v4} & \mathfrak{f}_{v5} & \cdots \mathfrak{f}_{v\,v-1} & \mathfrak{f}_{vv}
\end{array}$$

dargestellt wird.

Durch Vertauschung der ersten f_1 und g_1 Zeilen kann man die letztere Gruppe auch schreiben:

$$(13)\qquad \begin{array}{ccccccc}
\mathfrak{b}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\
0 & \mathfrak{a}_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\
\mathfrak{f}_{31} & \mathfrak{f}_{32} & \mathfrak{f}_{33} & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\
\mathfrak{f}_{41} & \mathfrak{f}_{42} & \mathfrak{f}_{43} & \mathfrak{f}_{44} & 0 & \cdots 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & \\
\mathfrak{f}_{v-1\,1} & \mathfrak{f}_{v-1\,2} & \mathfrak{f}_{v-1\,3} & \mathfrak{f}_{v-1\,4} & \mathfrak{f}_{v-1\,5} & \cdots \mathfrak{f}_{v-1\,v-1} & 0 \\
\mathfrak{f}_{v1} & \mathfrak{f}_{v2} & \mathfrak{f}_{v3} & \mathfrak{f}_{v4} & \mathfrak{f}_{v5} & \cdots \mathfrak{f}_{v\,v-1} & \mathfrak{f}_{vv}.
\end{array}$$

Mithin sind die durch (12) und (13) dargestellten Gruppen ähnlich.

Es ist vielleicht nur noch zu bemerken, dass die Gesamtheit der Matrices:

$$\begin{array}{cc}
\mathfrak{f}_{31} & \mathfrak{f}_{32} \\
\mathfrak{f}_{41} & \mathfrak{f}_{42} \\
\vdots & \\
\mathfrak{f}_{v-1\,1} & \mathfrak{f}_{v-1\,2} \\
\mathfrak{f}_{v1} & \mathfrak{f}_{v2},
\end{array}$$

welche symbolisch die Terme der letzten $n - f_1 - g_1$ Zeilen und $f_1 + g_1$ ersten Colonnen bedeuten, nur eine andere Bezeichnung für ϑ_{31}, ϑ_{32} sein sollen, indem ϑ_{31}, ϑ_{32} in Matrices von so vielen Zeilen wie $\mathfrak{f}_{33}$, $\mathfrak{f}_{44}, \cdots \mathfrak{f}_{vv}$ angeben, gespalten werden.

Die Gruppe $\mathfrak{A}$ ist ähnlich zu der durch (12) dargestellten Gruppe, und beide ähnliche Gruppen beginnen mit derselben irreduciblen Teilgruppe $\mathfrak{a}_{11}$. Mithin kann man nach (I) eine eineindeutige Zuordnung in gewisser Reihenfolge zwischen den irreduciblen Teilgruppen:

$$(14) \text{ und } \qquad \begin{array}{l}
\mathfrak{a}_{11},\quad \mathfrak{b}_{11},\quad \mathfrak{f}_{33},\quad \mathfrak{f}_{44}, \cdots \mathfrak{f}_{vv} \\
\mathfrak{a}_{11},\quad \mathfrak{a}_{22},\quad \mathfrak{a}_{33},\quad \mathfrak{a}_{44}, \cdots \mathfrak{a}_{\lambda\lambda}
\end{array}$$

bewerkstelligen, dass immer zwei zugeordnete Gruppen ähnlich sind.

$\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$, sowie ferner $\mathfrak{A}$ und die durch (13) dargestellte Gruppe sind ähnlich, mithin sind $\mathfrak{B}$ und die durch (13) dargestellte Gruppe, die beide mit derselben irreduciblen Teilgruppe $\mathfrak{b}_{11}$ beginnen, ähnlich. Hieraus aber folgt nach (I), dass man die irreduciblen Teilgruppen:

$$\text{(15) und} \qquad \begin{array}{l} \mathfrak{b}_{11}, \quad \mathfrak{a}_{11}, \quad \mathfrak{f}_{33}, \quad \mathfrak{f}_{44}, \cdots \mathfrak{f}_{\nu\nu} \\ \mathfrak{b}_{11}, \quad \mathfrak{b}_{22}, \quad \mathfrak{b}_{33}, \quad \mathfrak{b}_{44}, \cdots \mathfrak{b}_{\mu\mu} \end{array}$$

einander eineindeutig so zuordnen kann, dass zwei zugeordnete Gruppen stets ähnlich sind.

In (14) und (15) stehen in der ersten Reihe ja genau dieselben Gruppen nur in anderer Reihenfolge, ferner sind zwei Gruppen, die einer dritten ähnlich sind, auch unter einander ähnlich. Hieraus folgt, dass man die irreduciblen Teilgruppen

$$\text{und} \qquad \begin{array}{l} \mathfrak{a}_{11}, \quad \mathfrak{a}_{22}, \quad \mathfrak{a}_{33}, \cdots \mathfrak{a}_{\lambda\lambda} \\ \mathfrak{b}_{11}, \quad \mathfrak{b}_{22}, \quad \mathfrak{b}_{33}, \cdots \mathfrak{b}_{\mu\mu} \end{array}$$

in gewisser Reihenfolge einander eineindeutig zuordnen kann, so dass zwei zugeordnete Gruppen stets ähnlich sind. Im besonderen ist $\lambda = \mu$ und zwei zugeordnete Gruppen haben gleich viele Variablen. Hiermit ist unser Satz völlig bewiesen.

§ 2.

Der eben bewiesene Satz soll jetzt für die Theorie der *endlichen* Gruppen verwertet werden.

Herr MASCHKE* hat bewiesen, wenn man eine *endliche* Gruppe linearer homogener Substitutionen in eine ähnliche transformirt hat, dass sich in der neuen Gruppe eine geringere Anzahl von Substitutionsvariablen absondern lässt, welche nur unter sich transformirt werden, so kann man sie noch weiter in eine *zerfallende* oder *zerlegbare* Gruppe transformiren.

Durch mehrfache Anwendung des Maschke'schen Satzes folgt:

Jede endliche Gruppe G linearer homogener Substitutionen ist einer zerlegbaren Gruppe:

$$\begin{array}{cccccc} \mathfrak{a}_{11} & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & & 0 \\ 0 & \mathfrak{a}_{22} & 0 & 0 \cdots 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{a}_{33} & 0 \cdots 0 & & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & \mathfrak{a}_{\lambda-1\,\lambda-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & & \mathfrak{a}_{\lambda\lambda} \end{array}$$

ähnlich, wobei $\mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{22}, \mathfrak{a}_{33}, \cdots \mathfrak{a}_{\lambda\lambda}$ irreducible endliche Gruppen darstellen. Aus

* MASCHKE, a. a. O., § 3.

dem im vorigen § bewiesenen Satze folgt, dass, wie man auch immer eine endliche Gruppe linearer homogener Substitutionen in eine ähnliche Gruppe transformirt, die in lauter irreducible Gruppen zerfällt, die irreduciblen Teilgruppen bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt sind; dabei sehen wir ähnliche Gruppen nicht als verschieden an.

Wir haben also das Theorem:

Jede endliche Gruppe G linearer homogener Substitutionen kann in eine zerlegbare Gruppe:

$$\begin{array}{cccccc}
\mathfrak{a}_{11} & 0 & 0 & 0\cdots & 0 & 0 \\
0 & \mathfrak{a}_{22} & 0 & 0\cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \mathfrak{a}_{33} & 0\cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \mathfrak{a}_{44}\cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0\cdots & \mathfrak{a}_{\lambda-1\,\lambda-1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0\cdots & 0 & \mathfrak{a}_{\lambda\lambda}
\end{array}$$

transformirt werden; dabei sind $\mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{22}, \cdots \mathfrak{a}_{\lambda\lambda}$ *irreducible Gruppen, und zwar sind diese bei einer jeden Transformation von G in eine ähnliche Gruppe, die in lauter irreducible Gruppen zerfällt, falls ähnliche Gruppen nicht als verschieden gelten, bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt. Zu jeder reduciblen endlichen Gruppe linearer homogener Substitutionen gehören also eindeutig* λ *irreducible endliche Gruppen linearer homogener Substitutionen, wobei aber auch einige der* λ *Gruppen mehrfach auftreten können.*

Dieser Satz ist auch von Herrn Frobenius * im Verlauf seiner weitgehenden Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen auf ganz anderem Wege gefunden worden.

§ 3.

Man kann den Satz des § 1 noch weitergehend als im § 2 auf diejenigen Gruppen linearer homogener Substitutionen, die ich in den Mathematischen Annalen, Band 53, untersucht habe † und dort als *Gruppen vom Typus einer endlichen Gruppe* bezeichnete, anwenden. Wie ich a. a. O. im § 3 gezeigt habe, ist jede Gruppe linearer homogener Substitutionen vom Typus einer endlichen Gruppe (unter der Voraussetzung, dass, wenn die Gruppe nicht eine endliche Gruppe ist, die charakteristische Gleichung wenigstens einer Substitution der Gruppe lauter von einander verschiedene Wurzeln hat) zu einer Gruppe der Form:

* G. Frobenius, *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen. I und II.* Sitzungsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften, 1897 u. 1899. Vgl. Jahrgang 1899, S. 483.

† A. Loewy, *Zur Theorie der Gruppen linearer Substitutionen.* Mathematische Annalen. Bd. 53, S. 225.

$$
\begin{array}{llllll}
\mathfrak{a}_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\
\mathfrak{a}_{21} & \mathfrak{a}_{22} & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\
\mathfrak{a}_{31} & \mathfrak{a}_{32} & \mathfrak{a}_{33} & 0 & \cdots 0 & 0 \\
\vdots & & & & & \\
\mathfrak{a}_{\lambda-1\,1} & \mathfrak{a}_{\lambda-1\,2} & \mathfrak{a}_{\lambda-1\,3} & \mathfrak{a}_{\lambda-1\,4} & \cdots \mathfrak{a}_{\lambda-1\,\lambda-1} & 0 \\
\mathfrak{a}_{\lambda 1} & \mathfrak{a}_{\lambda 2} & \mathfrak{a}_{\lambda 3} & \mathfrak{a}_{\lambda 4} & \cdots \mathfrak{a}_{\lambda\,\lambda-1} & \mathfrak{a}_{\lambda\lambda}
\end{array}
$$

ähnlich; dabei bedeuten $\mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{22}, \cdots, \mathfrak{a}_{\lambda\lambda}$ endliche irreducible Gruppen. Eine Gruppe linearer homogener Substitutionen bezeichne ich dabei als Gruppe vom Typus einer endlichen Gruppe, wenn die Gesamtheit der charakteristischen Gleichungen, die zu allen Substitutionen der Gruppe gehören, nur eine endliche Anzahl von unter einander verschiedenen Wurzeln besitzt. Aus den Resultaten des § 1 folgt nun, wenn man auch die Ergebnisse des § 2 beachtet:

Wie man auch immer eine Gruppe G linearer homogener Substitutionen vom Typus einer endlichen Gruppe unter Hervorhebung ihrer irreduciblen Bestandteile in eine ähnliche überführt, so werden auf diese Art, wenn man ähnliche Gruppen nicht als verschieden ansieht (und voraussetzt, dass die vorgelegte Gruppe, falls sie nicht endlich ist, wenigstens eine Substitution besitzt, deren charakteristische Gleichung lauter unter einander vorschiedene Wurzeln hat), λ *irreducible* ENDLICHE *Teilgruppen* $\mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{22}, \cdots, \mathfrak{a}_{\lambda\lambda}$, *die jedoch nicht alle verschieden zu sein brauchen, eindeutig bestimmt. Notwendig und hinreichend, damit G eine endliche Gruppe ist, erweist sich die Aehnlichkeit von G zu der zerlegbaren Gruppe:*

$$
\begin{array}{llllll}
\mathfrak{a}_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \mathfrak{a}_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \mathfrak{a}_{33} & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \mathfrak{a}_{\lambda-1\,\lambda-1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathfrak{a}_{\lambda\lambda}\,.
\end{array}
$$

Die in dem obigen Satze in Klammern beigefügte Voraussetzung, dass, wenn die vorgelegte Gruppe vom Typus einer endlichen Gruppe nicht endlich ist, sie wenigstens eine Substitution, deren charakteristische Gleichung lauter unter einander verschiedene Wurzeln hat, besitzen soll, ist höchstwahrscheinlich überflüssig. Doch ist es mir bisher nicht gelungen, diese in der früheren Arbeit ausdrücklich gemachte Annahme zu beseitigen.

§ 4.

In den voraufgehenden Paragraphen haben wir bezüglich der Coefficienten, die in den Substitutionen der Gruppe auftreten, gar keine Voraussetzung gemacht, es war uns ganz gleichgültig, ob sie reell oder imaginär waren und demgemäss haben wir auch den Begriff der Irreducibilität einer Gruppe linearer homogener Substitutionen definirt, ohne den Coefficienten irgend welche Beschränkungen aufzuerlegen. Man kann aber auch einen anderen Standpunkt einnehmen. Wir nehmen jetzt an: Es sei irgend ein Zahlkörper oder Rationalitätsbereich Ω vorgelegt. Unter einem Zahlkörper oder Rationalitätsbereiche verstehen wir dabei ein System von unendlich vielen Zahlen, welches von der Vollständigkeit ist, dass die Addition, Subtraction, Multiplication und Division (mit Ausnahme der Division durch Null) irgend welcher Zahlen des Systemes nur zu Zahlen desselben Systemes führt. Ist G irgend eine lineare homogene Substitutionsgruppe, bei welcher die Coefficienten sämtlicher Substitutionen dem vorgelegten Körper Ω angehören,* so kann man eine Reducibilität der Gruppe G bezüglich des Körpers Ω definiren. Wir sagen:

Die lineare homogene Substitutionsgruppe G in n Variablen, deren Substitutionscoefficienten ausnahmslos dem Körper Ω angehören, ist bezüglich des Körper Ω reducibel, wenn man $m < n$ lineare homogene Functionen der Variablen mit constanten Coefficienten finden kann, welche durch eine jede Substitution der Gruppe nur unter sich transformirt werden und dabei ausschliesslich Transformationen mit Coefficienten aus Ω erleiden. Anders ausgedrückt: Für eine jede Gruppe G linearer homogener Substitutionen in n Variablen mit Coefficienten aus einen Körper Ω, die bezüglich des Körpers Ω reducibel ist, existirt notwendig eine Matrix P von nicht verschwindender Determinante, dass die Matrices sämtlicher Substitutionen der Gruppe $\overline{G} = PGP^{-1}$ von der Form:

$$\begin{array}{ccc|ccc}
a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1m} & 0 & 0 & \cdots 0 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2m} & 0 & 0 & \cdots 0 \\
\vdots & & & & & \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots a_{mm} & 0 & 0 & \cdots 0 \\
\hline
a_{m+1\,1} & a_{m+1\,2} & \cdots a_{m+1\,m} & a_{m+1\,m+1} & a_{m+1\,m+2} & \cdots a_{m+1\,n} \\
a_{m+2\,1} & a_{m+2\,2} & \cdots a_{m+2\,m} & a_{m+2\,m+1} & a_{m+2\,m+2} & \cdots a_{m+2\,n} \\
\vdots & & & & & \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nm} & a_{n\,m+1} & a_{n\,m+2} & \cdots a_{nn}
\end{array}$$

werden und ausschliesslich nur Coefficienten aus Ω haben ($m < n$).

---

* Besondere lineare homogene Gruppen mit Coefficienten aus einem Zahlkörper Ω oder, wie die amerikanischen Mathematiker sagen, "linear groups in an arbitrary field" sind in diesen Transactions, vol. 2, p. 363 in einer inhaltsreichen Arbeit von Herrn L. E. DICKSON untersucht worden. Zwischen der vorliegenden Arbeit und Herrn DICKSON's Untersuchung besteht jedoch kein Zusammenhang. Das von Herrn DICKSON in seinem trefflichen Buche (*Linear Groups with an Exposition of the Galois Field Theory*, Leipzig, 1901) behandelte "finite field" habe ich ausgeschlossen; wir haben im Obigen ein unendliches Feld. Ich darf mir erlauben, bei dieser Gelegenheit auch an dieser Stelle auf den innigen Zusammenhang des finite field mit der Ideal-

Zunächst bemerke ich: Sind G und $\overline{G}$ ähnliche Gruppen linearer homogener Substitutionen, so hat man, wie aus der Relation $PG = \overline{G}P$ folgt, wobei P eine Matrix von nicht verschwindender Determinante ist, zur Bestimmung der Coefficienten von P ein System linearer homogener Gleichungen, die verträglich sind; man kann daher die Coefficienten von P stets durch rationale Operationen aus denjenigen der Substitutionen von G und $\overline{G}$ finden. Gehören daher die Substitutionscoefficienten bei den zwei ähnlichen Gruppen G und $\overline{G}$ dem Körper Ω an, so lassen sich die zwei Gruppen auch stets durch eine Substitution von nicht verschwindender Determinante, deren Coefficienten ebenfalls Ω angehören, in einander überführen.*

Dass die im §1 gegebene Definition der Irreducibilität einer linearen homogenen Substitutionsgruppe mit derjenigen bezüglich eines Körpers Ω nicht stets zusammenfällt, ersieht man aus dem Beispiel der Gruppe aller reellen eigentlichen orthogonalen Substitutionen:

$$x_1 = \cos\phi\, x_1' - \sin\phi\, x_2',$$
$$x_2 = \sin\phi\, x_1' + \cos\phi\, x_2',$$

in zwei Variablen. Die angegebene Gruppe ist bezüglich des Körpers aller reellen Zahlen irreducibel; hingegen ist sie, wenn man die Irreducibilität einer Gruppe nach §1 definirt, reducibel; denn sie ist ähnlich zur Gruppe:

$$\xi_1 = e^{i\phi}\xi_1', \quad \xi_2 = e^{-i\phi}\xi_2'.$$

Will man den im §1 bewiesenen Fundamentalsatz auch ausdehnen, indem man den Begriff der Irreducibilität einer Gruppe bezüglich eines Körpers Ω zu Grunde legt, so muss man zunächst die Untersuchungen von Herrn MASCHKE, die wir im §1 benützten, in diesem Sinne erweitern. Herr MASCHKE verwendet in seiner Arbeit in den Mathematischen Annalen, Band 52, in den §1 und §2 nur Operationen, bei denen ausschliesslich rationale Verbindungen der Substitutionscoefficienten der vorgelegten Gruppe benützt werden. Mithin sind die Sätze von Herrn MASCHKE auf folgende Art erweiterungsfähig:

I. Ist eine lineare homogene Substitutionsgruppe (von endlicher oder unendlicher Ordnung) mit Coefficienten aus einem Körper Ω so beschaffen, dass es möglich ist, aus einer Zeile, etwa der $i$ten, eine Anzahl, etwa m Coefficienten:

---

theorie hinzuweisen; durch die Benützung von Primidealen lassen sich für die Theorie des endlichen Feldes die Galoisschen Imaginären völlig entbehren. (Vgl. meine demnächst im Archiv der Mathematik und Physik erscheinende Besprechung des DICKSONschen Werkes.)

*G. FROBENIUS, *Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten.* Crelle's Journ. f. d. r. u. ang. Math., Bd. 86, S. 147 u. S. 202.

G. LANDSBERG, *Über Fundamentalsysteme und bilineare Formen.* Crelle's Journ. f. d. r. u. ang. Math., Bd. 116, S. 331.

$$(ik_1), (ik_2), \cdots, (ik_m) \qquad (k_1, k_2, \cdots, k_m \neq i),$$

so herauszugreifen, dass jede der Determinanten

$$\begin{vmatrix} a'_{ik_1} a'_{ik_2} \cdots a'_{ik_m} \\ a''_{ik_1} a''_{ik_2} \cdots a''_{ik_m} \\ \vdots \\ a^{(m)}_{ik_1} a^{(m)}_{ik_2} \cdots a^{(m)}_{ik_m} \end{vmatrix},$$

gebildet aus den entsprechenden Coefficienten jeder möglichen Combination von je m Substitutionen A', A'', $\cdots$, $A^{(m)}$ der Gruppe, verschwindet, so lässt sich die Gruppe in eine neue Gruppe, die auch nur Coefficienten aus Ω hat, transformiren, dass mindestens einer der Coefficienten (ik_1), (ik_2), $\cdots$, (ik_m) in der transformirten Gruppe durchgehend Null ist. Corollar: Ist die Ordnung einer Gruppe linearer Substitutionen mit Coefficienten aus Ω mindestens um zwei kleiner als die Anzahl der Substitutionsvariablen, so kann man die Gruppe in eine ähnliche, die auch nur Coefficienten aus Ω hat, transformiren, so dass diese wenigstens einen nicht in der Hauptdiagonale stehenden Coefficienten durchgehend Null hat.

II. Ist in einer endlichen oder unendlichen linearen Substitutionsgruppe mit Coefficienten aus einem Körper Ω mindestens ein nicht in der Hauptdiagonale befindlicher Coefficient durchgehend Null, so lässt sich die Gruppe in eine andere Gruppe, die auch nur Coefficienten aus Ω hat, transformiren, dass sich eine geringere Anzahl Substitutionsvariablen absondern lässt, welche nur unter sich substituirt werden.

Auch im § 1 der vorliegenden Arbeit wurden keine irrationalen Operationen verwandt. Beachtet man noch, wenn man die Untersuchungen des § 1 durchgeht, dass zwei ähnliche Gruppen G und $\bar{G}$ mit Coefficienten aus Ω stets durch eine lineare homogene Substitution, die auch nur Coefficienten aus Ω hat und deren Determinante nicht verschwindet, in einander übergeführt werden können, so ergiebt sich, dass der Fundamentalsatz des § 1 auch für die Irreducibilität bezüglich eines Körpers Ω giltig ist.

Wie auch immer eine lineare homogene Substitutionsgruppe G (endlicher oder unendlicher Ordnung) mit Coefficienten aus einem Körper Ω unter Hervorhebung ihrer bezüglich des Körpers Ω irreduciblen Bestandteile in eine ähnliche Gruppe, die auch nur Coefficienten aus Ω hat, transformirt wird, so kann man die irreduciblen Bestandteile, die sich bei irgend einer solchen Darstellung ergeben, den irreduciblen Bestandteilen, die sich bei irgend einer anderen solchen Darstellung ergeben, eineindeutig zuordnen, dass zwei zugeordnete, bezüglich Ω irreducible Teilgruppen gleichviele Variablen haben und ähnliche Gruppen sind.

Nimmt man für Ω den Körper aller reellen und imaginären Zahlen, so hat man den Satz des § 1.

§ 5.

Wir wollen jetzt den im vorigen § gewonnenen Fundamentalsatz für die Theorie der *endlichen* Gruppen linearer homogener Substitutionen mit Coefficienten aus einem Körper Ω verwerten und folgendes Theorem, welches die Erweiterung des im § 2 bewiesenen darstellt, ableiten:

Jede endliche Gruppe linearer homogener Substitutionen mit Coefficienten aus einem Körper Ω kann in eine zerlegbare Gruppe:

$$\begin{matrix} \mathfrak{a}_{11} & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{a}_{22} & 0 & 0 \cdots 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{a}_{33} & 0 \cdots 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \quad \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots \mathfrak{a}_{\lambda-1\,\lambda-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & \mathfrak{a}_{\lambda\lambda} \end{matrix}$$

transformirt werden; dabei sind $\mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{22}, \cdots, \mathfrak{a}_{\lambda\lambda}$ bezüglich des Körpers Ω irreducible Gruppen. Diese irreduciblen Gruppen, die nur Coefficienten aus Ω haben, sind bei einer jeden Transformation von G in eine ähnliche Gruppe, die in lauter bezüglich Ω irreducible Gruppen zerfällt, falls ähnliche Gruppen nicht als verschieden gelten, bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt.

Sei G irgend eine Gruppe linearer homogener Substitutionen mit Coefficienten aus Ω, die bezüglich Ω reducibel ist, so kann man G stets in eine ähnliche Gruppe:

$$\begin{matrix} \mathfrak{a}_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ \mathfrak{a}_{21} & \mathfrak{a}_{22} & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ \mathfrak{a}_{31} & \mathfrak{a}_{32} & \mathfrak{a}_{33} & 0 & \cdots 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ \mathfrak{a}_{\lambda-1 1} & \mathfrak{a}_{\lambda-1 2} & \mathfrak{a}_{\lambda-1 3} & \mathfrak{a}_{\lambda-1 4} & \cdots \mathfrak{a}_{\lambda-1\,\lambda-1} & 0 \\ \mathfrak{a}_{\lambda 1} & \mathfrak{a}_{\lambda 2} & \mathfrak{a}_{\lambda 3} & \mathfrak{a}_{\lambda 4} & \cdots \mathfrak{a}_{\lambda\,\lambda-1} & \mathfrak{a}_{\lambda\lambda} \end{matrix}$$

transformiren, so dass alle Matrices, welche durch $\mathfrak{a}_{ik}$ repräsentirt werden, nur Coefficienten aus Ω haben und $\mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{22}, \cdots, \mathfrak{a}_{\lambda\lambda}$ bezüglich Ω irreducible Gruppen sind. Sei G eine endliche Gruppe, so sind auch die Gruppen $\mathfrak{a}_{ii}$ $(i = 1, 2, \cdots, \lambda)$ sämtlich endliche Gruppen. Es ist möglich, dass einige der Gruppen $\mathfrak{a}_{ii}$, welche für den Körper Ω irreducible Gruppen sind, bezüglich des Körpers aller reellen und imaginären Zahlen reducible Gruppen sind. Man kann nun nach § 2 für eine jede endliche Gruppe $\mathfrak{a}_{ii}$ eine Matrix P_i finden, die als Matrix mit sovielen Zeilen und Colonnen, wie sie $\mathfrak{a}_{ii}$ aufweist, nicht verschwindende Determinante hat und bewirkt, dass die zu $\mathfrak{a}_{ii}$ ähnliche Gruppe $P_i \mathfrak{a}_{ii} P_i^{-1}$ eine Gruppe von der Form:

$$\begin{matrix} \mathfrak{a}_{ii}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{a}_{ii}^{(2)} & 0 & 0 \cdots 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{a}_{ii}^{(3)} & 0 \cdots 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots \mathfrak{a}_{ii}^{(\tau_i-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & \mathfrak{a}_{ii}^{(\tau_i)} \end{matrix}$$

wird; dabei sind $\mathfrak{a}_{ii}^{(1)}, \mathfrak{a}_{ii}^{(2)}, \cdots \mathfrak{a}_{ii}^{(\tau_i)}$ bezüglich des Körpers aller reellen und imaginären Zahlen irreducible Gruppen, die Coefficienten dieser Gruppen $\mathfrak{a}_{ii}^{(1)}$, $\mathfrak{a}_{ii}^{(2)}, \cdots \mathfrak{a}_{ii}^{(\tau_i)}$ sind natürlich nicht mehr auf Ω beschränkt. Ist $\tau_i = 1$, so ist im besonderen $\mathfrak{a}_{ii}$ nicht nur bezüglich Ω, sondern auch für den Körper aller reellen und imaginären Zahlen irreducibel. Infolge der im §1 und §2 bewiesenen Sätze wird die endliche Gruppe G jetzt ähnlich mit einer Gruppe, die wir mit $\bar{G}$ bezeichnen, und welche die Form:

$$\begin{matrix} \bar{\mathfrak{a}}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mathfrak{a}}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathfrak{a}}_{33} & 0 \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & \bar{\mathfrak{a}}_{\lambda-1\,\lambda-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & \bar{\mathfrak{a}}_{\lambda\lambda} \end{matrix}$$

hat; dabei bedeutet $\bar{\mathfrak{a}}_{ii}$ die Gruppe der Form:

$$\begin{matrix} \mathfrak{a}_{ii}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{a}_{ii}^{(2)} & 0 & 0 \cdots 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{a}_{ii}^{(3)} & 0 \cdots 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots \mathfrak{a}_{ii}^{(\tau_i-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & \mathfrak{a}_{ii}^{(\tau_i)}. \end{matrix}$$

Bilden wir uns aus den Matrices $P_1, P_2, \cdots P_\lambda$ eine Matrix, die wir mit P bezeichnen, und welche das Aussehen:

$$\begin{matrix} P_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & P_{\lambda-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & P_\lambda \end{matrix}$$

hat, und suchen die zu $\bar{G}$ ähnliche Gruppe $P^{-1}\bar{G}P$. Wir beachten dabei, dass $P_i \mathfrak{a}_{ii} P_i^{-1} = \bar{\mathfrak{a}}_{ii}$ ist. Mithin wird $P^{-1}\bar{G}P$ von der Form:

$$\begin{matrix} \mathfrak{a}_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{a}_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathfrak{a}_{\lambda-1\,\lambda-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathfrak{a}_{\lambda\lambda}. \end{matrix}$$

Unsere ursprüngliche endliche Gruppe ist also mit der soeben hingeschriebenen, bei der die $\mathfrak{a}_{ii}$ $(i = 1, 2, \cdots, \lambda)$ Gruppen mit Coefficienten aus Ω, die bezüglich Ω irreducibel sind, bedeuten, ähnlich. Dass aber die Teilgruppen

$$\mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{22}, \cdots, \mathfrak{a}_{\lambda\lambda},$$

falls man ähnliche Gruppen als nicht verschieden ansieht, bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt sind, wenn man die endliche Gruppe G mit Coefficienten aus Ω auf irgend welche Weise in eine zerlegbare Gruppe mit Coefficienten aus Ω, deren Teilgruppen irreducibel bezüglich Ω sind, überführt, folgt aus §4. Hiermit ist der im Anfang des Paragraphen aufgestellte Satz erwiesen.

FREIBURG I. B., *Juli*, 1902.