DIE NATÜRLICHEN GLEICHUNGEN DER ANALYTISCHEN CURVEN IM EUKLIDISCHEN RAUME*

VON

E. STUDY

Die Grundformeln der gewöhnlichen Differentialgeometrie (und nicht minder zum Beispiel auch die der Differentialgeometrie im Nicht-Euklidischen Raume) haben sämmtlich ihre Quelle in einigen wenigen algebraischen Identitäten, Determinantenrelationen, *die sich im Voraus erschöpfend angeben lassen.* Indem man diesen Gedanken, der in älteren Darstellungen wohl noch nie zu seinem Rechte gekommen ist, sich deutlich vor Augen hält, kommt man zu einer neuen Behandlungsweise des Stoffes, die der Verfasser, zunächst allerdings nur an dem Beispiele der Curven, vor kurzem auseinandergesetzt hat. †

Die gegenwärtige Arbeit enthält eine erste Fortsetzung der genannten Untersuchung. Für den besonders wichtigen Fall, dass der Bogen (oder, bei den Minimalcurven der natürliche Parameter, d. h. einer dieser Parameter) die unabhängige Veränderliche ist, werden vollständige Systeme von Differentialinvarianten aufgestellt (§ 2 und § 5). Als Anwendung dieser kleinen ganz elementaren Theorie ergiebt sich die Thatsache, dass das Integrationsproblem der natürlichen Gleichungen einer regulären Curve äquivalent ist mit dem Problem der Integration gewisser linearer Differentialgleichungen, deren Theorie demgemäss vollständig und mit einfachen Hülfsmitteln entwickelt wird (§6–§8). Im Besonderen folgt hieraus, dass man die natürlichen Gleichungen aller der regulären Curven kennzeichnen und durch Quadraturen auflösen kann, deren Tangenten parallel sind zu den Erzeugenden irgend eines Kegels zweiter Ordnung. Die bekannte Theorie der durch die Gleichung $R : T =$ const. charakterisierten Schraubenlinien (die Rotationskegeln entsprechen) ist hiervon ein besonderer Fall.

Ausserdem enthält die Arbeit eine Integrationsmethode für die natürlichen Gleichungen selbst (in § 1 und § 3, die für sich ein abgeschlossenes Ganzes bilden.) Diese unsre Methode ist von der sonst üblichen völlig verschieden, wenn auch, wie natürlich, der Charakter der integrierenden Hülfsgleichungen derselbe bleibt. Sie besteht darin, dass der allgemeine Fall zurückgeführt

* Presented to the Society, February 26, 1910.

† *Zur Differentialgeometrie der analytischen Curven* — weiterhin mit A. C. citiert — Transactions of the American Mathematical Society, vol. 10 (1909).

wird auf das entsprechende Problem für Curven auf gegebenem Minimalkegel. Diese Aufgabe wiederum verlangt die Integration einer *Schwarz*'schen Differentialgleichung (oder einer *Riccati*'schen Gleichung). Gelegentlich ergiebt sich hierbei eine geometrische Deutung des *Schwarz*'schen Differentialausdrucks (§ 1.)

Wegen der ebenen singulären Curven, die hier ausgeschlossen bleiben, verweisen wir auf die citierte Abhandlung (A. C., § 5).

§ 1.

Die Curven auf gegebenem Minimalkegel und die Minimalcurven.

Wir werden zunächst krumme Linien betrachten, die auf dem Minimalkegel

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$$

liegen. Um zu einer zweckdienlichen Parameterdarstellung dieses Kegels zu gelangen, fassen wir ihn als Grenzfall einer Kugel

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \mathfrak{R}^2$$

von nicht verschwindendem Radius auf. Die letzte Gleichung nun, die wir kürzer auch so schreiben können: $(y \mid y) = \mathfrak{R}^2$, kann nach bekanntem (unsres Wissens in allem Wesentlichen von Darboux herrührendem) Verfahren, identisch befriedigt werden durch die Substitutionen

$$y_1 \equiv \mathfrak{R}\,\frac{1 - st}{s - t}, \qquad y_2 \equiv \mathfrak{R} \cdot i\,\frac{1 + st}{s - t}, \qquad y_3 \equiv -\,\mathfrak{R} \cdot \frac{s + t}{s - t},$$

wobei die uneigentlichen Punkte der Kugel und ausserdem die eigentlichen Punkte von zwei Erzeugenden $\{ y_1 - iy_2 = 0,\ y_3^2 - 1 = 0 \}$ zunächst ausgeschlossen bleiben. In den Parametern s, t werden dann die automorphen Bewegungen der Kugel, nämlich die Drehungen um deren Mittelpunkt, dargestellt durch irgend zwei mit einander identische lineare Transformationen. Diese lassen sich in der Form

$$s^* = \frac{(\alpha_0 - i\alpha_3)s - (\alpha_2 - i\alpha_1)}{(\alpha_2 + i\alpha_1)s + (\alpha_0 + i\alpha_3)}, \qquad t^* = \frac{(\alpha_0 - i\alpha_3)t - (\alpha_2 - i\alpha_1)}{(\alpha_2 + i\alpha_1)t + (\alpha_0 + i\alpha_3)}$$

schreiben. Die Verhältnissgrössen $\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$, deren Quadratsumme nicht verschwinden darf, sind die Euler'schen Parameter der ausgeführten Drehung. Ist diese insbesondere reell, so dürfen auch die Parameter α als reell angenommen werden, und umgekehrt entsprechen reelle Parameter einer reellen Drehung.

Wir führen jetzt einen Grenzübergang aus, indem wir den Quotienten $(s - t) : \mathfrak{R}$ durch einen neuen Parameter $2t_1$ ersetzen, und dann zur Grenze

$t = s$, $\Re = 0$ übergehen. So entstehen, wenn für t_1 wieder t geschrieben wird, die Formeln

$$(1) \qquad y_1 \equiv \frac{1 - s^2}{2t}, \qquad y_2 \equiv i\frac{1 + s^2}{2t}, \qquad y_3 \equiv -\frac{2s}{2t}.$$

Diese Gleichungen dienen also zur Parameterdarstellung einer Kugel vom Radius Null, nämlich des Minimalkegels

$$(2) \qquad y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0,$$

wobei jedoch der Scheitel dieses Kegels ($t = \infty$) und überhaupt alle Punkte einer Erzeugenden $\{ y_1 - iy_2 = 0,\ y_3 = 0 \}$ in die Parameterdarstellung nicht (nicht unmittelbar) einbezogen sind.

Aus (1) folgt noch

$$(3) \qquad s \equiv \frac{y_1 + iy_2}{y_3} \equiv -\frac{y_3}{y_1 - iy_2}, \qquad t \equiv \frac{1}{y_1 - iy_2} \equiv -\frac{y_1 + iy_2}{y_3^2}.$$

Für die Parameter s und t erhalten wir jetzt — durch den gleichen Grenzübergang — die Transformationsgleichungen

$$(4) \quad s^* = \frac{(\alpha_0 - i\alpha_3)s - (\alpha_2 - i\alpha_1)}{(\alpha_2 + i\alpha_1)s + (\alpha_0 + i\alpha_3)}, \qquad t^* = \frac{\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{\{(\alpha_2 + i\alpha_1)s + (\alpha_0 + i\alpha_3)\}^2}\cdot t,$$

die zur Darstellung der Drehungen um den Scheitel des Kegels dienen, soweit geeignete Punkte des Kegels selbst in Frage kommen. Die Formeln (4) aber setzen folgenden Lehrsatz in Evidenz:

Bei geeigneter Coordinatenwahl vertauscht die Gruppe der automorphen Bewegungen eines Minimalkegels dessen Punkte durch die erste Lie'sche Erweiterung der Gruppe aller linearen Transformationen eines binären Gebietes.

Das heisst, denkt man sich s als Function eines Parameters p, so zeigt die Transformationsgleichung für t, wie der Differentialquotient $ds : dp$ transformiert wird. Der Satz ist hier deshalb von Bedeutung, weil er die Motivierung unseres Grenzüberganges vervollständigt. Er zeigt, warum es unter Umständen unzweckmässig sein kann, an Stelle des Zeichens t ein Zeichen für $1 : t$ zu gebrauchen, was bei anderer Art der Exposition näher liegen würde. Insbesondere führt unsere Bezeichnung noch zu einer bemerkenswerthen Zusammenfassung der beiden Gleichungen (4) in eine einzige ("duale") Gleichung:

$$(5) \qquad s^* + \epsilon t^* = \frac{(\alpha_0 - i\alpha_3)(s + \epsilon t) - (\alpha_2 - i\alpha_1)}{(\alpha_2 + i\alpha_1)(s + \epsilon t) + (\alpha_0 + i\alpha_3)} \qquad (\epsilon^2 = 0).*$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun jede *krumme* analytische Linie

* Vgl. des Verfassers *Geometrie der Dynamen* (Leipzig, 1903), II, § 23, und A. C., S. 40, 41, wo umfassendere Formeln angegeben werden.

auf dem Minimalkegel, oder doch ein Stück einer solchen Linie, dadurch ausdrücken, dass wir s und t als analytische Functionen eines Parameters p darstellen, als Functionen, die natürlich einen gemeinsamen Existenzbereich haben müssen und von denen übrigens s nicht constant sein darf. Unter allen Parameterdarstellungen einer solchen Curve giebt es aber eine, und von einer unwesentlichen Willkür abgesehen, auch nur eine ausgezeichnete, die durch den *natürlichen Parameter* der Curve. *Um auszudrücken, dass p ein "natürlicher" Parameter sei, genügt nicht eine einzige Differentialgleichung, sondern es sind* — wie A. C., S. 34 gezeigt worden ist — *deren zwei erforderlich,*

$$(y'|y')_p \equiv -1, \qquad (yy'y'')_p \equiv -1,$$

die natürlich mit einander verträglich sein müssen und es thatsächlich auch sind. Man hat nun in unserem Falle, wo y durch Vermittelung von s und t von p abhängt,

$$(y'|y')_p \equiv -\left(i\frac{s'}{t}\right)^2, \qquad (yy'y'')_p \equiv -\left(i\frac{s'}{t}\right)^3,$$

also

$$t \equiv i\frac{ds}{dp}. \tag{6}$$

Die auf den nunmehr natürlichen Parameter p bezogene Curve wird mithin durch folgende Formeln dargestellt:

$$y_1 \equiv -i\frac{1-s^2(p)}{2s'(p)}, \qquad y_2 \equiv \frac{1+s^2(p)}{2s'(p)}, \qquad y_3 \equiv i\frac{2s(p)}{2s'(p)}. \tag{7}$$

Die *natürliche Gleichung* der Curve auf dem Minimalkegel (2) aber giebt das Quadrat der Krümmung als Function von p (A. C., Nr. 39, S. 35):

$$\phi(p) \equiv \frac{1}{R^2} \equiv (y''|y'')_p \equiv -\frac{2s'_p s'''_p - 3s''_p s''_p}{s'_p s'_p}. \tag{8}$$

Man hat also zur Bestimmung der Curve aus ihrer natürlichen Gleichung die Schwarz'sche Differentialgleichung (8) *oder die mit dieser äquivalente, durch die Substitution*

$$\frac{s''}{2s'} \equiv \omega$$

entstehende Riccati'sche Gleichung

$$\frac{d\omega}{dp} \equiv -\frac{\phi}{4} + \omega^2 \tag{9}$$

aufzulösen.

Wir erinnern daran, dass durch drei verschiedene Lösungen der Riccati'schen Gleichung eine Lösung der Schwarz'schen Gleichung auf die einfachste Weise ausgedrückt werden kann:

$$s \equiv \frac{\omega_1 - \omega_3}{\omega_2 - \omega_3}.*$$

Zugleich ist bewiesen:

Zu jeder Schwarz'schen Differentialgleichung

$$\{s, p\} \equiv \frac{2s's''' - 3s''s''}{2s's'} \equiv -\tfrac{1}{2}\phi(p) \qquad \text{(Nr. 8)}$$

gehört eine Classe unter einander congruenter krummer Linien, die auf dem Minimalkegel $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$ liegen, und zu jeder einzelnen Lösung der Gleichung eine bestimmte unter diesen Curvèn. p (allgemein p + const) ist ein zugehöriger natürlicher Parameter, ϕ die in der gemeinsamen natürlichen Gleichung jener Curven auftretende Function, also $\phi(p)$ das Quadrat ihrer Krümmung an den zu dem Werthe p gehörigen Stellen.

Es ist natürlich nicht ausgeschlossen, dass eine und dieselbe Curve mehreren, auch unendlich vielen Lösungen der Schwarz'schen Gleichung entspricht. Es existiert dann eine Gruppe automorpher Bewegungen der Curve. Continuierlich ist diese Gruppe nur im Falle der Kreise, nämlich der parabolischen (singulären) $\{\phi \equiv 0\}$ und regulären Kreise $\{\phi \equiv \text{const.}, \neq 0\}$.

Zu beachten ist, dass in obigem Satze der natürliche Parameter *nicht* durch den (zu *zweiwerthigem* Differential gehörigen) Curvenbogen ersetzt werden kann. Giebt man den Werth ϕ als Function des Bogens, so ist damit die zugehörige Curve nur bis auf Bewegungen und Umlegungen bestimmt.

Die Gleichung

$$\frac{1}{R^2} \equiv \phi(p)$$

fungiert auch als natürliche Gleichung für die Minimalcurven, die die Curve auf dem Minimalkegel zum sphärischen Bilde, oder zum Bestandtheil ihres sphärischen Bildes haben. (Siehe darüber A. C., § 6, insbes. S. 37.)

Um also eine (*krumme*) Minimallinie aus ihrer natürlichen Gleichung zu bestimmen, hat man nach Integration der Gleichung (8), die mit der Gleichung {A. C., (51)} identisch ist, noch die in der Formel $\int x\,dp$ zusammengefassten drei Quadraturen auszuführen.

§ 2.

Erläuterungen. Differentialinvarianten der Minimalcurven.

Durch das Vorgetragene wird die Frage nach der Bestimmung einer krummen Minimallinie aus ihrer natürlichen Gleichung auf die wohl einfachste Weise

* Der Zusammenhang beider Gleichungen wird eingehend untersucht in der Abhandlung *Über Riccati'sche und Schwarz'sche Differentialgleichungen*, Archiv der Mathematik und Physik, 1910, die weiterhin mit R. Gl. citirt wird.

beantwortet. Man kann sich indessen die Frage vorlegen, wie diese Methode mit mehreren anderen zusammenhängt, die sich ebenfalls darbieten.

Wir beginnen mit der Aufstellung eines in gewissem Sinne vollständigen Systems von Differentialinvarianten einer krummen Minimallinie. Ein solches wird gebildet von der Function ϕ mit ihren Differentialquotienten nach p:

Benutzt man zur Darstellung einer krummen Minimallinie $x \equiv x(p)$ *einen natürlichen Parameter, so werden alle auf diesen bezogenen Semiinvarianten* $(i\,|\,k)$ *und* (ikl) *ganze rationale Functionen der Function* ϕ *und ihrer Differentialquotienten, und zwar kommen in diesen Ausdrücken die Differentialquotienten von* ϕ *höchstens in der* $(n-3)$*ten Ordnung vor, wenn* $i, k, l \leqq n$ *sind.*

Mit Coefficienten von gleicher Beschaffenheit lassen sich die Semicovarianten $(x^{(k)}\,|\,\omega)$ *und* $(x^{(i)}x^{(k)}\omega)$ *linear ausdrücken durch* $(x'\,|\,\omega)$, $(x''\,|\,\omega)$, $(x'''\,|\,\omega)$.

Wir gehen zunächst so weit, wie es die Anwendungen in der Regel erfordern werden, nämlich bis zu dem Werthe $n = 4$:

$$(1)\quad \begin{array}{llll} (1\,|\,1) \equiv 0, & \quad * \quad, & \quad * \quad, & \quad * \quad, \\ (1\,|\,2) \equiv 0, & (2\,|\,2) \equiv -1, & \quad * \quad, & \quad * \quad, \\ (1\,|\,3) \equiv 1, & (2\,|\,3) \equiv 0 \;, & (3\,|\,3) \equiv \phi \;, & \quad * \quad, \\ (1\,|\,4) \equiv 0, & (2\,|\,4) \equiv -\phi, & (3\,|\,4) \equiv \tfrac{1}{2}\phi', & (4\,|\,4) \equiv -\phi^2; \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (123) \equiv -1, & (124) \equiv 0 \;, \\ (134) \equiv \phi \;, & (234) \equiv -\tfrac{1}{2}\phi',^* \end{array}$$

Man sieht, dass, wenn der Satz für den Werth $n-1\,(\geqq 4)$ als richtig angenommen wird, er auch für den Werth n gelten muss. In der That erhält man aus den Semiinvarianten $(i\,|\,k)$ für $i, k \leqq n-1$ die Semiinvarianten $(k\,|\,n)$ für $k < n$ durch je einmalige Differentiation. Durch diese Grössen lassen sich sodann die Semiinvarianten $(ikn)\,\{i < k < n\}$ ganz und rational ausdrücken, wie man durch Bildung des Productes $-(123)(ikn)$ erkennt. Durch Entwickelung des Productes $-(123)(n\,|\,n)$ erhält man sodann den Werth der noch fehlenden Semiinvariante $(n\,|\,n)$. Entsprechend beweist man den Satz über die Semicovarianten, von denen wir nur einige wenige anführen wollen:

$$(2)\quad (12\omega) \equiv -(1\,|\,\omega), \qquad (13\omega) \equiv -(2\,|\,\omega), \qquad (23\omega) \equiv \phi\cdot(1\,|\,\omega) - (3\,|\,\omega);$$

$$(3)\qquad (4\,|\,\omega) \equiv \tfrac{1}{2}\phi'\cdot(1\,|\,\omega) + \phi\cdot(2\,|\,\omega).$$

Die wichtigsten unter diesen Gleichungen sind die erste unter (2) und die Gleichung (3). Diese letzte ist offenbar mit der natürlichen Gleichung der

* Diese Tafel ergiebt sich aus den Formeln A. C., Nr. 36, 37, wenn man linker Hand jeden Differentiationsindex durch den nächsthöheren ersetzt.

Minimalcurve äquivalent, da man ihr die Function $\phi(p)$ entnehmen kann. Sie zeigt, dass die Coordinaten $y_k \equiv dx_k/dp$ des Differentialvectors $y \equiv x'_p$ Lösungen einer linearen Differentialgleichung 3. Ordnung sind, die, wegen der ersten Gleichung unter (2), mit ihrer Adjungierten zusammenfällt. *Diese Differentialgleichung*

$$y''' - \phi(p) \cdot y' - \tfrac{1}{2}\phi'(p) \cdot y = 0 \tag{4}$$

ist aber (bekanntlich) die allgemeinste vom zweiten Gliede befreite lineare Gleichung 3. Ordnung, bei der zwischen je drei linear-unabhängigen Lösungen eine homogene quadratische Gleichung besteht. Man kann daher die Theorie der krummen Linien auf Minimalkegeln und weiterhin die Theorie der krummen Minimallinien auch als eine Anwendung der Theorie dieser speciellen linearen Differentialgleichungen 3. Ordnung behandeln. Wie dieser Gedanke weiter auszuführen ist, liegt auf der Hand. Wir verweisen auf die citierte Arbeit (R. Gl., § 12), wo insbesondere auch der Zusammenhang der angedeuteten Methode mit der zuvor angewendeten dargelegt ist.

Als eine weitere Folgerung unserer Theorie heben wir hervor:

Wie zu den regulären Curven, so gehört auch zu den Minimalcurven im Allgemeinen ein System von orthogonalen Triedern, ein die Curve begleitendes Axenkreuz, und entsprechend ein System von Formeln, die den Serret-Frenet'schen Gleichungen analog sind.

Der hier zu Grunde liegende Gedanke ist ganz selbstverständlich, es scheint uns aber nöthig, die correkte Form eines derartigen Satzes festzustellen.

Das angedeutete System von drei zu einander senkrechten Axen (und Einheitsvectoren) existiert an allen den Stellen regulären Verhaltens einer Minimalcurve, wo das Krümmungsmaass ihres sphärischen Bildes nicht verschwindet ($\phi \neq 0$). *Es existiert also überhaupt nicht im Falle der Minimalcurven 3. Ordnung* (*wo* $\phi \equiv 0$ *ist*).

Nennen wir $1/R$ und $1/T$ die Krümmung und die Torsion des sphärischen Bildes unserer Curve, so haben wir, wie bereits abgeleitet (A. C., S. 34),

$$\frac{1}{R} \equiv \sqrt{\phi}, \qquad \frac{1}{T} \equiv \tfrac{1}{2}\frac{\phi'}{\phi} \equiv -\frac{1}{R}\frac{dR}{dp}. \tag{5}$$

Dem Bogen des sphärischen Bildes kann irgend einer der in der Formel

$$s \equiv \sqrt{-1}\, p \; \{+ \text{const.}\} \tag{6}$$

zusammengefassten Werthe beigelegt werden. Für die Einheitsvectoren α, β, γ, die zu Tangente, Hauptnormale und Binormale des sphärischen Bildes gehören, — derart, dass

$$(\alpha\beta\gamma) \equiv 1, \; (\beta\gamma\omega) \equiv (\alpha|\omega), \; (\gamma\alpha\omega) \equiv (\beta|\omega), \; (\alpha\beta\omega) \equiv (\gamma|\omega)$$

wird — ergeben sich sodann die Ausdrücke

$$(\alpha|\omega) \equiv -\sqrt{-1}(x''|\omega), \qquad (\beta|\omega) \equiv -R.(x'''|\omega),$$
$$(\gamma|\omega) \equiv \sqrt{-1} \cdot R \cdot (x''x'''\omega), \tag{7}$$

wobei die Differentiationen sich, wie zuvor, auf den natürlichen Parameter p beziehen. An den Stellen, wo die Vectoren α, β, γ existieren, kann man dann alle Differentialvectoren x', x'', x''', $\cdots$, linear durch sie ausdrücken, zum Beispiel:

$$x' \equiv -R\{\beta + \sqrt{-1}\gamma\}, \qquad x'' \equiv \sqrt{-1} \cdot \alpha, \qquad x''' \equiv -\frac{1}{R} \cdot \beta,$$
$$x'''' \equiv \frac{1}{R^2} \cdot \left\{\sqrt{-1} \cdot \alpha + \frac{dR}{dp}(\beta + \sqrt{-1}\gamma)\right\}. \tag{8}$$

Die *Frenet*'schen Gleichungen für das sphärische Bild nehmen jetzt die Form an:

$$\frac{d\alpha}{dp} \equiv \frac{\sqrt{-1}}{R} \cdot \beta, \qquad \frac{d\beta}{dp} \equiv -\frac{\sqrt{-1}}{R}\left\{\alpha + \frac{dR}{dp}\gamma\right\}, \qquad \frac{d\gamma}{dp} \equiv \frac{\sqrt{-1}}{R} \cdot \frac{dR}{dp} \cdot \beta. \tag{9}$$

Man sieht, dass alle diese Formeln dort illusorisch werden, wo die Function ϕ verschwindet, nicht aber an anderen Stellen regulären Verhaltens von ϕ, oder — was dasselbe ist — nicht an anderen Stellen regulären Verhaltens der Curve. Man mag diese letzten Stellen ($\phi \neq 0$) etwa solche *gewöhnlichen Verhaltens* nennen. Freilich bestehen dann die Minimalcurven 3. Ordnung aus lauter Stellen nicht "gewöhnlichen" Verhaltens.*

Die Gleichungen (9) können schliesslich nach der bei regulären Curven üblichen Methode behandelt werden. Damit hätten wir einen dritten Ansatz zur Bestimmung der durch die Ungleichung $\phi(p) \neq 0$ charakterisierten Minimalcurven aus einer natürlichen Gleichung. Die angedeutete Methode besteht darin, dass man für irgend drei gleichnamige Coordinaten α_κ, β_κ, γ_κ der Einheitsvectoren α, β, γ der Reihe nach Ausdrücke der Form

$$\frac{1 - \sigma_\kappa \tau_\kappa}{\sigma_\kappa - \tau_\kappa}, \quad i\frac{1 + \sigma_\kappa \tau_\kappa}{\sigma_\kappa - \tau_\kappa}, \quad -\frac{\sigma_\kappa + \tau_\kappa}{\sigma_\kappa - \tau_\kappa}$$

setzt. Die Grössen σ_κ, τ_κ genügen dann für $\kappa = 1, 2, 3$ sammtlich der Riccati'schen Gleichung

$$\frac{d\Omega}{dp} \equiv \frac{1}{2R}\left\{\frac{dR}{dp} + 2\Omega - \frac{dR}{dp}\Omega^2\right\}, \tag{10}$$

deren vollständige Lösung, wie bekannt, die der Gleichungen (9) nach sich zieht, und damit, nach (8), auch $y \equiv x'_p$ und dann durch drei Quadraturen x liefert.

---

* Man kann übrigens bemerken, dass an Stelle der Gleichungen (7) noch etwas einfachere treten, wenn man anstatt p als Parameter das Integral über den Contingenzwinkel $\sqrt{-1}\,dp : R$ des sphärischen Bildes einführt.

Aber die skizzierte Methode steht hinter unserer ersten zurück, und auch bei Erhaltung ihres Grundgedankens lässt sie sich durch eine einfachere ersetzen.

Der Vortheil, den die Einführung des beweglichen orthogonalen Trieders bietet, beruht zum Theil darauf, dass alle solchen Trieder zu einander congruent sind. Der gleichen Eigenschaft erfreuen sich aber auch Trieder, und zugehörige Tripel gewisser Vectoren a, b, c, die den folgenden Gleichungen genügen:

$$\begin{gathered}(a|a) = 0, \qquad (b|b) = -1, \qquad (c|c) = 0,\\ (b|c) = 0, \qquad (c|a) = -1, \qquad (a|b) = 0,\\ (abc) = 1,\end{gathered} \tag{11}$$

und für die dann weiter auch die Gleichungen gelten:

$$(bc\omega) = -(c|\omega), \qquad (ca\omega) = -(b|\omega), \qquad (ab\omega) = -(a|\omega). \tag{12}$$

Ein derartiges Tripel von Vectoren, deren zwei die Länge Null haben, setzen wir jetzt an Stelle der drei Einheitsvectoren α, β, γ, namlich dieses:

$$\begin{gathered}a \equiv y \equiv x'_p, \qquad b \equiv y' \equiv x''_p,\\ c \equiv \tfrac{1}{2}\phi \cdot y - y'' \equiv \tfrac{1}{2}\phi \cdot x' - x'''.\end{gathered} \tag{13}$$

Die Formeln zeigen, dass dieses neue System linear-unabhängiger Vectoren, abweichend von dem vorigen, an allen regulären Stellen der betrachteten Minimalcurve existiert, und dass also auch die Minimalcurven 3. Ordnung und ihre sphärischen Bilder hier nicht mehr ausgeschlossen zu werden brauchen. An Stelle der Frenet'schen Gleichungen (9) treten jetzt andere, die insofern einen noch etwas einfacheren Bau haben, als in ihnen die zur Bestimmung von R dienende Quadratwurzel und der Differentialquotient der Function ϕ nicht vorkommen:

$$\frac{da}{dp} \equiv b, \qquad \frac{db}{dp} \equiv \tfrac{1}{2}\phi \cdot a - c, \qquad \frac{dc}{dp} \equiv -\tfrac{1}{2}\phi \cdot b. \tag{14}$$

Bilden wir nun das Product $(abc) \cdot (\omega|\omega)$, so erhalten wir

$$(\omega|\omega) \equiv -2(a|\omega)(c|\omega) - (b|\omega)^2;$$

es genügen also je drei gleichnamige Coordinaten a_κ, b_κ, c_κ der Vectoren a, b, c der Gleichung

$$2a_\kappa c_\kappa + b_\kappa^2 = -1 \qquad (\kappa = 1, 2, 3).$$

Diese Gleichung wird identisch befriedigt, wenn wir für die drei genannten Coordinaten der Reihe nach Ausdrücke der Form

$$-i\frac{1}{\mu_\kappa - \nu_\kappa}, \qquad i\frac{\mu_\kappa + \nu_\kappa}{\mu_\kappa - \nu_\kappa}, \qquad i\frac{2\mu_\kappa \nu_\kappa}{\mu_\kappa - \nu_\kappa}$$

einsetzen. Die Gleichungen (14) gehen dann über in die Gleichungen

$$(15)\qquad \frac{d\mu}{dp} \equiv -\frac{\phi}{4} + \mu^2, \qquad \frac{d\nu}{dp} \equiv -\frac{\phi}{4} + \nu^2;$$

μ und ν sind also in jedem der drei Fälle ($\kappa = 1, 2, 3$) Lösungen eben der Riccati'schen Gleichung (§ 1, Nr. 9), *die wir zuvor auf anderem Wege gewonnen hatten.* Man kann daher, wie zuvor, nach vollständiger Lösung der Gleichung (9) in § 1 die Coordinaten des gesuchten Vectors $y \equiv x'$ unmittelbar hinschreiben. —

Aus unserer Darlegung geht hervor, dass in dem Bereiche ($\phi \neq 0$), *in dem die Gleichungen* (§ 1, Nr. 9) *und* (§ 2, Nr. 10) *zugleich Geltung haben, sie mit einander äquivalent sein müssen.* In der That lassen sie sich auch in einander transformieren.

Zunächst wird der Zusammenhang zwischen den Vectorentripeln a, b, c und α, β, γ gefunden:

$$(16)\quad \alpha \equiv -\sqrt{-1}\, b, \qquad \beta \equiv -R\left\{\frac{a}{2R^2} - c\right\}, \qquad \gamma \equiv \sqrt{-1}\, R\left\{\frac{a}{2R^2} + c\right\}.$$

Setzen wir zum Beispiel $\sqrt{-1} = i$, so ergiebt sich der Zusammenhang zwischen den mit σ, τ und μ, ν bezeichneten Grössen in jedem Falle ($\kappa = 1, 2, 3$) in der Form

$$(17)\qquad \sigma_\kappa \equiv \frac{2R\mu_\kappa - 1}{2R\mu_\kappa + 1}, \qquad \tau_\kappa \equiv \frac{2R\nu_\kappa - 1}{2R\nu_\kappa + 1}.$$

Daher wird jeder Lösung ω der Gleichung

$$\frac{d\omega}{dp} \equiv -\frac{\phi}{4} + \omega^2 \qquad \left\{\phi \equiv \frac{1}{R^2}\right\}$$

eine Lösung Ω der Gleichung

$$\frac{d\Omega}{dp} \equiv \frac{1}{2R}\left\{\frac{dR}{dp} + 2\Omega - \frac{dR}{dp}\Omega^2\right\}$$

zugeordnet, und umgekehrt, durch die Substitutionen

$$(18)\qquad \Omega \equiv \frac{2R\omega - 1}{2R\omega + 1}, \qquad \omega \equiv \frac{1}{2R}\,\frac{1 + \Omega}{1 - \Omega}.$$

Aber dieser leicht zu verificierende Satz hat zur selbstverständlichen Voraussetzung, dass ϕ nicht verschwindet. Die durch ω und Ω vermittelten Lösungen des Problems der natürlichen Gleichungen dürfen daher, wenn man genau sein will, *nicht* schlechthin „äquivalent" genannt werden.

§ 3. *Die regulären Curven.*

Das Problem der Bestimmung einer regulären Curve aus ihren natürlichen Gleichungen

$$\Phi \equiv \Phi(s), \qquad \Psi \equiv \Psi(s) \qquad (\Phi \not\equiv 0) \tag{1}$$

lässt sich auf die in § 1 behandelte Aufgabe zurückführen.

Wie wir wissen, gehören zu jedem Punkte x allgemeiner Lage (A. C., S. 20) der Curve (x) zwei Punkte, von denen aus der zugehörige Krümmungskreis durch Minimalkegel projiciert wird, die beiden *Scheitel* des Punktes x (A. C., S. 47, 48). Nennen wir diese Punkte $x + \xi$ und $x + \eta$, und denken wir uns die Vectoren ξ, η mit ihren Anfangspunkten am Anfangspunkte der Coordinaten angeheftet, so erhalten wir zwei neue auf dem zugehörigen Minimalkegel gelegene Curven $\xi \equiv \xi(s)$, $\eta \equiv \eta(s)$. Diese (die in ihrer ganzen Erstreckung betrachtet, nicht nothwendig von einander verschieden sind) wollen wir die beiden *Begleiter* der regulären Curve nennen. Es besteht nun der Satz:

Sind die natürlichen Gleichungen einer regulären Curve bekannt, so lässt sich die natürliche Gleichung eines jeden ihrer Begleiter explicite angeben. Nach Integration einer dieser beiden Gleichungen findet man die Curve selbst durch Quadratur über ein Vectordifferential.

Wir construieren zunächst, unter Benutzung des Bogens als Parameter, das die reguläre Curve begleitende System von drei Einheitsvectoren (A. C., S. 21, Nr. 6):

$$\begin{gathered}(\alpha|\omega) \equiv (x'|\omega) \equiv (y|\omega), \qquad (\beta|\omega) \equiv R(x''|\omega) \equiv R(y'|\omega), \\ (\gamma|\omega) \equiv R(x'x''\omega) \equiv R(yy'\omega).\end{gathered} \tag{2}$$

Dann gelten die *Frenet-Serret'schen Gleichungen*,

$$\frac{d\alpha}{ds} \equiv \frac{\beta}{R}, \qquad \frac{d\beta}{ds} \equiv -\frac{\alpha}{R} + \frac{\gamma}{T}, \qquad \frac{d\gamma}{ds} \equiv -\frac{\beta}{T}. \tag{3}$$

Die beiden Begleiter werden jetzt gegeben durch die Formeln

$$\xi \equiv R(\beta + i\gamma), \qquad \eta \equiv R(\beta - i\gamma). \tag{4}$$

Hieraus folgt, wenn

$$\begin{aligned} M &\equiv \frac{d\,lg R}{ds} - \frac{i}{T} \equiv -\frac{1}{\Phi}\left\{\frac{1}{2}\frac{d\Phi}{ds} + i\Psi\right\}, \\ N &\equiv \frac{d\,lg R}{ds} + \frac{i}{T} \equiv -\frac{1}{\Phi}\left\{\frac{1}{2}\frac{d\Phi}{ds} - i\Psi\right\}, \end{aligned} \tag{5}$$

gesetzt wird,

$$\frac{d\xi}{ds} \equiv -\alpha + M\xi, \qquad \frac{d\eta}{ds} \equiv -\alpha + N\eta, \tag{6}$$

und

$$\frac{d^2\xi}{ds^2} \equiv -M\cdot\alpha - \frac{1}{R}\cdot\beta + \left\{M^2 + \frac{dM}{ds}\right\}\cdot\xi,$$

$$\frac{d^2\eta}{ds^2} \equiv -N\cdot\alpha - \frac{1}{R}\cdot\beta + \left\{N^2 + \frac{dN}{ds}\right\}\cdot\eta;$$

(7) $$(\xi\xi'\omega) \equiv -i(\xi\,|\,\omega), \qquad (\eta\eta'\omega) \equiv i(\eta\,|\,\omega);$$

(8) $$\begin{aligned}(\xi'\,|\,\xi') \equiv 1, \qquad (\xi\xi'\xi'') \equiv i,\\ (\eta'\,|\,\eta') \equiv 1, \qquad (\eta\eta'\eta'') \equiv -i;\end{aligned}$$

also, wenn die natürlichen Parameter der beiden Begleiter p und q gennant werden,

$$\frac{dp}{ds} \equiv \frac{(\xi\xi'\xi'')}{(\xi'\,|\,\xi')} \equiv i, \qquad \frac{dq}{ds} \equiv \frac{(\eta\eta'\eta'')}{(\eta'\,|\,\eta')} \equiv -i \text{ (A. C., Nr. 35)},$$

(9) $$p \equiv is\,(+\text{ const.}), \qquad q \equiv -is\,(+\text{ const.}).$$

Nennen wir ferner $\phi(s)$ und $\psi(s)$ die quadrierten Krümmungsmaasse der beiden begleitenden Curven, so folgt

(10) $$\begin{aligned}\phi(s) \equiv (\xi''\,|\,\xi'')_s \equiv \Phi - 2\frac{dM}{ds} - M^2,\\ \psi(s) \equiv (\eta''\,|\,\eta'')_s \equiv \Phi - 2\frac{dN}{ds} - N^2.\end{aligned}$$

Mithin erhalten wir nach Lösung der beiden Schwarz'schen Gleichungen

(11) $$\{\sigma, s\} \equiv \tfrac{1}{2}\phi(s), \qquad \{\tau, s\} \equiv \tfrac{1}{2}\psi(s)$$

(Vgl. Nr. 9 und § 1, Nr. 8) die beiden Begleiter:

(12) $$\begin{aligned}\xi_1 &\equiv \frac{1-\sigma^2}{2\sigma'}, & \eta_1 &\equiv -\frac{1-\tau^2}{2\tau'},\\ \xi_2 &\equiv i\frac{1+\sigma^2}{2\sigma'}, & \eta_2 &\equiv -i\frac{1+\tau^2}{2\tau'},\\ \xi_3 &\equiv -\frac{2\sigma}{2\sigma'}, & \eta_3 &\equiv \frac{2\tau}{2\tau'}.\end{aligned}$$

(Die Differentiationen beziehen sich auf s, nicht auf die natürlichen Parameter p, q). Die Formeln Nr. (6) zeigen nunmehr, dass man von den beiden Schwarz'schen Gleichungen (11) nur eine zu lösen nöthig hat, um den Vector α zu finden. Schliesslich erhält man durch Quadratur über α den Punkt x:

(13) $$-\xi + \int M\xi\,ds \equiv x \equiv -\eta + \int N\eta\,ds.$$

Hiermit ist die Aufgabe vollständig gelöst. Die beiden Vectorintegrale liefern offenbar die zur gesuchten Curve gehörigen *Minimalevoluten*, oder, falls diese nicht existieren, die sie vertretenden Punkte (A. C., S. 48).

Angemerkt zu werden verdient vielleicht noch der Ausdruck

$$\mathfrak{R} = R \cdot T \cdot \sqrt{MN} \tag{14}$$

für den Radius der Schmiegungskugel.

§ 4. *Andere Ableitung des in* § 3 *gefundenen Resultates. Erläuterungen.*

Da die Minimalvectoren ξ, η zu dem Einheitsvector α senkrecht sind, so können die Parameter σ, τ nicht wesentlich verschieden sein von den *symmetrischen Coordinaten des Punktes* α *der Einheitskugel.* Überdies zeigt der in § 1 ausgeführte Grenzübergang, dass beide Arten von Grössen vollkommen identisch sind. Die Umkehrung dieses Gedankenganges muss offenbar zu einer zweiten Herleitung der in § 3 erhaltenen Formeln führen, und auch diese scheint uns Interesse zu bieten.

Wir befriedigen also jetzt die Gleichung

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1, \tag{1}$$

in der wir die Coordinaten y_κ mit denen des Vectors α identifizieren ($y \equiv \alpha$) identisch durch die Substitutionen

$$\alpha_1 \equiv \frac{1 - \sigma\tau}{\sigma - \tau}, \qquad \alpha_2 \equiv i\frac{1 + \sigma\tau}{\sigma - \tau}, \qquad \alpha_3 \equiv -\frac{\sigma + \tau}{\sigma - \tau}, \tag{2}$$

wobei nur die Punkte von zwei geradlinigen Erzeugenden der Einheitskugel ausgeschlossen bleiben (§ 1).

Bei Berechnung der Coordinaten des zweiten Einheitsvectors $\beta \equiv R\, d\alpha/ds$ ist zu berücksichtigen, dass sich

$$\left(\frac{ds}{R}\right)^2 \equiv \frac{4 d\sigma\, d\tau}{(\sigma - \tau)^2}$$

ergiebt; es folgt daher

$$\beta_1 \equiv \frac{1}{2R}\left\{\begin{matrix} \dfrac{1-\sigma^2}{2\sigma'} - \\ -\dfrac{1-\tau^2}{2\tau'} \end{matrix}\right\}, \quad \beta_2 \equiv \frac{1}{2R}\left\{\begin{matrix} i\dfrac{1+\sigma^2}{2\sigma'} - \\ -i\dfrac{1+\tau^2}{2\tau'} \end{matrix}\right\}, \quad \beta_3 \equiv \frac{1}{2R}\left\{\begin{matrix} -\dfrac{2\sigma}{2\sigma'} + \\ +\dfrac{2\tau}{2\tau'} \end{matrix}\right\}, \tag{3}$$

$$\gamma_1 \equiv \frac{1}{2R}\left\{\begin{matrix} -i\dfrac{1-\sigma^2}{2\sigma'} - \\ -i\dfrac{1-\tau^2}{2\tau'} \end{matrix}\right\}, \quad \gamma_2 \equiv \frac{1}{2R}\left\{\begin{matrix} \dfrac{1+\sigma^2}{2\sigma'} + \\ +\dfrac{1+\tau^2}{2\tau'} \end{matrix}\right\}, \quad \gamma_3 \equiv \frac{1}{2R}\left\{\begin{matrix} i\dfrac{2\sigma}{2\sigma'} + \\ +i\dfrac{2\tau}{2\tau'} \end{matrix}\right\}. \tag{4}$$

Die Formeln (3) und (4) zeigen, dass die Verbindungen

$$\xi \equiv R(\beta + i\gamma), \qquad \eta \equiv R(\beta - i\gamma) \tag{5}$$

nur von je einer der Grössen σ, τ abhängen: man erhält eben die Formeln (12) des vorigen Paragraphen. Man wird also die Functionen σ und τ einzeln zu bestimmen suchen. Damit kommt man, nach § 1, wieder zu den Formeln (10) und (11) des § 3. Da auch die Gleichungen (6) in § 3 zur Verfügung stehen, so hat man auch auf diese Art die vollständige Lösung des Problems.

Man kann auch so zu Werke gehen, dass man nach Bestimmung etwa des Vectors ξ zunächst den Vector η sucht. Der Vector α, auf den es ankommt, ergiebt sich dann aus der evidenten Gleichung

$$(\xi\eta\omega) \equiv -2iR^2 \cdot (\alpha|\omega), \tag{6}$$

die, im vorigen § angewendet, unmittelbar die Gleichungen (1) geliefert haben würde. Der Vector η aber ergiebt sich, wenn ξ bekannt ist, ohne Weiteres, da offenbar

$$\frac{\xi + \eta}{2} \equiv R^2 \frac{d\alpha}{ds} \equiv \frac{1}{\Phi} \frac{d}{ds} \left\{ M\xi - \frac{d\xi}{ds} \right\} \equiv \frac{1}{\Phi} \frac{d}{ds} \left\{ N\eta - \frac{d\eta}{ds} \right\} \tag{7}$$

ist.

Ferner muss, wenn eine Lösung $\sigma(s)$ oder $\tau(s)$ einer der beiden Schwarz'schen Gleichungen bekannt ist, die entsprechende Lösung $\tau(s)$ oder $\sigma(s)$ der anderen eindeutig sich bestimmen lassen. Man erhält, wenn man in irgend eine der Gleichungen (2) die Werthe der Coordinaten α_κ aus der Gleichung (6) in § 3, und dann die Werthe der Coordinaten ξ_κ oder η_κ aus (12) einträgt, unmittelbar die gesuchten Formeln:

$$\tau \equiv \sigma - \frac{2\sigma'\sigma'}{M\sigma' + \sigma''}, \qquad \sigma \equiv \tau - \frac{2\tau'\tau'}{N\tau' + \tau''}. \tag{8}$$

Die Lösungen

$$\mu \equiv \frac{\sigma''}{2\sigma'}, \qquad \nu \equiv \frac{\tau''}{2\tau'} \tag{9}$$

der beiden Riccati'schen Gleichungen

$$\frac{d\mu}{ds} \equiv \frac{\phi}{4} + \mu^2, \qquad \frac{d\nu}{ds} \equiv \frac{\psi}{4} + \nu^2, \tag{10}$$

die den betrachteten Schwarz'schen Gleichungen zugeordnet sind, hängen durch eine lineare Substitution zusammen, die ebenfalls leicht zu berechnen ist. Man hat nämlich, nach (8):

$$M \equiv \frac{2\sigma'}{\sigma - \tau} - \frac{\sigma''}{\sigma'}, \qquad N \equiv \frac{2\tau'}{\tau - \sigma} - \frac{\tau''}{\tau'}. \tag{11}$$

Da ausserdem

$$4\sigma'\tau' \equiv \Phi \cdot (\sigma - \tau)^2 \qquad \text{(Nr. 2)},$$

so folgt

$$(12)\qquad \left(M+\frac{\sigma''}{\sigma'}\right)\left(N+\frac{\tau''}{\tau'}\right)+\Phi\equiv 0,$$

oder

$$(13)\qquad 4\mu\nu+2N\mu+2M\nu+\frac{1}{\Phi^2}\left\{\Phi^3+\Psi^2+\frac{1}{4}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)^2\right\}\equiv 0.$$

Die Discriminante dieser Gleichung ist, wie es sein muss, nicht identisch gleich Null.

Durch das Gesagte ist auch schon die Aufgabe gelöst, die Functionen Φ, Ψ zu finden, wenn die Functionen ϕ, ψ gegeben sind. Nach vollständiger Lösung der beiden Gleichungen (10) oder der entsprechenden Schwarz'schen Gleichungen kennt man σ, τ, M, N, und man hat

$$(14)\qquad \Phi\equiv e^{-\int(M+N)ds}\equiv\frac{4\sigma'\tau'}{(\sigma-\tau)^2},\qquad \Psi\equiv\frac{i}{2}\Phi\cdot(M-N).$$

Ungleich der Function Φ können dabei die Functionen ϕ, ψ ganz beliebig (mit gemeinsamem Existenzbereich) angenommen werden. Nur können selbstverständlich, im Falle sie identisch sind, nicht auch identische Lösungen σ, τ der dann einzigen Schwarz'schen Gleichung benutzt werden.

Die zu gegebenen Functionen ϕ, ψ gehörigen Curven sind natürlich nicht alle unter einander congruent. Vielmehr stehen je zwei unter ihnen in der Beziehung, dass ihre Tangentenindicatrices zu einander eigentlich-kreisverwandt sind. Congruent sind alle die Curven, die erhalten werden, wenn man die Grössen σ, τ derselben linearen Transformation unterwirft (§ 1).

Die Gleichung $\phi\equiv\psi$ kennzeichnet die Familie der *regulären Schraubenlinien*, der Curven nämlich, für die $R:T$ einen constanten Werth hat, also die krummen geodätischen Linien auf unebenen Cylinderflächen, oder die Curven, deren Tangentenindicatrices (reguläre oder parabolische) Kreise sind. Dass diese Curven durch Quadraturen bestimmt werden können, ergiebt sich hier aus der Thatsache, dass aus jeder Lösung der zugehörigen Riccati'schen Gleichung durch die Transformation (13) eine zweite abgeleitet werden kann. (R. Gl., § 6). Doch wird man hier, wie auch in anderen Fällen, näher liegende und elementarere Methoden vorziehen (vgl. § 8). Die Gleichung $M-N\equiv$ const. kennzeichnet die *Curven constanter Torsion*, insbesondere die Gleichung $M-N\equiv 0$ *die regulären ebenen Curven* — die zugleich Schraubenlinien sind —; die Gleichung $M+N\equiv$ const. ist charakteristisch für *die Curven constanter Krümmung.*

Ist die betrachtete reguläre Curve *relle*, so sind ihre Begleiter conjugiert-complex, und die Gleichungen $\phi\equiv\phi(s)$, $\bar{\psi}\equiv\bar{\psi}(\bar{s})$ drücken dieselbe analytische Abhängigkeit aus: Dieses ist die Bedingung dafür, dass unter den zu ϕ, ψ gehörigen regulären Curven sich reelle finden. Ist überdies ein *reeller*

Zug vorhanden, und ist $\{s \equiv \bar{s}\}$ ein entsprechendes Werthgebiet des reellen Bogens, so müssen die Functionen ϕ und ψ, nach Potenzen von $s - s_0 \equiv \bar{s} - \bar{s}_0$ entwickelt, conjugiert-complexe Coefficienten haben.

§ 5. *Differentialinvarianten der regulären Curven.*

Wie im Falle der Minimalcurven, so hängt auch im Falle der regulären Curven das Problem der natürlichen Gleichungen mit der Theorie gewisser linearer Differentialgleichungen zusammen. Eine solche von der dritten Ordnung wird nämlich geliefert durch die lineare Relation, die immer zwischen den Vectoren x', x'', x''', x'''' stattfinden muss. Um ihre Coefficienten zu bestimmen, hat man die auf den Bogen bezogenen Semiinvarianten (234), (341), (412), (123), — die eben dadurch in Invarianten übergegangen sind — auszudrücken durch die Functionen Φ, Ψ und ihre Differentialquotienten. So entsteht, ähnlich wie in § 2, eine allgemeinere Frage, die durch den folgenden Lehrsatz beantwortet wird:

Benutzt man bei einer regulären Curve den Bogen als Parameter, so gehen dadurch die Semiinvarianten $(i|\kappa)$ *und* $(i\kappa l)$ *für* $i, \kappa, l \leqq n$ *in rationale Functionen von*

$$\Phi,\ \Phi',\ \Phi'',\ \cdots,\ \Phi^{(n-2)};\quad \Psi,\ \Psi',\ \Psi'',\ \cdots,\ \Psi^{(n-3)}$$

über und zwar treten in den Nennern dieser Ausdrücke lediglich Potenzen der absoluten Invariante Φ *auf.*

Mit ebenso beschaffenen Coefficienten lassen sich alle Semicovarianten $(\kappa|\omega)$ *und* $(i\kappa\omega)$ *— für* $i < \kappa \leqq n$ *— linear ausdrücken durch*

$$(x'|\omega), \qquad (x''|\omega), \qquad (x'x''\omega).$$

Wir gehen wieder zunächst bis zum Werthe $n = 4$ und erhalten dann, wenn wir neben den Zeichen

$$\Phi \equiv (2|2)_s, \qquad \Psi \equiv (123)_s$$

noch die Abkurzung

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{X} \equiv \frac{1}{\Phi}\left\{ \Phi^3 + \Psi^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)^2 \right\}$$

gebrauchen, die folgende Tabelle, die die für die Anwendungen wichtigsten Formeln umfasst:

$$\text{(2)} \qquad \begin{array}{lll} (1|1) \equiv 1, & *, & *, \\ (1|2) \equiv 0, & (2|2) \equiv \Phi, & *, \\ (1|3) \equiv -\Phi, & (2|3) \equiv \frac{1}{2}\Phi', & (3|3) \equiv \mathrm{X}, \\ (1|4) \equiv -\frac{3}{2}\Phi', & (2|4) \equiv \frac{1}{2}\Phi'' - \mathrm{X}, & (3|4) \equiv \frac{1}{2}\mathrm{X}', \end{array}$$

$$(4|4) \equiv \frac{1}{\Phi}\left[\tfrac{9}{4}\Phi\Phi'\Phi' + \Psi'\Psi' + (\tfrac{1}{2}\Phi'' - \mathrm{X})^2\right],$$

. . . .

$$(2)\qquad \begin{aligned} &(123) \equiv \Psi, &&(134) \equiv \frac{1}{\Phi}\left\{\frac{\Phi'\Psi' - \Psi\Phi''}{2} + \Psi X\right\},\\ &(124) \equiv \Psi', &&(234) \equiv \tfrac{1}{2}\{2\Phi\Psi' - 3\Psi\Phi'\}. \end{aligned}$$

Wir ersetzen jetzt $n(\geqq 4)$ durch $n-1$, und nehmen für diesen Werth den Satz als richtig an. Wir erhalten dann durch Differentiation alle Semiinvarianten der Form $(i\,|\,n)$ für $i<n$, also alle bilinearen Semiinvarianten mit Ausnahme von $(n\,|\,n)$. Ebenso entstehen durch Differentiation alle Semiinvarianten $(i\kappa n)$, wo $i<\kappa<n$, mit Ausnahme derer, für die $\kappa = n-1$ ist. Durch Bildung der Producte $(1\,|\,1)(i,\,n-1,\,n)$ für $i = 2,\,3,\,\cdots,\,n-2$ erkennt man sodann, dass alle diese Grössen sich als ganze Functionen der schon berechneten Ausdrücke und der einen Semiinvariante $(1,\,n-1,\,n)$ darstellen lassen. Die gleiche Eigenschaft aber hat das Product dieses letzten Differentialausdrucks mit $\Phi\equiv(2\,|\,2)$. Die noch fehlende Semiinvariante $(n\,|\,n)$ erhält man schliesslich, gleichfalls in der behaupteten Form, durch Bildung des Quadrates $(12n)^2$.

Der zweite Theil des aufgestellten Satzes ergiebt sich am einfachsten durch Bildung des Productes $(12n)(12\omega)$:

$$(3)\qquad \Phi\cdot(n\,|\,\omega) \equiv \Phi\cdot(1\,|\,n)\cdot(1\,|\,\omega) + (2\,|\,n)\cdot(2\,|\,\omega) + (12n)\cdot(12\omega).$$

$$(4)\qquad \Phi(mn\omega) \equiv \Phi\cdot(1mn)\cdot(1\,|\,\omega) + (2mn)\cdot(2\,|\,\omega) + (12\,|\,mn)\cdot(12\omega).\quad (m<n).$$

Wie die Herleitung zeigt, bilden die gefundenen Grössen ein in gewissem Sinne *vollständiges System absoluter* — in ihrer Gesammtheit nicht rationaler — *Differentialinvarianten und Differentialcovarianten* der betrachteten regulären Curve.

Zum Beispiel wird die Bedingung dafür, dass eine reguläre Curve im weiteren Sinne des Wortes sphärisch ist (uneben-sphärisch oder eben), allgemein ausgedrückt durch die Gleichung

$$2\Phi\Phi'_s\cdot\Psi'_s + (\Phi'_s\Phi'_s - 2\Phi\Phi''_s + 4\Psi^2)\Psi \equiv 0.$$

(Vgl. A. C., Nr. 60).

Auf dem hier vorgezeichneten Wege wird man, unter Anderem, auch die Bedingung dafür ermitteln können, dass die Tangentenindicatrix einer regulären Curve ein sphärischer Kegelschnitt oder wenigstens ein Stück einer solchen Curve ist. Die Differentialgleichung der Kegelschnitte ist in der hierfür nöthigen allgemeinen Form vom Verfasser aufgestellt worden.* Man hat darnach die in der Gleichung

$$\begin{aligned} 9\cdot(123)^2\cdot\{(126) + 10\cdot(234) + 5\cdot(135)\} &- \\ - 45\cdot(123)\cdot(124)\cdot\{2\cdot(134) + (125)\} &+ 40\cdot(124)^3 \equiv 0 \end{aligned}$$

vorkommenden Differentialinvarianten durch Φ, Ψ und die Differentialquotienten

* Leipziger Berichte, Bd. 53, (1901) S. 349.

dieser Functionen (bis zu denen dritter Ordnung) auszudrücken.

Die auszuführende Rechnung ist natürlich umständlich. Im nächsten § werden wir deshalb die gesuchte Bedingung auf einem anderen Wege, und zwar mit ganz kurzer Rechnung ableiten. ($\Theta \equiv 0$).

§ 6. *Über gewisse lineare Differentialgleichungen 3. Ordnung.*

Die Formel (3) in § 5 zeigt, dass im Falle einer *ebenen* regulären Curve der Differentialvector $y \equiv x'$ der linearen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' - \frac{1}{2}\frac{\Phi'}{\Phi}y' + \Phi y \equiv 0$$

genügt, deren allgemeine Lösung in der Form

$$c_1 \cos \int \sqrt{\Phi}\, ds + c_2 \sin \int \sqrt{\Phi}\, ds$$

enthalten ist. Wir schliessen diesen Fall von der ferneren Betrachtung aus, nehmen also an, dass die niederste lineare Differentialgleichung, der der Vector y genügt, von der dritten Ordnung ist,

$$y''' + 3Ay'' + 3By' + Cy \equiv 0 \qquad (\Psi \not\equiv 0). \tag{1}$$

Die Werthe der Coefficienten A, B, C können dann den Formeln des vorigen § entnommen werden:

$$\begin{aligned}
A &\equiv -\frac{1}{3}\frac{(124)}{(123)} \equiv -\frac{1}{3}\frac{\Psi'}{\Psi},\\
B &\equiv \frac{1}{3}\frac{(134)}{(123)} \equiv \frac{1}{3\Phi}\left\{ \mathrm{X} + \frac{\Phi'}{2}\frac{\Psi'}{\Psi} - \frac{\Phi''}{2} \right\},\\
C &\equiv -\frac{(234)}{(123)} \equiv -\frac{1}{2}\left\{ 2\Phi . \frac{\Psi'}{\Psi} - 3\Phi' \right\},\\
\mathrm{X} &\equiv \frac{1}{\Phi}\left\{ \Phi^3 + \Psi^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Wie die Ableitung zeigt, ist in dieser Form jede beliebige lineare homogene Differentialgleichung 3. Ordnung enthalten, bei der (mindestens) eine aus drei linear-unabhängigen Lösungen gebildete quadratische Form von nicht verschwindender Discriminante einen von Null verschiedenen constanten Werth hat.

Man wird dann nämlich drei solche Lösungen y_1, y_2, y_3 derart auswählen können, dass

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \equiv 1 \tag{3}$$

wird: Diese Functionen y_1, y_2, y_3 der unabhängigen Veränderlichen s könne sonach als die Coordinaten der Tangentenindicatrix einer regulären *unebenen* Curve aufgefasst werden.

Es entsteht nunmehr die Frage, durch was für Besonderheiten die Coefficienten A, B, C der hier auftretenden linearen Differentialgleichungen 3. Ordnung gekennzeichnet sind; wie man diese Coefficienten in die Form (2) setzen, und wie man schliesslich die Auflösung einer gegebenen Gleichung der Art bewirken kann.

Wir nehmen also an, dass die Gleichungen (2) bestehen. Aus den Gleichungen für A und C folgt dann

$$\Psi' \equiv -3A\Psi, \qquad \Phi' \equiv \tfrac{2}{3}C - 2A\Phi,$$

$$\Phi'' \equiv \tfrac{2}{3}C' - \tfrac{4}{3}AC + 2\{2A^2 - A'\}\Phi;$$

durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung für B ergiebt sich

$$C^2 - 3\{C\; + 3AC\}\Phi + 9\{A' + 2A^2 - 3B\}\Phi^2 + 9\{\Phi^3 + \Psi^2\} \equiv 0,$$

und hieraus, durch nochmalige Differentiation und Elimination von Φ', Ψ':

$$\begin{aligned}2AC^2 + \{C'' + AC' - A'C + 12BC - 14A^2C\}\Phi \\ - 3\{A'' - 3B' + 2C + 12AB - 8A^3\}\Phi^2 + 18A\{\Phi^3 + \Psi^2\} \equiv 0.\end{aligned}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen kann nunmehr die Summe

$$C^2 + 9\{\Phi^3 + \Psi^2\}$$

eliminiert werden.

Wir setzen zur Abkürzung

$$F \equiv A' + 2A^2 - 3B, \qquad G \equiv C' + 3AC, \tag{4}$$

so dass obige Gleichung die Form

$$C^2 - 3G \cdot \Phi + 9F\Phi^2 + 9\{\Phi^3 + \Psi^2\} \equiv 0 \tag{5}$$

annimmt, ferner

$$\Theta \equiv A'' + 6AA' + 4A^3 - 3B' - 6AB + 2C,$$

$$\mathrm{H} \equiv C'' + 7A \cdot C' + \{-A' + 4A^2 + 12B\} \cdot C,$$

oder

$$\Theta \equiv \frac{dF}{ds} + 2AF + 2C, \tag{6}$$

$$\mathrm{H} \equiv \frac{dG}{ds} + 4AG - 4CF, \tag{7}$$

und erhalten, als Eliminationsresultat, die Gleichung:

$$3\Theta\Phi - \mathrm{H} \equiv 0. \tag{8}$$

Aus der abgeleiteten linearen Differentialgleichung für Φ ergiebt sich schliesslich eine Gleichung fur Θ und H :

$$\Theta H' - H\Theta' \equiv 2\Theta \{ C\Theta - AH \} . \tag{9}$$

Dieser, die in den Differentialquotienten von A, B, C bis zur dritten Ordnung ansteigt, müssen also die Functionen A, B, C jedenfalls genügen. Das ist indessen nicht hinreichend. Damit der eingeschlagene Weg auch in umgekehrter Richtung gangbar sei, muss sich vielmehr ein nicht identisch verschwindender Werth von Φ, und hierauf — durch Lösung einer reinen quadratischen Gleichung — ein ebenfalls nicht identisch verschwindender Werth von Ψ berechnen lassen. Es muss also, wie die Gleichung (8) zeigt,

$$\textit{entweder} \quad \Theta \not\equiv 0, \mathrm{H} \not\equiv 0 \qquad \textit{oder} \quad \Theta \equiv 0, \mathrm{H} \equiv 0$$

sein.

Im ersten Fall kann man Φ bestimmen: Es kommt also nur noch die weitere Einschränkung hinzu, dass der dann zu berechnende Werth von Ψ nicht identisch gleich Null wird.

Machen wir die zweite Annahme, so folgt aus $\Theta \equiv 0$, dass eine quadratische Form von y_1, y_2, y_3 identisch verschwindet,* und dass folglich *alle* quadratischen Formen von y_1, y_2, y_3, die einem gewissen Büschel angehören, constante Werthe haben. Umgekehrt liegt auch, wenn das eintritt, immer der zweite Fall vor. Es kann dann das genannte Büschel das Quadrat einer linearen Form enthalten, deren Werth natürlich ebenfalls constant sein muss. Die Bedingung hierfür ist $C \equiv 0$.

Wir werden hiernach, in der Theorie der hier in Betracht kommenden speciellen linearen Differentialgleichungen drei Hauptfälle unterscheiden, deren einige dann noch weiter zu gliedern sein werden. Auf diese Unterscheidung bezieht sich der folgende Lehrsatz, der durch das Vorgetragene begründet ist

Wenn zwischen drei passend gewählten linear-unabhängigen Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung 3. Ordnung eine Gleichung der Form (3) *besteht, so liegen folgende Möglichkeiten vor:*

I. *Es verschwindet keine quadratische Form von y_1, y_2, y_3 identisch. Der Ort des Punktes y ist dann eine sphärische Curve oder Stück einer solchen,*† *die uneben und auch verschieden ist von einem sphärischen Kegelschnitt.*

II. *Es verschwindet eine derartige Form, die vorgelegte Gleichung hat aber keine constante Lösung. Der Ort des Punktes y ist dann ein unebener sphärischer Kegelschnitt, oder Stück eines solchen.*

* Siehe z. B. PICARD, *Traité d'analyse*, t. III, p. 556, oder R. Gl., Nr. 42.

† Auch in der Theorie der linearen Differentialgleichungen ist es nicht üblich, die Begriffe Curve und Curvenstück zu unterscheiden. Man kann aber zuweilen Aussagen über den ganzen Verlauf, oder nahezu über den ganzen Verlauf einer Curve machen, und wir wünschen, wo dies der Fall ist, es hervortreten zu lassen. So entziehen sich der Parameterdarstellung $x \equiv x(s)$ höchstens isolierte Stellen, während auf der Curve (y) der Parameter s sehr wohl eine natürliche Grenze haben kann. Deshalb sagen wir im Texte "Curve oder Curvenstück," nicht einfach "Curve." Freilich ist auch diese Terminologie noch nicht ganz zufriedenstellend.

III. *Die vorgelegte Gleichung hat eine constante Lösung. Der Ort des Punktes y ist dann ein (regulärer oder parabolischer) Kreis, oder Stück eines solchen Kreises (der jedoch immer von einem Hauptkreis verschieden ist).*

Durch das Vorhergehende schon erledigt ist die erste dieser Annahmen:

Damit der Fall I *eintrete, ist nothwendig und hinreichend, dass die Functionen* Θ, H *der Gleichung* (9) *genügen, aber nicht identisch verschwinden, und dass ausserdem der Ausdruck*

$$C^2\Theta^3 - G\Theta^2\mathrm{H} + F\Theta\mathrm{H}^2 + \tfrac{1}{3}\mathrm{H}^3 \tag{10}$$

nicht identisch gleich Null ist.

Durch Berechnung der Functionen Φ, Ψ (Nr. 8, 5) *lässt sich dann die Integration der vorgelegten Gleichung zurückführen auf die Integration einer Schwarz'schen Differentialgleichung* (§ 3).

Soviel wird sich erreichen lassen, so lange nicht weitere Besonderheiten eintreten.*

§ 7. *Fortsetzung: Lineare Differentialgleichungen 3. Ordnung, die mit der Theorie der elliptischen Functionen zusammenhängen.*

Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung des zweiten der in § 6 unterschiedenen Fälle, setzen also nunmehr voraus, dass $\Theta \equiv 0$, $\mathrm{H} \equiv 0$, aber $C \not\equiv 0$ ist. Dann werden sich in dem Büschel quadratischer Formen von y_1, y_2, y_3, die constante Werthe haben, entweder drei Formen von verschwindender Discriminante finden, oder deren zwei, oder eine, und jede von diesen muss einen nicht verschwindenden Werth haben. Die Form, die den Werth Null annimmt, hat eine nicht verschwindende Discriminante. Eine zweite Form von nicht verschwindender Discriminante kann willkürlich ausgewählt werden, und sie liefert dann die Gleichung der Einheitskugel, bei passender Wahl der Coordinaten in der üblichen Form

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1. \tag{1}$$

Überdies wird man es erreichen können, dass die hinzutretende zweite Gleichung entweder die Form

$$\kappa_1 y_1^2 + \kappa_2 y_2^2 + \kappa_3 y_3^2 = 0 \qquad (\kappa_1 \neq \kappa_2 \neq \kappa_3 \neq 0) \tag{2a}$$

annimmt, oder zweitens die Form

$$y_2(y_2 + iy_3) = \text{const.}, \text{ besser}$$

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2\kappa y_2(y_2 + iy_3) = 0 \qquad (\kappa \neq 0, -1), \tag{2b}$$

oder drittens die Form $y_1(y_2 + iy_3) = \text{const.}$, insbesondere z. B. $= -1$, wofür wir besser schreiben können

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2y_1(y_2 + iy_3) = 0. \tag{2c}$$

* Diese Fälle lassen sich bis jetzt nicht erschöpfend angeben. R. Gl., Einleitung.

Das vorgelegte Problem nimmt also nunmehr eine präcisere Form an: Erstens werden Kriterien für diese drei Möglichkeiten zu finden sein, und zweitens Lösungstripel, die je eines der aufgestellten Gleichungspaare befriedigen. Zugleich hat sich ergeben:

Im Falle II *ist der Ort der Punkte y entweder eine — vollständige oder unvollständige — sogenannte elliptische Curve 4. Ordnung* (*a*), *oder eine rationale Curve 4. Ordnung mit Doppelpunkt auf dem absoluten Kegelschnitt* (*b*), *oder endlich eine Curve 4. Ordnung mit Spitze* (*c*).

Wir nehmen jetzt an, dass der Fall (*a*) vorliegt. Dann können wir die Gleichungen (1) und (2*a*) identisch befriedigen durch Einführung elliptischer Coordinaten:

$$(3)\quad y_1 \equiv \sqrt{\kappa_2-\kappa_3}\sqrt{z-e_1},\quad y_2 \equiv \sqrt{\kappa_3-\kappa_1}\sqrt{z-e_2},\quad y_3 \equiv \sqrt{\kappa_1-\kappa_2}\sqrt{z-e_3},$$

indem wir nämlich drei Constante e_1, e_2, e_3 gemäss den Bedingungen

$$e_1+e_2+e_3=0,$$

$$(\kappa_2-\kappa_3)e_1+(\kappa_3-\kappa_1)e_2+(\kappa_1-\kappa_2)e_3=-1,$$

$$\kappa_1(\kappa_2-\kappa_3)e_1+\kappa_2(\kappa_3-\kappa_1)e_2+\kappa_3(\kappa_1-\kappa_2)e_3=0$$

bestimmen:

$$e_1=\frac{1}{3}\,\frac{\kappa_2(\kappa_3-\kappa_1)-\kappa_3(\kappa_1-\kappa_2)}{(\kappa_2-\kappa_3)(\kappa_3-\kappa_1)(\kappa_1-\kappa_2)}\qquad(\text{etc.}).$$

Setzen wir dann noch

$$(\kappa_2-\kappa_3)e_2e_3+(\kappa_3-\kappa_1)e_3e_1+(\kappa_1-\kappa_2)e_1e_2=e_0,$$

so bestehen die Ungleichungen

$$(4)\qquad e_0 \neq e_1 \neq e_2 \neq e_3,$$

und es lassen sich die Verhältnissgrössen $\kappa_1:\kappa_2:\kappa_3$ wieder durch die Verhältnissgrössen $e_0:e_1:e_2:e_3$ ausdrücken:

$$\kappa_1=-\frac{(e_2-e_0)(e_3-e_0)}{(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)}\qquad(\text{etc.}).$$

Führen wir ferner die Abkürzung

$$\Pi \equiv \sqrt{-1}\cdot\sqrt{(e_0-e_1)(e_0-e_2)(e_0-e_3)}$$

ein, so kann eine Abhängigkeit zwischen dieser Quadratwurzel und den Wurzelgrössen $\sqrt{\kappa_2-\kappa_3}$, $\sqrt{\kappa_3-\kappa_1}$, $\sqrt{\kappa_1-\kappa_2}$ wie folgt erklärt werden:

$$\Pi=(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)\cdot\sqrt{\kappa_2-\kappa_3}\sqrt{\kappa_3-\kappa_1}\sqrt{\kappa_1-\kappa_2}.$$

Nunmehr kann man, von den Gleichungen (3) ausgehend, die Functionen Φ

und Ψ darstellen

$$\Phi \equiv (y'|y') \equiv -\left\{\frac{z'}{2\sqrt{z-e_1}\sqrt{z-e_2}\sqrt{z-e_3}}\right\}^2\cdot(z-e_0), \tag{5}$$

$$\Psi \equiv (yy'y'') \equiv -\left\{\frac{z'}{2\sqrt{z-e_1}\sqrt{z-e_2}\sqrt{z-e_3}}\right\}^3\cdot\Pi, \tag{6}$$

ferner aber auch die Coefficienten der linearen Differentialgleichung 3. Ordnung, der die Functionen y_1, y_2, y_3 genügen:

$$\begin{aligned}
A &\equiv -\frac{1}{3}\frac{(yy'y''')}{(yy'y'')} \equiv -\frac{d}{ds}\log\frac{z'}{2\sqrt{z-e_1}\sqrt{z-e_2}\sqrt{z-e_3}},\\
B &\equiv \frac{1}{3}\frac{(yy''y''')}{(yy'y'')} \equiv -\frac{1}{3}\frac{z'''}{z'} + \\
&\quad + \frac{d}{ds}\log\frac{z'}{2\sqrt{z-e_1}\sqrt{z-e_2}\sqrt{z-e_3}}\cdot\frac{z''}{z'} + 3\left\{\frac{z'}{2\sqrt{z-e_1}\sqrt{z-e_2}\sqrt{z-e_3}}\right\}^3\cdot z,\\
C &\equiv -\frac{(y'y''y''')}{(yy'y'')} \equiv -\frac{3}{2}\left\{\frac{z'}{2\sqrt{z-e_1}\sqrt{z-e_2}\sqrt{z-e_3}}\right\}^2\cdot z'.
\end{aligned} \tag{7}$$

Diese Gleichungen (7) liefern nun das vollständige System der Bedingungen, denen die Functionen A, B, C zu genügen haben, und sie lassen sich dann auch unschwer nach e_1, e_2, e_3, z auflösen (die durch die weitere Gleichung $e_1+e_2+e_3=0$ verbunden sind). Am einfachsten geht man wohl so zu Werke, dass man zwischen s und z noch eine zur Lösung des Integrationsproblems übrigens nicht nöthige Hülfsveränderliche u einschiebt — das zu der Curve (y) gehörige Integral 1. Gattung* — vermöge der Substitutionen:

$$z \equiv \wp(u), \qquad \frac{dz}{du} \equiv \wp'(u) \equiv -2\sqrt{z-e_1}\sqrt{z-e_2}\sqrt{z-e_3}. \tag{8}$$

Die Gleichungen (7), deren System wir sogleich noch etwas ergänzen wollen, nehmen dann, bei Gebrauch der schon eingeführten Abkürzungen

$$F \equiv A' + 2A^2 - 3B, \qquad G \equiv C' + 3AC \tag{9}$$

eine übersichtlichere Form an:

$$\begin{aligned}
A &\equiv -\frac{u''}{u'}, \qquad F \equiv 3\wp(u)\cdot(u')^2,\\
B &\equiv -\frac{1}{3}\frac{u'''}{u'} + \left(\frac{u''}{u'}\right)^2 - \wp(u)\cdot(u')^2,\\
C &\equiv -\tfrac{3}{2}\wp'(u)\cdot(u')^3, \qquad G \equiv -\tfrac{3}{2}\wp''(u)\cdot(u')^4,
\end{aligned} \tag{10}$$

* Wir entnehmen hier der Theorie der elliptischen Functionen lediglich einige übliche *Zeichen*.

oder also

$$(11)\qquad \frac{ds}{du} \equiv -e^{\int A ds}, \qquad \wp(u) \equiv \tfrac{1}{3} F \cdot e^{2\int A ds},$$

$$\wp'(u) \equiv \tfrac{2}{3} C \cdot e^{3\int A ds}, \qquad \wp''(u) \equiv -\tfrac{2}{3} G \cdot e^{4\int A ds}.$$

Hieraus, und aus den in (8) enthaltenen Gleichungen

$$\{\wp'(u)\}^2 \equiv 4\{\wp(u)-e_1\}\{\wp(u)-e_2\}\{\wp(u)-e_3\}$$

oder

$$\{\wp'(u)\}^2 \equiv 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3,$$

$$\wp''(u) \equiv 4\wp^2(u) - \tfrac{1}{2}g_2, \qquad \wp'''(u) \equiv 12\wp(u)\wp'(u)$$

folgen nun wieder die auf anderem Wege schon abgeleiteten Bedingungsgleichungen

$$(12)\qquad \Theta \equiv F' + 2AF + 2C \equiv 0, \qquad \mathrm{H} \equiv G' + 4AG - 4CF \equiv 0.$$

Nehmen wir umgekehrt an, dass neben $C \not\equiv 0$ diese Identitäten bestehen, so erhalten wir aus (10) oder (11) zunächst drei Gleichungen zur Bestimmung von e_1, e_2, e_3, nämlich:

$$(13)\qquad \begin{aligned} &e_1 + e_2 + e_3 = 0 \\ &g_2 \equiv -4\{e_2e_3 + e_3e_1 + e_1e_2\} \equiv \tfrac{4}{3}\{F^2 + G\}e^{4\int A ds} \\ &g_3 \equiv 4e_1e_2e_3 \equiv -\tfrac{4}{27}\{2F^3 + 3FG + 3C^2\}e^{6\int A ds} \end{aligned}$$

Zufolge (12) werden dann diese Grössen constant. Es liegt aber kein Grund dafür vor, dass e_1, e_2, e_3 von einander verschieden ausfallen sollten. Es ergiebt sich also noch eine weitere, eben für den behandelten Fall (a) charakteristische Bedingung:

$$(14)\qquad \tfrac{1}{16}\{g_2^3 - 27g_3^2\}e^{-12\int A ds} \equiv \tfrac{1}{27}\{4(F^2+G)^3 - (2F^3+3FG+3C^2)^2\} \not\equiv 0.$$

Ist auch diese Voraussetzung erfüllt, so erhält man schliesslich durch Einsetzen der Function

$$(15)\qquad z \equiv \tfrac{1}{3}Fe^{2\int A ds}$$

in die Wurzelgrössen $\sqrt{z-e_\kappa}$ drei linear-unabhängige Lösungen der gegebenen Gleichung. Es ist nämlich, wie aus $\Theta \equiv 0$, d. h. $F' + 2AF \equiv -2C$ und $C \not\equiv 0$ folgt, die aus (15) berechnete Function z nicht constant. Wie dann, nach Annahme einer passend gewählten Constanten e_0, die verlangten Particularlösungen y_1, y_2, y_3 gefunden werden können, wurde schon oben gezeigt.

Aber die in der Formel (15) noch vorkommende Quadratur ist überflüssig. Wir denken uns in dem Integral $\int A ds$ der unteren Grenze einen bestimmten

Werth s_0 beigelegt, und schreiben gleichzeitig die Constante e_0 etwas anders:

$$\int A ds = \int_{s_0}^{s} A ds, \qquad e_0 = e_0^* e^{\int_{s_0}^{s_1} A ds}.$$

Dann leuchtet ein, dass bei Verschiebung von s_0 die Functionen

$$e_0, \; e_1, \; e_2, \; e_3 \text{ und } z$$

alle denselben constanten Factor annehmen, so dass y_1^2, y_2^2, y_3^2 ganz ungeändert bleiben und y_1, y_2, y_3 ebenfalls ungeändert bleiben können.

Die gefundenen Formeln enthalten daher, entsprechend dem Umstande, dass nach Festlegung der Einheitskugel in dem mehrfach genannten Büschel das System der Functionen y_1^2, y_2^2, y_3^2 eindeutig bestimmt sein muss, nur einen wesentlichen Parameter e_0^*. Insbesondere ergiebt sich, dass man, je nach Umständen, eine der drei Constanten $g_3 : g_2$, g_2, g_3 willkürlich vorschreiben und so die in (15) vorkommende Exponentialgrösse bestimmen kann. Man hat dazu entweder die Gleichung

$$(16, \alpha) \qquad e^{2\int A ds} \equiv - \frac{9(F^2 + G)}{2F^3 + 3FG + 3C^2} \cdot \frac{g_3}{g_2},$$

oder, wenn nämlich

$$2F^3 + 3FG + 3C^2 \equiv 0, \qquad g_3 = 0$$

ist, die Gleichung

$$(16, \beta) \qquad e^{2\int A ds} \equiv \tfrac{1}{2} \sqrt[2]{\frac{3g_2}{F^2 + G}}$$

oder endlich, wenn $F^2 + G \equiv 0$, $g_2 = 0$ ist, die Gleichung

$$(16, \gamma) \qquad e^{2\int A ds} \equiv - \tfrac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{2g_3}{2F^3 + 3F^2G + 3C^2}}$$

zu benutzen.

Der Fall IIa) *liegt also dann vor, wenn zu den Bedingungen* $C \mathrel{\equiv\!\!\!\!\!/} 0$, $\Theta \equiv 0$, $\mathrm{H} \equiv 0$ *die Ungleichung* (14) *tritt. Die Auflösung der gegebenen Gleichung erfordert dann lediglich algebraische Operationen.*

Dass von den eingeführten Wurzelgrössen keine durch einen rationalen Ausdruck ersetzt werden kann, so lange nicht weitere (in unseren Voraussetzungen nicht enthaltene) Besonderheiten vorliegen, lässt sich unschwer einsehen.

Zur Bestimmung des auf der Curve (y) überall endlichen Integrals

$$(17) \qquad u \equiv \int ds \cdot e^{\dot{-}\int A ds}$$

braucht man nach dem Vorgetragenen nur die Differentialgleichung für y zu kennen, und man erhält dann diese Function durch Quadratur über gewisse Wurzelgrössen.

In der vorausgehenden Darlegung haben wir darauf Rücksicht genommen, die den Formeln innewohnenden Symmetrie-Eigenschaften hervortreten zu lassen. Will man vielmehr auf den Fall reeller Curven und namentlich derer mit reellen Zügen besondere Rücksicht nehmen, so sind einige der getroffenen Festsetzungen entsprechend zu ändern.

Etliche der abgeleiteten Formeln lassen sich noch etwas weiter entwickeln, wenn man $e_\upsilon = \wp(v)$ setzt ($v \not\equiv 0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ modd. $2\omega_1, 2\omega_2$) und dann zu $\mathfrak{S}$- oder Θ-Functionen übergeht.

§ 8. *Fortsetzung: Grenzfälle.*

Die Betrachtung der Fälle IIb) und IIc) wird wesentlich erleichtert durch die Bemerkung, dass im vorigen § die mit den Formeln (5) einsetzende Entwickelung grossentheils unabhängig davon ist, ob die Grössen e_1, e_2, e_3 von einander verschieden sind, oder nicht. Nur bleiben die auf diese Art ermittelten Lösungen in den Grenzfällen nicht linear-unabhängig. Die fehlenden Lösungen aber kann man unschwer durch Grenzübergänge erhalten.

Im Falle IIb), *der durch die Bedingungen* $C \not\equiv 0$, $\Theta \equiv 0$, $\mathrm{H} \equiv 0$ *und*

$$(1) \qquad 4(F^2 + G)^3 - (2F^3 + 3FG + 3C^2)^2 \equiv 0, \qquad F^2 + G \not\equiv 0$$

gekennzeichnet wird, setzen wir $e_2 = e_3$, und dem entsprechend

$$e_1 = 2\eta, \quad e_2 = -\eta, \quad e_3 = -\eta, \quad \zeta \equiv \frac{z}{\eta}.$$

Wir erhalten dann, wenn ζ aus der Gleichung

$$(2) \qquad \zeta \equiv \frac{z}{\eta} \equiv \frac{1}{3\eta} F e^{2\int A ds} \equiv - \frac{2F(F^2 + G)}{2F^3 + 3FG + 3C^2}$$

bestimmt wird, für ζ einen nicht constanten Werth (da $F \equiv 0$ und auch schon $F' + 2AF \equiv 0$, ebenso wie $G \equiv 0$, das Verschwinden von C zur Folge haben würden). Die Ausdrücke

$$(3) \qquad (\zeta - 2)^{\frac{1}{2}}, \quad (\zeta + 1)^{\frac{1}{2}}, \quad (\zeta + 1)^{-\frac{1}{2}}$$

stellen dann ein System von drei linear-unabhängigen Lösungen dar. Dieses wird leicht durch ein System y_1, y_2, y_3 von der verlangten Form (§ 7, Nr. 2b) ersetzt:

$$y_1 \equiv \lambda \sqrt{\zeta - 2}, \quad y_2 \equiv \frac{1}{2\kappa\lambda} \frac{1}{\sqrt{\zeta + 1}}, \quad y_3 \equiv i \left\{ \lambda \sqrt{\zeta + 1} + \frac{1}{2\kappa\lambda} \frac{1}{\sqrt{\zeta + 1}} \right\},$$

$$\lambda = \sqrt{- \frac{\kappa + 1}{3\kappa}}.$$

Im Falle IIc) treten zu den Bedingungen $C \not\equiv 0$, $\Theta \equiv 0$, $\mathrm{H} \equiv 0$ die

Gleichungen

$$F^2 + G \equiv 0, \qquad 2F^3 + 3FG + 3C^2 \equiv 0.$$

Diese ziehen aber die Gleichungen $\Theta \equiv 0$, $\mathrm{H} \equiv 0$ nach sich. In der That ist jetzt nothwendig $F \not\equiv 0$, $G \not\equiv 0$; man kann daher

$$\Xi \equiv -\frac{C}{F} \equiv \frac{1}{3}\frac{G}{C}$$

setzen, woraus

$$A \equiv \Xi - \frac{\Xi'}{\Xi}, \qquad F \equiv 3\Xi^2,$$

(5) $$B \equiv \frac{1}{3}\left\{\frac{d}{ds}\left(\Xi - \frac{\Xi'}{\Xi}\right) + 2\left(\Xi - \frac{\Xi'}{\Xi}\right)^2 - 3\Xi^2\right\},$$

$$C \equiv -3\Xi^3; \qquad G \equiv -9\Xi^4$$

und $\Theta \equiv 0$, $\mathrm{H} \equiv 0$ folgt. *Die Bedingungen dieses Falles sind also*

(6) $$C \not\equiv 0, \quad F^2 + G \equiv 0, \quad F^3 - 3C^2 \equiv 0;$$

man kann alle hierher gehörigen linearen Differentialgleichungen 3. Ordnung mit Hülfe einer nicht constanten, sonst aber völlig willkürlichen Function $\Xi(s)$ bilden.

Wird, entsprechend den Entwickelungen des vorigen Paragraphen,

$$z \equiv \tfrac{1}{3}Fe^{2\int A ds}, \quad \text{und} \quad Z = \sqrt{z}$$

gesetzt, so folgt

(7) $$Z \equiv e^{\int \Xi ds},$$

und man erhält in den Ausdrücken

(8) $$Z, \quad Z^{-1}, \quad Z^{-3}$$

ein System von drei linear-unabhängigen Lösungen der vorgelegten Gleichung. Die in (7) vorkommende Quadratur ist nicht zu entbehren, so lange die willkürliche Function $\Xi(s)$ nicht specialisiert wird. Ein System von drei Lösungen y_1, y_2, y_3, die der in § 7 aufgestellten Forderung (2c) oder also den Gleichungen

(9) $$y_1^2 + (y_2 + iy_3)(y_2 - iy_3) \equiv 1, \qquad 2y_1(y_2 + iy_3) \equiv -1,$$

genügen, ist

(10) $$y_1 \equiv \frac{i}{2}\cdot\frac{1}{Z}, \qquad y_2 \equiv \frac{i}{2}\left\{Z - \frac{1}{Z} - \frac{1}{4Z^3}\right\}, \qquad y_3 \equiv \frac{1}{2}\left\{Z + \frac{1}{Z} + \frac{1}{4Z^3}\right\}.$$

Man kann aber jetzt die Forderung (9) offenbar auf unendlich viele Weisen erfüllen.

Es hat sich also ergeben:

Im Falle IIb) *erfordert die Lösung der vorgelegten Gleichung nur algebraische Operationen, im Falle* IIc) (*höchstens und in der Regel*) *eine Quadratur.*

Wichtiger als diese stets imaginären Grenzfälle sind die der Annahme $C\equiv 0$ entsprechenden.

Setzen wir also jetzt voraus, dass $C\equiv 0$, $\Theta\equiv 0$, sei — woraus $\mathrm{H}\equiv 0$ folgt — so ergiebt die Gleichung $C\equiv 0$, dass

$$\Phi\equiv\Xi^2,\qquad \Psi\equiv\kappa\Xi^3 \qquad (\kappa=\text{const.},\ \neq 0) \tag{11}$$

gesetzt werden kann. Es folgt dann

$$\begin{gathered} A\equiv-\frac{\Xi'}{\Xi},\qquad F\equiv-(1+\kappa^2)\Xi^2,\qquad G\equiv 0,\\ B\equiv\frac{1}{3}\left\{-\frac{\Xi''}{\Xi}+3\left(\frac{\Xi'}{\Xi}\right)^2+(1+\kappa^2)\Xi^2\right\}; \end{gathered} \tag{12}$$

man kann wieder alle hierher gehörigen Gleichungen mit Hülfe einer nicht identisch verschwindenden, aber sonst willkürlichen Function $\Xi(s)$ bilden.

Sind die Coefficienten A, B gegeben, so sind zwei Fälle zu unterscheiden:

$$C\equiv 0,\qquad \Theta\equiv 0,\qquad F\not\equiv 0, \tag{13a}$$

$$C\equiv 0,\qquad F\equiv 0. \tag{13b}$$

Im ersten Falle kann man der Constanten κ einen geeigneten Werth nach Belieben beilegen, und dann Ξ bestimmen:

$$\Xi\equiv\frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}}\sqrt{-F} \qquad (\kappa\neq 0,\ i,\ -i). \tag{14a}$$

Ein System von drei linear-unabhängigen Lösungen, die den hier etwa zu stellenden Forderungen

$$y_1^2+y_2^2+y_3^2\equiv 1,\qquad y_1\equiv\text{const.} \qquad (\text{const.}\neq 0,\ 1,\ -1) \tag{15a}$$

genügen, ist gegeben durch die Formeln

$$\begin{gathered} y_1=\frac{\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}},\qquad y_2\equiv\frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}}\cos\int\sqrt{-F}\,ds,\\ y_3\equiv\frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}}\sin\int\sqrt{-F}\,ds. \end{gathered} \tag{16a}$$

Die geometrische Bedeutung dieses Formelsystems und die Unentbehrlichkeit der ausgeführten Quadratur sind evident. Für die zugehörigen Curven $x\equiv\int y\,ds$ hat man

$$\frac{R}{T}\equiv\pm\kappa \qquad (\kappa\neq 0,\ i,\ -i); \tag{17a}$$

diese Curven sind Schraubenlinien, die auf gewöhnlichen unebenen Cylindern geodätische Linien sind.

Ist dagegen $F \equiv 0$, so folgt $\kappa = \pm i$, und Ξ wird durch Quadratur ermittelt:

$$\Xi \equiv e^{-\int A ds} \tag{14b}$$

Man kann dann auf unendlich viele Arten — deren einzelne noch von zwei willkürlichen Parametern abhängt — ein System von Lösungen y_1, y_2, y_3 herstellen, die den Forderungen

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1, \qquad y_2 + iy_3 = 1 \tag{15b}$$

genügen. Man kommt zu derartigen Formeln am schnellsten, wenn man unter den auf der Einheitskugel verlaufenden parabolischen Kreisen — die alle zu einander schon vermöge automorpher Bewegungen der Einheitskugel congruent sind — einen geeigneten auswählt,

$$y_1 \equiv -ip, \qquad y_2 \equiv 1 + \tfrac{1}{2}p^2, \qquad y_3 \equiv \frac{i}{2}p^2,$$

und dann die Veränderliche p, die für den parabolischen Kreis ein natürlicher Parameter ist (A. C., § 5), als eine zu suchende Function von s behandelt. Man erhält

$$p \equiv i\int \Xi ds \equiv i \int ds\, e^{-\int A ds},$$

$$y_1 \equiv \int \Xi ds, \qquad y_2 \equiv 1 - \frac{1}{2}\left\{\int \Xi ds\right\}^2, \qquad y_3 \equiv -\frac{i}{2}\left\{\int \Xi ds\right\}^2. \tag{16b}$$

Die zugehörigen Schraubenlinien $x \equiv \int y ds$ entsprechen der Gleichung

$$\frac{R}{T} \equiv \pm i. \tag{17b}$$

Sie sind also geodätische Linien auf (unebenen) Cylindern mit Minimalgeraden als Erzeugenden.

Die Annahme $A \equiv 0$ kennzeichnet in beiden Fallen (a), (b) die (unebenen) *gemeinen* Schraubenlinien, die entweder (a) transcendent oder (b) rational, sogenannte Lion'sche Curven (dritter Ordnung) sind.

Es hat sich also ergeben:

In den durch die Bedingungen (13) *gekennzeichneten Fällen* IIIa) *und* IIIb) *verlangt die Integration der vorgelegten Gleichung höchstens eine* (a) *oder zwei* (b) *Quadraturen.*

Dass diese auch im Falle (b) nicht entbehrlich sind, so lange nicht noch weitere Annahmen hinzukommen, ist evident.

Das in § 6 *gestellte Problem ist hiermit vollständig gelöst. Damit zugleich sind die natürlichen Gleichungen der regulären Curven hergestellt worden,* *deren Tangentenindicatrix ein sphärischer Kegelschnitt ist; es sind die Bedingungen ermittelt, unter denen eine durch ihre natürlichen Gleichungen gegebene Curve dieser Familie angehört, und es ist ferner auch die Integration dieser Gleichungen geleistet.*

Leicht lassen sich nunmehr auch, mit gleichartigem Ergebniss, die natürlichen Gleichungen der regulären Curven behandeln, deren Haupt- oder Binormalenindicatrix ein spärischer Kegelschnitt ist. Wir gehen hierauf nicht mehr ein.

Schlussbemerkungen.

Die in § 6–§ 8 behandelten linearen Differentialgleichungen gehören zu denen, auf die die von Herrn E. *Vessiot* begründete Integrationstheorie Anwendung findet.* In der That stimmen die von uns ausgeführten Operationen *der Art nach* genau überein mit denen, die sich bei Anwendung der Grundsätze des genannten Autors ergeben würden. Wir haben indessen von dieser schönen Theorie mit Absicht keinen Gebrauch gemacht. Einmal wollten wir die an den Leser zu stellenden Anforderungen nicht höher spannen, als eben nöthig war. Dann aber wird eine möglichst zweckmässige Führung der Rechnungen im concreten Falle durch die allgemeine Theorie noch nicht gewährleistet. Endlich hat Herr *Vessiot* den Gegenstand gar nicht berührt, der im Mittelpunkte unserer Untersuchung steht: den Zusammenhang gewisser linearer Differentialgleichungen mit der Theorie der natürlichen Gleichungen analytischer Curven, und die Zurückführung des einen Integrationsproblems auf das andere. In den hier betrachteten besonderen Fällen hat daher unsere elementare Methode den reicheren Inhalt.

Wir erwähnen schliesslich noch, dass der bekannte Zusammenhang der in § 2 gelegentlich betrachteten linearen Differentialgleichungen 3. Ordnung mit der Theorie der linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung (R. Gl., § 12) unschwer auf die Gleichungen

$$y''' + 3Ay'' + 3By' + Cy \equiv 0$$

des in § 6–§ 8 betrachteten Typus ausgedehnt werden kann, wenn auch das Resultat minder einfach zu sein scheint.

Nachdem nämlich auf die beschriebene Art die Functionen Φ, Ψ und aus diesen die Functionen ϕ, ψ bestimmt worden sind, kann man die mit $\sigma(s)$, $\tau(s)$ bezeichneten Functionen in die Form

$$\sigma \equiv \frac{v_1}{w_1}, \qquad \tau \equiv \frac{v_2}{w_2}$$

setzen, wo v_1, w_1 und v_2, w_2 passend gewählte Lösungen von je einer der

*Annales de l'École Normale Supérieure, ser. III, t. 9 (1892).

Gleichungen

$$u_1'' + \frac{\phi}{4} u_1 \equiv 0, \qquad u_2'' + \frac{\psi}{4} u_2 \equiv 0$$

sind. (R. Gl., § 10). Wie die Gleichungen (2) in § 4 zeigen, hat man dann in den Quotienten

$$\frac{v_1 v_2}{v_1 w_2 - v_2 w_1}, \qquad \frac{w_1 w_2}{v_1 w_2 - v_2 w_1}, \qquad \frac{v_1 w_2 + v_2 w_1}{v_1 w_2 - v_2 w_1}$$

drei linear-unabhängige Lösungen der vorgelegten Gleichung 3. Ordnung.

Ob zwischen der Riccati'schen Gleichung

$$\frac{d\Omega}{ds} \equiv \frac{i}{2} \left\{ \frac{1}{T} - 2\frac{\Omega}{R} - \frac{\Omega^2}{T} \right\},$$

zu der die classische Theorie der natürlichen Gleichungen führt, und den von uns benutzten unter einander äquivalenten Gleichungen

$$\frac{d\mu}{ds} \equiv \frac{\phi}{4} + \mu^2, \qquad \frac{d\nu}{ds} = \frac{\psi}{4} + \nu^2$$

ein ähnlich-einfacher Zusammenhang stattfindet, wie der, den wir in § 2 in einem Grenzfall nachgewiesen hatten, das wissen wir nicht zu sagen.

NEAPEL, 5. *Nov.* 1909.