ALLGEMEINE EIGENSCHAFTEN DER CANTORSCHEN KOHÄRENZEN*

VON
MIRON ZARYCKI

Die Ableitung einer Menge A ist die Menge der Häufungspunkte von A. Ich bezeichne dieselbe mit A^d. G. Cantor† nannte die Menge der in A enthaltenen Häufungspunkte von A die (erste) Kohärenz von A. Ich bezeichne sie mit A^k.

In der gegenwärtigen Abhandlung beweise ich einige allgemeine Eigenschaften der Kohärenz von beliebigen Mengen. Alle Sätze erscheinen als Folgen von drei unabhängigen "Axiomen" und ihre Beweise werden mit Hilfe der Grundoperationen der Algebra der Logik durchgeführt. Um die Richtigkeit der als Axiome angenommenen Formeln zu beweisen, musste ich zuerst einige Eigenschaften des Begriffs der Ableitung besprechen.

1. Einige Eigenschaften des Begriffs der Ableitung einer Menge

1. Ich bezeichne den "Raum," in dem alle zu besprechenden Mengen enthalten sind, mit C und die Komplementärmenge von A mit A^c. Dann gelten für beliebige in C enthaltene Mengen folgende Formeln:

I_d: $$(A+B)^d = A^d + B^d;$$

II_d: $$C^d = C;$$

III_d: $$A^{dd} \subset A^d.$$

2. Auf Grund dieser bekannten Formeln beweise ich nun folgende Sätze:

1_d: $$\textit{Aus } A \subset B \textit{ folgt } A^d \subset B^d;$$

2_d: $$A^d - B^d \subset (A-B)^d;$$

3_d: $$A^{cdc} \subset A^{dcdc} \subset A^d;$$

4_d: $$A^{cdc} \subset A^{cdcd} \subset A^d.$$

Der Satz 1_d folgt unmittelbar aus der Formel I_d. Um den Satz 2_d zu beweisen, benutzen wir die evidente Formel $A \subset AB^c + B$. Daraus folgt nach 1_d und I_d:

$$A^d \subset (AB^c + B)^d = (AB^c)^d + B^d$$

* Presented to the Society, February 25, 1928; received by the editors in March, 1927.

† G. Cantor, Acta Mathematica, 1885.

und nach beiderseitigen Multiplikation mit B^{dc}:

$$A^d B^{dc} \subset (AB^c)^d B^{dc} \subset (AB^c)^d.*$$

Setzen wir nun in der Formel 2_d: $A = C$. Man erhält dann nach II_d und 2_d:

$$B^{dc} = C^d D^{dc} \subset (CB^c)^d = B^{cd}$$

und daraus durch die Kontraposition: $B^{cdc} \subset B^d$, oder wenn man jetzt die sonst allgemeine Menge B mit A bezeichnet: $A^{cdc} \subset A^d$. Nach 1_d und III_d folgt daraus:

$$(\alpha) \qquad A^{cdcd} \subset A^{dd} \subset A^d.$$

Die letzte Formel gilt für jede Menge, also auch für A^c, und man bekommt daher $A^{ccdcd} \subset A^{cd}$, oder $A^{dcd} \subset A^{cd}$, und daraus:

$$(\beta) \qquad A^{cdc} \subset A^{dcdc}.$$

In der Formel $A^{cdc} \subset A^d$ setzen wir jetzt A^{cd} anstatt A und es kommt: $A^{cdcdc} \subset A^{cdd} \subset A^{cd}$, und daraus:

$$(\gamma) \qquad A^{cdc} \subset A^{cdcd}.$$

Indem man in (γ) A^c anstatt A setzt, bekommt man $A^{dc} \subset A^{dcd}$, und daraus:

$$(\delta) \qquad A^{dcdc} \subset A^d.$$

Die Relationen 3_d und 4_d sind somit bewiesen.

2. Das Axiomensystem

1. Die Grundlage nachstehender Untersuchungen bildet das folgende Axiomensystem:

$$\mathrm{I}_k: \qquad A^k + B^k \subset (A + B)^k;$$

$$\mathrm{II}_k: \qquad A^k \subset A;$$

$$\mathrm{III}_k: \qquad A^{ckck} = A^{kckc}.$$

2. Die Relation I_k folgt aus der Formel I_d. Man bekommt nämlich

$$A^k + B^k = AA^d + BB^d,$$

und

$$(A+B)^k = (A+B)(A+B)^d = (A+B)(A^d+B^d) = AA^d + BB^d + AB^d + BA^d;$$

also:

$$A^k + B^k \subset (A + B)^k.$$

* Es sei bemerkt, dass die Menge AB^c mit der Menge $A - B$ identisch ist.

Die Relation II_k ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Kohärenz: $A_k = AA^d$.

Um die Identität III_k zu beweisen, bedienen wir uns der Formeln I_d, 3_d und 4_d.

Man erhält nämlich

$$A^{ckck} = (A^cA^{cd})^c(A^cA^{cd})^{cd} = (A + A^{cdc})(A + A^{cdc})^d$$
$$= (A + A^{cdc})(A^d + A^{cdcd}) = AA^d + A^{cdc}A^d + AA^{cdcd} + A^{cdc}A^{cdcd}.$$

Aus 4_d folgt aber $A^{cdc}A^d = A^{cdc}A^{cdcd} = A^{cdc}$ und $AA^{cdcd} \subset AA^d$, also

$$A^{ckck} = AA^d + A^{cdc}.$$

Andererseits folgt aus I_d und 3_d:

$$A^{kckc} = [(AA^d)^c(AA^d)^{cd}]^c = AA^d + (AA^d)^{cdc}$$
$$= AA^d + (A^{cd} + A^{dcd})^c = AA^d + A^{cdc}A^{dcdc}.$$

Da aber, nach 3_d, $A^{cdc}A^{dcdc} = A^{cdc}$, erhält man

$$A^{kckc} = AA^d + A^{cdc}.$$

Die Formel III_k ist also auch bewiesen.

3. Um die Unabhängigkeit der Axiome I_k-III_k zu beweisen, nehmen wir an, der Raum C bestehe aus drei Elementen a, b, c, also: $C=(a, b, c)$. In der nachstehenden Tabelle findet man in jeder der drei Kolonnen solche Definitionen der Kohärenz aller Teilmengen von C, die allen Axiomen ausser dem einzigen oberhalb der betreffenden Kolonne markierten genügen.

	I_k	II_k	III_k
$0^k =$	0	0	0
$(a)^k =$	(a)	(a, b, c)	0
$(b)^k =$	(b)	(b, c)	0
$(c)^k =$	(c)	(c)	0
$(a, b)^k =$	0	(a, b, c)	0
$(b, c)^k =$	0	(b, c)	0
$(c, a)^k =$	0	(a, b, c)	0
$(a, b, c)^k =$	(a, b, c)	(a, b, c)	0

3. Die allgemeinen Eigenschaften der Kohärenz

1. In diesem Teil beweise ich folgende Sätze:

1_k: $$\text{Aus } A \subset B \text{ folgt } A^k \subset B^k;$$

2_k: $$(AB)^k \subset A^k B^k;$$

3_k: $$0^k = 0;$$

4_k: $$C^k = C;$$

5_k: $$A^{ck} \subset A^{kc};$$

6_k: $$(A - B)^k \subset A^k - B^k;$$

7_k: $$A^{kckk} = A^{ckckck};$$

8_k: $$A^{kkck} = A^{kckckc}.$$

2. Beweise der Sätze 1_k-8_k:

(1) Wenn man $A \subset B$ voraussetzt, bekommt man aus I_k: $A^k + B^k \subset B^k$, also $A^k \subset B^k$.

(2) Aus den evidenten Relationen $AB \subset A$ und $AB \subset B$ bekommt man, nach 1_k, $(AB)^k \subset A^k$, $(AB)^k \subset B^k$, und daher, auch $(AB)^k \subset A^k B^k$.

(3) Die Formel 3_k folgt unmittelbar aus dem Axiome II_k.

(4) Setzt man in I_k $B = C$, so bekommt man $A^k + C^k \subset C^k$; es ist also die Kohärenz jeder beliebigen Menge in der Kohärenz von C enthalten. Insbesondere hat man $\{C^{kc}\}^k \subset C^k$, also $C^{kck}C^{kc} = 0$, und nach II_k: $C^{kck} = 0$, also:

$$(\alpha) \qquad C^{kckc} = C.$$

Aus III_k erhält man aber

$$C^{ckck} = C^{kckc} \text{ oder } 0^{kck} = C^{kckc}$$

und nach 3_k:

$$0^{ck} = C^k = C^{kckc}$$

und schliesslich wegen (α):

$$C^k = C.$$

(5) Aus II_k folgt $A^{ck} \subset A^c$, andererseits aber $A^c \subset A^{kc}$, also $A^{ck} \subset A^{kc}$.

(6) Aus 2_k und 5_k folgert man jetzt:

$$(AB^c)^k \subset A^c B^{ck} \subset A^c A^{kc},$$

das heisst den Satz 6_k.

(7) Der Satz 7_k ergibt sich aus III_k:

$$A^{ckckck} = (A^{ckck})^{ck} = A^{kckcck} = A^{kckk}.$$

(8) Aus demselben Axiom bekommt man den Satz 8_k:

$$A^{kckckc} = (A^{kc})^{kckc} = A^{kcckck} = A^{kkck}.$$

4. Die wiederholte Anwendung der Operationen A^k und A^c

1. In diesem Teil beantworte ich zwei folgende Fragen:

(1) Welche verschiedene Mengen erhält man, wenn man auf eine beliebige Menge A eine beliebige endliche Anzahl von Operationen A^k und A^c in beliebiger Reihenfolge anwendet?

(2) Welche Relationen der Inklusion bestehen zwischen den so erhaltenen Mengen?

2. Das Symbol $A \rightarrow B$ im Folgenden bedeuten, dass $A \subset B$.

Wir betrachten jetzt zwei folgende unendliche Tabellen und beweisen die in ihnen enthaltenen Relationen.

$$\begin{array}{lllllllll}
A & \rightarrow & A^{ckc} & \rightarrow & A^{ckkc} & \rightarrow & A^{ckkkc} & \rightarrow & \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
A^{k} & \rightarrow & A^{ckck} & \rightarrow & A^{ckkck} & \rightarrow & A^{ckkkck} & \rightarrow & \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
A^{kk} & \rightarrow & A^{ckckk} & \rightarrow & A^{ckkckk} & \rightarrow & A^{ckkkckk} & \rightarrow & \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
A^{kkk} & \rightarrow & A^{ckckkk} & \rightarrow & A^{ckkckkk} & \rightarrow & A^{ckkkckkk} & \rightarrow & \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllllllll}
A^{c} & \rightarrow & A^{kc} & \rightarrow & A^{kkc} & \rightarrow & A^{kkkc} & \rightarrow & \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
A^{ck} & \rightarrow & A^{kck} & \rightarrow & A^{kkck} & \rightarrow & A^{kkkck} & \rightarrow & \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
A^{ckk} & \rightarrow & A^{kckk} & \rightarrow & A^{kkckk} & \rightarrow & A^{kkkckk} & \rightarrow & \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
A^{ckkk} & \rightarrow & A^{kckkk} & \rightarrow & A^{kkckkk} & \rightarrow & A^{kkkckkk} & \rightarrow & \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Da die zweite Tabelle aus der ersten durch Vertauschen der Mengen A und A^c ensteht, genügt es die in der oberen Tabelle enthaltenen Relationen zu beweisen.

3. Das Bildungsgesetz der Tabelle ist unmittelbar ersichtlich. Man setze nämlich

$$A^{11} = A, \quad A^{1(n+1)} = A^{1nckc} \quad \text{und} \quad A^{(m+1)n} = A^{mnk}.$$

Dann kann die obere Tabelle in folgender Weise dargestellt werden:

$$\begin{array}{ccccccccc}
A^{11} & \rightarrow & A^{12} & \rightarrow & A^{13} & \rightarrow & A^{14} & \rightarrow & \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
A^{21} & \rightarrow & A^{22} & \rightarrow & A^{23} & \rightarrow & A^{24} & \rightarrow & \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
A^{31} & \rightarrow & A^{32} & \rightarrow & A^{33} & \rightarrow & A^{34} & \rightarrow & \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
A^{41} & \rightarrow & A^{42} & \rightarrow & A^{43} & \rightarrow & A^{44} & \rightarrow & \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Die Relationen $A^{mn} \subset A^{(m+1)n}$ folgen unmittelbar aus dem Axiom II_k.

Um die Relationen $A^{m(n+1)} \subset A^{mn}$ zu beweisen genügt es die Formel $A^{m(n+1)} = A^{mnckc}$ zu beweisen weil, aus II_k, $A^{ck} \subset A^c$, also für jede Menge A die Formel $A \subset A^{ckc}$ folgt.

4. **Beweis der Formel $A^{m(n+1)} = A^{mnckc}$.** Wir bemerken zuerst, dass man aus der Tabelle folgende Formel bekommt:

$$A^{mn} = A^{(1n)(m1)} = A^{ck\cdots kck\cdots k} = A^{ck^{n-1}ck^{m-1}}, \tag{1}$$

wo in $ck \cdots kck \cdots k$ die Anzahl der Faktoren k hinter dem ersten c gleich $n-1$ und hinter dem zweiten $m-1$ ist.

Die Formel

$$A^{m(n+1)} = A^{mnckc} \tag{α}$$

gilt für $m = n = 1$.

Wir setzen jetzt voraus, dass sie für $n=1$ und $m=r$ gilt und beweisen, dass sie dann auch für $n=1$ und $m=r+1$ gilt.

Wir haben jetzt nach (1)

$$A^{(r+1)2} = A^{ckck^r} = A^{ckck^{r-1}k} = A^{r2k} = A^{r1ckck} = A^{r1kckc} = A^{(r+1)1ckc}$$

und die Formel (α) ist für $n=1$ und jedes natürliche m bewiesen.

Nun setzen wir voraus, dass sie auch für $n=s$ gilt, dass also

$$A^{m(s+1)} = A^{msckc} \text{ oder } A^{ck^s ck^{m-1}} = A^{ck^{s-1}ck^{m-1}ckc}.$$

Jetzt erhalten wir

$$A^{m(s+2)} = A^{ck^{s+1}ck^{m-1}} = A^{ckk^s ck^{m-1}} = A^{ckcck^s ck^{m-1}}$$
$$= A^{ckcck^{s-1}ck^{m-1}ckc} = A^{ck^s ck^{m+1}ckc} = A^{m(s+1)ckc}.$$

Wir haben also allgemein den Satz bewiesen:

$$A^{mn} \subset A^{st} \text{ für } s \leqq m,\ t \geqq n,$$
$$A^{mn} \subset A^{st} \text{ für } s \geqq m,\ t \leqq n.$$

5. Dass es keine weiteren Relationen zwischen den in beiden Tabellen enthaltenen Mengen bestehen, ersieht man aus dem folgenden Beispiel:

Es sei C ein linearer Raum (eine Gerade). Auf dieser Geraden wählen wir zwei fremde Strecken. Auf der ersten von ihnen wählen wir eine wohlgeordnete Menge vom Typus $(\omega+1)^{\omega+1}$ und bezeichnen diese Menge mit M. Mit N bezeichnen wir die Differenz der zweiten Strecke und einer beliebigen in ihr enthaltenen wohlgeordneten Menge vom Typus $(\omega+1)^{\omega+1}$. Die verlangte Menge A ist die Summe $A=M+N$.

Wenn man auf die so definierte Menge A alle in beiden Tabellen enthaltenen Operationen anwendet, bekommt man lauter verschiedene Mengen, zwischen denen ausser den in den Tabellen angegebenen keine anderen Relationen der Inklusion bestehen.

6. Man ersieht leicht, dass man durch wiederholte Anwendung der Formeln III_k, 7_k, 8_k und $A^{cc}=A$ jede beliebige aus A durch successive Anwendung der Operationen A^k und A^c erhaltene Menge in eine der in den Tabellen enthaltenen Mengen identisch überführen kann. Es gibt also keine von den in den Tabellen gegebenen Mengen verschiedene Menge, die aus A durch die in beliebiger Reihenfolge angewandten Operationen A^k und A^c erhalten werden kann.

Die am Anfang des §4 gestellten Fragen sind somit volkommen beantwortet.

5. Die Cantorschen Adhärenzen

1. G. Cantor nannte die Menge $A^{a_n}=A^{k^{n-1}}A^{k^n c}$* die $n$te Adhärenz von A. Es sei bemerkt, dass die $n$te Adhärenz von A keineswegs mit der ersten Adhärenz der $(n-1)$ten Adhärenz von A identisch ist. Es gelten vielmehr die Identitäten

$$A^{a_n a_1}=A^{a_n} \text{ und } A^{a_n a_m}=0 \text{ für jedes } n \text{ und } m \geqq 2.$$

2. Jede Menge A lässt sich (für jede natürliche Zahl n) auf folgende Weise in elementenfremde Mengen zerlegen:

$$(\alpha) \qquad A=A^{a_1}+A^{a_2}+\cdots+A^{a_n}+A^{k^n}.$$

Man beweist leicht, dass die Summanden obiger Summe wirklich elementenfrei Mengen bilden. Wir haben nämlich

$$A^{k^m}\subset A^{k^n} \text{ für } m>n, \text{ also}: A^{k^m}A^{k^n c}=0.$$

* A^{k^n} ist die $n$te Kohärenz von A.

Es ist aber

$$A^{a_m} = A^{k^{m-1}}A^{k^m c} \text{ und } A^{a_n} = A^{k^{n-1}k^n c}$$

und daher:

$$A^{a_m}A^{a_n} = 0.$$

Es ist auch evident, dass für $s \leqq n$:

$$A^{k^n}A^{a_s} = A^{k^n}A^{k^{s-1}}A^{k^s c} = 0, \text{ weil } A^{k^n} \subset A^{k^s}.$$

Die Formel (α) ist für $n=1$ giltig, denn $A^{a_1}+A^k=AA^{kc}+A^k=A$, weil A^k in A enthalten ist. Setzen wir nun voraus die Formel (α) gelte für $n=r$. Wir bekommen dann

$$A^{a_1} + A^{a_2} + \cdots + A^{a_r} + A^{k^r} = A.$$

Es ist aber

$$A^{a_{r+1}} + A^{k^{r+1}} = A^{k^r}A^{k^{r+1}c} + A^{k^{r+1}} = A^{k^r},$$

weil $A^{k^{r+1}} \subset A^{k^r}$. Man erhält also

$$A^{a_1} + A^{a_2} + \cdots + A^{a_{r+1}} + A^{k^{r+}} = A,$$

womit die sonst bekannte Formel (α) bewiesen ist.

3. Wir liefern noch einen einfachen Beweis eines von W. H. Young* aufgestellten, aber erst von L. E. J. Brouwer† richtig bewiesenen Satzes:

(β) $$A^{a_n} \subset A^{a_m d} \text{ für jedes } m < n.$$

Die Formel (β) gilt für $m=1$ und $n=2$, denn

$$A^{a_2} = A^kA^{kkc} = AA^d\{AA^d(AA^d)^d\}^c = AA^d\{A^c + A^{dc} + (AA^d)^{dc}\}$$
$$= AA^d(AA^d)^{dc}.$$

Es ist aber nach 2_d:

$$A^d(AA^d)^{dc} \subset \{A(AA^d)^c\}^d = \{A(A^c + A^{dc})\}^d (= AA^{dc})^d,$$

also:

$$A^{a_2} \subset A(AA^{dc})^d.$$

Andererseits bekommt man

$$A^{a_1 d} = (AA^{kc})^d = \{A(AA^d)^c\}^d = (AA^{dc})^d.$$

Die Formel $A^{a_2} \subset A^{a_1 d}$ gilt also für jede Menge, also auch für die Menge $A^{k^{n-2}}$ und man bekommt jetzt

$$A^{k^{n-2}a_2} \subset A^{k^{n-2}a_1 d}.$$

* W. H. Young, Quarterly Journal of Mathematics, vol. 35 (1903).

† L. E. J. Brouwer, Amsterdam Academy Proceedings, vol. 18 (1915).

Wir haben aber

$$A^{k^{n-2}a_2} = A^{k^{n-2}ka_1} = A^{k^{n-1}a_1} = A^{a_n}$$

und

$$A^{k^{n-2}a_1 d} = A^{a_{n-1}d}, \text{ also } A^{a_n} \subset A^{a_{n-1}d} \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

Jede Adhärenz ist also in der Ableitung der im Konstruktionsmodus unmittelbar vorangehenden Adhärenz enthalten.

Aus der letzten Formel erhält man aber nach 1_d und III_d:

$$A^{a_{n+1}d} \subset A^{a_n dd} \subset A^{a_n d},$$

und daher

$$A^{a_n} \subset A^{a_{n-1}d} \subset A^{a_{n-2}d}.$$

Durch dieselbe Schlussweise bekommt man endlich

$$A^{a_n} \subset A^{a_m d} \text{ für jedes } m < n.$$

LEMBERG, POLAND