DUAL ET QUASI-DUAL D'UNE ALGEBRE DE BANACH INVOLUTIVE

PAR

J. DIXMIER

Le présent travail est une suite à un mémoire de J. A. Ernest [4]. Pour abréger, nous renvoyons à [4] pour les définitions et les notations principales.

Soit $\mathfrak{W}$ une algèbre de Banach involutive séparable. On considère les représentations factorielles de $\mathfrak{W}$ dans des espaces hilbertiens séparables(1); les classes de quasi-équivalence de telles représentations forment un ensemble $\tilde{\mathfrak{W}}$ qui a été muni dans [4] d'une structure borélienne; l'espace borélien $\tilde{\mathfrak{W}}$ est appelé quasi-dual de $\mathfrak{W}$. Par ailleurs soit $\hat{\mathfrak{W}}$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de $\mathfrak{W}$ dans des espaces hilbertiens séparables; l'ensemble $\hat{\mathfrak{W}}$ a été muni par G. W. Mackey [7] d'une structure borélienne; l'espace borélien $\hat{\mathfrak{W}}$ est appelé dual de $\mathfrak{W}$.

Deux représentations irréductibles de $\mathfrak{W}$ sont quasi-équivalentes si et seulement si elles sont équivalentes. D'autre part, une représentation factorielle π de $\mathfrak{W}$ est quasi-équivalente à une représentation irréductible si et seulement si π est de type I. Par suite, il existe une application bijective évidente Φ de $\hat{\mathfrak{W}}$ sur l'ensemble $\tilde{\mathfrak{W}}_{\mathrm{I}} \subset \tilde{\mathfrak{W}}$ des classes (pour la quasi-équivalence) de représentations factorielles de type I de $\mathfrak{W}$. Nous montrerons dans ce mémoire que $\tilde{\mathfrak{W}}_{\mathrm{I}}$ est une partie borélienne de $\tilde{\mathfrak{W}}$ et que Φ est un isomorphisme d'espaces boréliens. Des résultats partiels dans cette direction (non publiés) avaient déjà été obtenus par J. A. Ernest.

Rappelons qu'on note $H_1, H_2, \cdots, H_\infty$ les espaces hilbertiens séparables types de dimension $1, 2, \cdots, \infty$; qu'on note $\mathfrak{W}_n^c$ l'ensemble des représentations de $\mathfrak{W}$ dans H_n, $\mathfrak{W}^c$ la réunion des $\mathfrak{W}_n^c$, $\mathfrak{W}^p$ l'ensemble des représentations factorielles appartenant à $\mathfrak{W}^c$; nous noterons $\mathfrak{W}^{\mathrm{irr}}$ l'ensemble des représentations irréductibles appartenant à $\mathfrak{W}^c$. L'ensemble $\mathfrak{W}^c$ est muni d'une structure d'espace borélien standard, et $\mathfrak{W}_n^c$, $\mathfrak{W}^p$, $\mathfrak{W}^{\mathrm{irr}}$ sont des sous-ensembles boréliens de $\mathfrak{W}^c$.

Si H est un espace hilbertien, on désignera par $L(H)$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus dans H.

Dans les Lemmes 1 et 2, nous sommes obligés de reprendre les raisonnements de [1, §6, Lemme 3 et Théorème 4], avec des hypothèses légèrement différentes. Nous adoptons les notations de [1]. Rappelons qu'on appelle crible une suite $C=(C_n, p_n)_{n\geq 0}$ telle que, pour tout n, C_n soit un ensemble

Received by the editors September 11, 1961.

(1) Toutes les représentations π de W que nous considérons sont "non dégénérées" en ce sens que les vecteurs $\pi(x)\xi$ (x parcourant W et ξ parcourant l'espace H de la représentation) sont partout denses dans H.

dénombrable et p_n une surjection de C_{n+1} sur C_n. Rappelons aussi qu'on appelle espace polonais un espace séparable E dont la topologie peut être définie par une distance rendant E complet.

LEMME 1. *Soit E un espace métrique séparable. Il existe un crible $C=(C_n, p_n)_{n\geq 0}$, et, pour chaque entier $n\geqq 0$, une application ϕ_n de C_n dans l'ensemble des parties ouvertes non vides de E de diamètre $\leqq 2^{-n}$, de manière que*

(a) *E soit la réunion des $\phi_0(c)$ lorsque c parcourt C_0;*

(b) *pour tout n, et tout $c\in C_n$, $\phi_n(c)$ soit la réunion des $[\phi_{n+1}(c')]^-$, où c' parcourt $p_n^{-1}(c)$.*

Il suffit de reprendre le raisonnement de [1, §6, Lemme 3], en remplaçant les ensembles fermés par des boules ouvertes, et en remarquant que, si B est une boule ouverte de E de rayon $\alpha>0$, il existe un recouvrement de B par une suite de boules ouvertes B_n de rayon $<\alpha/2$ et telles que $\overline{B}_n\subset B$.

LEMME 2. *Soient E un espace polonais, R une relation d'équivalence dans E. Supposons que les classes d'équivalence suivant R soient fermées dans E, et que le saturé pour R de tout ensemble ouvert soit borélien. Alors il existe un ensemble borélien dans E qui rencontre chaque classe d'équivalence en un point et un seul.*

Considérons sur E une distance compatible avec la topologie et pour laquelle E soit complet. Soient $C=(C_n, p_n)$ et (ϕ_n) avec les propriétés du Lemme 1. Pour chaque $c\in C_n$, soit $g_n(c)$ le saturé pour R de l'ensemble ouvert $\phi_n(c)$; par hypothèse, $g_n(c)$ est borélien dans E. Exactement comme dans [1, §6, Théorème 4], on définit, pour tout n et tout $c\in C_n$, les $h_n(c)$, puis les ensembles décroissants S_n, et $S=\bigcap_n S_n$, qui sont encore boréliens. Pour tout entier $n\geqq 0$ et toute classe d'équivalence H suivant R, il existe un élément et un seul $c\in C_n$, soit $c=c_n(H)$, tel que $h_n(c_n(H))$ rencontre H; et l'on a $h_n(c_n(H))\cap H=\phi_n(c_n(H))\cap H, S_n\cap H=\phi_n(c_n(H))\cap H, S=\bigcap_n\phi_n(c_n(H))\cap H, p_n(c_{n+1}(H))=c_n(H)$. (L'argument de [1], purement ensembliste, s'applique mot pour mot.) Comme $[\phi_{n+1}(c_{n+1}(H))]^-\subset\phi_n(c_n(H))$, on a $\bigcap_n \phi_n(c_n(H))\cap H=\bigcap_n [\phi_n(c_n(H))]^-\cap H$. Or les $[\phi_n(c_n(H))]^-\cap H$ sont des ensembles fermés décroissants de diamètre $\leqq 2^{-n}$, donc leur intersection se réduit à un point. Donc $S\cap H$ se réduit à un point, ce qui prouve le lemme.

LEMME 3. *Soient G un groupe topologique polonais, G' un sous-groupe fermé de G. Il existe une partie borélienne de G qui rencontre chaque classe à gauche suivant G' en un point et un seul.*

En effet, si R est la relation d'équivalence de G dont les classes sont les classes à gauche suivant G', les conditions du Lemme 2 sont évidemment remplies.

Rappelons que, sur l'ensemble des opérateurs unitaires d'un espace hilbertien, les topologies faible et forte coincident, et sont compatibles avec la structure de groupe.

Lemme 4. *Soient H un espace hilbertien séparable, G le groupe des opérateurs unitaires de H. Pour la topologie forte (ou faible), G est un groupe polonais.*

En effet, la boule unité $L_1(H)$ de $L(H)$ est compacte séparable pour la topologie faible, donc est un espace polonais. Il suffit [1, §6, Théorème 1] de montrer que G est intersection dénombrable de parties faiblement ouvertes de $L_1(H)$. Or, si (x_i) est une suite partout dense dans la sphère unité de H, G est l'ensemble des $T\in L_1(H)$ tels que $\|Tx_i\|>1-1/j$, $\|T^*x_i\|>1-1/j$ quels que soient i et j. Et chacune de ces inégalités définit une partie faiblement ouverte de $L_1(H)$.

Ceci posé, nous revenons aux notations du début de cet article. Pour $n=1, 2, \cdots, \infty$, soit $\mathfrak{W}_{\mathrm{I}_n}\subset\mathfrak{W}^p$ l'ensemble des représentations π de $\mathfrak{W}$ telles que $\pi(\mathfrak{W})'$ soit un facteur de type I_n. On a $\mathfrak{W}_{\mathrm{I}_1}=\mathfrak{W}^{\mathrm{irr}}$. Soit $\mathfrak{W}_{\mathrm{I}}$ la réunion des $\mathfrak{W}_{\mathrm{I}_n}$. Alors $\mathfrak{W}_{\mathrm{I}}$ est l'ensemble des représentations factorielles de type I de $\mathfrak{W}$ (dans $H_1, H_2, \cdots, H_\infty$). Les ensembles $\mathfrak{W}_{\mathrm{I}_n}$ sont saturés pour l'équivalence unitaire mais pas pour la quasi-équivalence; au contraire, $\mathfrak{W}_{\mathrm{I}}$ est saturé pour la quasi-équivalence. Une représentation de $\mathfrak{W}_{\mathrm{I}_n}$ est unitairement équivalente à une représentation de la forme $\pi\oplus\pi\oplus\cdots\oplus\pi$ (n termes) avec π irréductible. Les ensembles $\mathfrak{W}_{\mathrm{I}_n}$ ont tous la même image $\tilde{\mathfrak{W}}_{\mathrm{I}}$ dans $\tilde{\mathfrak{W}}$.

Lemme 5. *Soit B une partie borélienne de $\mathfrak{W}_{\mathrm{irr}}$ saturée pour l'équivalence unitaire. Soit C l'ensemble des éléments de $\mathfrak{W}_{\mathrm{I}_p}$ quasi-équivalents à un élément de B. Alors C est borélien dans $\mathfrak{W}^c$.*

Les ensembles $B\cap\mathfrak{W}_1^c$, $B\cap\mathfrak{W}_2^c, \cdots$ sont boréliens et saturés pour l'équivalence unitaire. Il suffit de raisonner sur chacun de ces ensembles. Autrement dit, nous supposerons désormais que les éléments de B opèrent dans un H_n. Alors les éléments de C opèrent dans H_{np}. Nous exposerons la démonstration pour $n=p=\infty$ (les autres cas se traitent de manière analogue et un peu plus simple). Posons alors $H_n=H_{np}=H$.

Soit $(K_1, K_2, \cdots)$ une suite infinie de sous-espaces vectoriels fermés de dimension infinie de H, deux à deux orthogonaux, de somme hilbertienne H. Soit J_n un isomorphisme de H sur K_n. Pour tout $T\in L(H)$, les opérateurs $J_nTJ_n^{-1}$ définissent par linéarité et continuité un opérateur T' dans H, et $T\to T'$ est un isomorphisme de $L(H)$ sur un facteur F de type I_∞, ensemble des opérateurs linéaires continus de H qui laissent stables les K_n et dont les parties induites dans les K_n sont échangées par les isomorphismes $J_{n'}J_n^{-1}$. Le commutant F' de F est aussi un facteur de type I_∞. Soit π une représentation de $\mathfrak{W}$ dans H. On notera π' la représentation $x\to\pi(x)'$ de $\mathfrak{W}$ dans H. Si $\pi\in\mathfrak{W}^{\mathrm{irr}}$, $\pi'(\mathfrak{W})$ engendre le facteur F. L'application $\pi\to\pi'$ est évidemment injective, et elle est borélienne; car soient $\xi=\xi_1+\xi_2+\cdots$, $\eta=\eta_1+\eta_2+\cdots\in H$, avec $\xi_i, \eta_i\in K_i$; on a, pour $x\in\mathfrak{W}$,

$$(\pi'(x)\xi \mid \eta) = \sum_{n\geq 1}(J_n\pi(x)J_n^{-1}\xi_n \mid \eta_n) = \sum_{n\geq 1}(\pi(x)J_n^{-1}\xi_n \mid J_n^{-1}\eta_n)$$

et chaque terme $(\pi(x)J_n^{-1}\xi_n | J_n^{-1}\eta_n)$ est une fonction borélienne de π. D'après [7, Théorème 3.2], l'ensemble B' des π', où π parcourt B, est une partie borélienne de $\mathfrak{W}^c$, contenue dans $\mathfrak{W}_{\mathrm{I}_\infty}$.

L'ensemble C de l'énoncé est la réunion des $UB'U^{-1}$, où U parcourt le groupe G des opérateurs unitaires de H. Autrement dit, C est l'image de $G\times B'$ par l'application $\Theta: (U, \sigma)\rightarrow U\sigma U^{-1}$ de $G\times B'$ dans $\mathfrak{W}^c$. Sur G, la topologie forte ou faible définit une structure borélienne standard, et Θ est une application borélienne [7, p. 152]. Nous allons montrer que, pour un élément U de G, les conditions suivantes sont équivalentes (pourvu que $B\neq\emptyset$, cas auquel on peut évidemment se limiter):

(1) $UFU^{-1}=F$;

(2) $U=VW$, avec V, W unitaires, $V\in F$, $W\in F'$;

(3) $UB'U^{-1}=B'$;

(4) il existe $\pi_1, \pi_2\in B'$ tels que $U\pi_1U^{-1}=\pi_2$.

(4)$\Rightarrow$(1): soient $\pi_1, \pi_2\in B'$ avec $U\pi_1U^{-1}=\pi_2$. Alors $U\pi_1(\mathfrak{W})U^{-1}=\pi_2(\mathfrak{W})$, donc, en prenant les adhérences faibles, $UFU^{-1}=F$.

(1)$\Rightarrow$(2): si $UFU^{-1}=F$, U définit un automorphisme de F. Or tout automorphisme d'un facteur de type I est défini par un opérateur unitaire de ce facteur [2, p. 253, Proposition 3] appliquée à $L(H)$). Il existe donc un opérateur unitaire V de F tel que $W=V^{-1}U$ définisse l'automorphisme identique de F, autrement dit appartienne à F'. Et on a $U=VW$.

(2)$\Rightarrow$(3): Soit $U=VW$, avec V, W unitaires, $V\in F$, $W\in F'$. Soit $\pi\in B$. On a $W\pi'(x)W^{-1}=\pi'(x)$ pour tout $x\in\mathfrak{W}$. D'autre part, V est de la forme T' avec un opérateur unitaire T dans H. Alors $V\pi'(x)V^{-1}=(T\pi(x)T^{-1})'$, donc $V\pi'V^{-1}=(T\pi T^{-1})'$. Or $T\pi T^{-1}\in B$ puisque B est saturé pour l'équivalence unitaire. Donc $U\pi'U^{-1}\in B'$, et finalement $UB'U^{-1}=B'$.

(3)$\Rightarrow$(4): évident.

Les conditions (1)–(4) définissent un sous-groupe G' de G. Sur la condition (1), il est clair que G' est fermé. D'après les Lemmes 3 et 4, il existe un sous-ensemble borélien S de G qui rencontre chaque classe à gauche de G suivant G' en un point et un seul. Montrons que $\Theta(G\times B')=\Theta(S\times B')$. Il est clair que $\Theta(G\times B')\supset\Theta(S\times B')$. Réciproquement, soient $U\in G, \sigma\in B'$. On a $U=U_1U_2$ avec $U_1\in S$, $U_2\in G'$. Alors $\Theta(U,\sigma)=U_1(U_2\sigma U_2^{-1})U_1^{-1}\in U_1B'U_1^{-1}\subset\Theta(S\times B')$ d'après la condition (3) ci-dessus, d'où l'égalité annoncée. Montrons que la restriction de Θ à $S\times B'$ est injective. Soient $\pi_1, \pi_2\in B'$, et $W_1, W_2\in S$, tels que $W_1\pi_1W_1^{-1}=W_2\pi_2W_2^{-1}$; alors $W_2^{-1}W_1$ vérifie la condition (4) ci-dessus, donc W_1 et W_2 appartiennent à la même classe à gauche suivant G', donc $W_1=W_2$, et alors $\pi_1=\pi_2$. Ceci posé, $C=\Theta(S\times B')$ est borélien dans $\mathfrak{W}^c$ d'après [7, Théorème 3.2].

THÉORÈME 1. *Soit* $n=1, 2, \cdots, \infty$. *L'ensemble* $\mathfrak{W}_{\mathrm{I}_n}$ *est une partie borélienne de* $\mathfrak{W}^c$. *L'ensemble* $\mathfrak{W}_{\mathrm{I}}$ *est une partie borélienne de* $\mathfrak{W}^c$.

La première assertion résulte du Lemme 5 appliqué à $B=\mathfrak{W}^{\mathrm{irr}}$. La deuxième assertion résulte de la première.

COROLLAIRE 1. *Les ensembles* $\mathcal{W}_{\mathrm{I}_n}$, $\mathcal{W}_{\mathrm{I}}$, *munis de la structure borélienne induite par celle de* $\mathcal{W}^c$, *sont des espaces boréliens standard.*

COROLLAIRE 2. $\widetilde{\;}_{\mathrm{I}}$ *est une partie borélienne de* $\widetilde{\mathcal{W}}$.

Comme on l'a remarqué dans l'introduction, l'injection canonique i de $\mathcal{W}^{\mathrm{irr}}$ dans $\mathcal{W}_{\mathrm{I}}$ définit par passage aux quotients une bijection Φ de $\hat{\mathcal{W}}$ sur $\widetilde{\mathcal{W}}_{\mathrm{I}}$.

THÉORÈME 2. *L'application* Φ *est un isomorphisme de l'espace borélien* $\hat{\mathcal{W}}$ *sur l'espace borélien* $\widetilde{\mathcal{W}}_{\mathrm{I}}$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{W}^{\mathrm{irr}} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "q"'] & \mathcal{W}_{\mathrm{I}} \arrow[d, "p"] \\ \hat{\mathcal{W}} \arrow[r, "\Phi"] & \widetilde{\mathcal{W}}_{\mathrm{I}} \end{tikzcd}$$

Soient $p: \mathcal{W}_{\mathrm{I}} \to \widetilde{\mathcal{W}}_{\mathrm{I}}$ et $q: \mathcal{W}^{\mathrm{irr}} \to \hat{\mathcal{W}}$ les applications canoniques. Soit S une partie borélienne de $\widetilde{\mathcal{W}}_{\mathrm{I}}$. Alors $p^{-1}(S)$ est une partie borélienne de $\mathcal{W}_{\mathrm{I}}$ saturée pour la quasi-équivalence. Donc $i^{-1}(p^{-1}(S)) = q^{-1}(\Phi^{-1}(S))$ est une partie borélienne de $\mathcal{W}^{\mathrm{irr}}$ saturée pour l'équivalence unitaire. Donc $\Phi^{-1}(S)$ est borélien dans $\hat{\mathcal{W}}$.

Soit T une partie borélienne de $\hat{\mathcal{W}}$. Alors $q^{-1}(T)$ est une partie borélienne de $\mathcal{W}^{\mathrm{irr}}$ saturée pour l'équivalence. L'ensemble $p^{-1}(\Phi(T))$ est le saturé de $i(q^{-1}(T))$ pour la quasi-équivalence. Appliquant le Lemme 5 avec $B = q^{-1}(T)$, on voit que cet ensemble est borélien dans $\mathcal{W}_{\mathrm{I}}$. Donc $\Phi(T)$ est borélien dans $\widetilde{\mathcal{W}}_{\mathrm{I}}$.

Le Théorème 2 permet d'identifier $\hat{\mathcal{W}}$ à un sous-espace borélien de $\widetilde{\mathcal{W}}$.

Appendice: application du Lemme 2 à un problème de Mackey. Mackey a montré [7, Théorème 8.5] que, s'il existe dans $\mathcal{W}^{\mathrm{irr}}$ un ensemble borélien rencontrant chaque classe d'équivalence en un point et un seul, l'espace borélien $\hat{\mathcal{W}}$ est dénombrablement séparé. On va voir que la réciproque est vraie:

THÉORÈME 3. *Si l'espace borélien* $\hat{\mathcal{W}}$ *est dénombrablement séparé, il existe dans* $\mathcal{W}^{\mathrm{irr}}$ *un ensemble borélien rencontrant chaque classe d'équivalence en un point et un seul.*

Il existe une C^*-algèbre $\mathcal{W}'$ associée à $\mathcal{W}$ telle que les représentations de $\mathcal{W}$ dans un espace hilbertien s'identifient à celles de $\mathcal{W}'$; et on voit tout de suite que cette identification est compatible avec la topologie de la convergence simple forte. On peut donc supposer désormais que $\mathcal{W}$ est une C^*-algèbre. Alors, l'hypothèse que $\hat{\mathcal{W}}$ est dénombrablement séparé entraîne que $\mathcal{W}$ est GCR ([3, Théorème 1] et [6, Théorème 2]).

Pour $n = 1, 2, \cdots, \infty$, soient $\mathcal{W}_n^{\mathrm{irr}}$ l'ensemble des représentations irréductibles de $\mathcal{W}$ dans H_n, et $\hat{\mathcal{W}}_n$ l'image de $\mathcal{W}_n^{\mathrm{irr}}$ dans $\hat{\mathcal{W}}$. Pour la topologie de la convergence simple forte, $\mathcal{W}_n^{\mathrm{irr}}$ est un espace polonais [3, Lemme 4]. La topologie quotient de celle de $\mathcal{W}_n^{\mathrm{irr}}$ sur $\hat{\mathcal{W}}_n$ est la topologie induite sur $\hat{\mathcal{W}}_n$ par la topologie naturelle de $\hat{\mathcal{W}}$ [5, Corollaire du Théorème 3.1]. Comme $\mathcal{W}$ est GCR, cette topologie possède la propriété suivante [3, p. 7]: il existe une famille croissante bien ordonnée $(U_\rho)_{\rho\in P}$ de parties ouvertes de $\hat{\mathcal{W}}$, avec P dénombrable, telle que les $V_\rho = U_{\rho+1} - U_\rho$ forment une partition de $\hat{\mathcal{W}}$ et soient séparés. Chaque V_ρ est l'intersection d'une partie ouverte et d'une partie fermés de $\hat{\mathcal{W}}$. Soit $\mathcal{W}_{n,\rho}^{\mathrm{irr}}$ l'image réciproque de V_ρ dans $\mathcal{W}_n^{\mathrm{irr}}$. Alors $\mathcal{W}_{n,\rho}^{\mathrm{irr}}$ est dans $\mathcal{W}_n^{\mathrm{irr}}$ l'intersection d'une partie ouverte et d'une partie fermée, donc un G_δ; donc $\mathcal{W}_{n,\rho}^{\mathrm{irr}}$ est un espace polonais [1, §6, Théorème 1]. Le saturé dans $\mathcal{W}_{n,p}^{\mathrm{irr}}$ d'une partie ouverte est ouvert puisque l'équivalence unitaire dans $\mathcal{W}^c$ est définie par une groupe d'homéomorphismes. Enfin, comme V_ρ est séparé, les classes d'équivalence sont fermées dans $\mathcal{W}_{n,\rho}^{\mathrm{irr}}$. On peut donc appliquer le Lemme 2: il existe une partie borélienne de $\mathcal{W}_{n,\rho}^{\mathrm{irr}}$ rencontrant chaque classe de $\mathcal{W}_{n,\rho}^{\mathrm{irr}}$ en un point et un seul. Ceci étant vrai pour tout n et tout ρ, le théorème est démontré.

Bibliographie

1. N. Bourbaki, *Topologie générale*, Chap. IX, 2e édition, Hermann, Paris, 1958.

2. J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, Gauthier-Villars, Paris, 1957.

3. ———, *Sur les structures boréliennes du spectre d'une C*-algèbre*, Publications Math. Institut Hautes Études Scientifiques, 6, pp. 5–11.

4. J. A. Ernest, *A decomposition theory for unitary representations of locally compact groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **104** (1962), 252–277.

5. J. M. G. Fell, *C*-algebras with smooth dual*, Illinois J. Math. **4** (1960), 221–230.

6. J. Glimm, *Type* I *C*-algebras*, Ann. of Math. (2) **73** (1961), 572–611.

7. G. W. Mackey, *Borel structure in groups and their duals*, Trans. Amer. Math. Soc. **85** (1957), 134–165.

Institut Henri Poincaré,
Paris, France