TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 279, Number 2, October 1983

ESPACES l^p DANS LES SOUS-ESPACES DE L^1

BY

S. GUERRE ET M. LEVY

ABSTRACT. It is shown that every subspace E of L^1 contains a subspace isomorphic to $l^{p(E)}$, where $p(E)$ is the upper bound of the set of real p's such that E is of type p-Rademacher. As $p(E)$ is also the upper bound of the set of real p's such that E embeds into L^p, this result answers a question of H. P. Rosenthal.

The proof uses the theory of stable Banach spaces developed by J. L. Krivine and B. Maurey.

Les espaces de Banach stables ont été introduits par J. L. Krivine et B. Maurey [**3**] pour généraliser un résultat de D. Aldous [**1**]: "tout sous-espace de dimension infinie E de L^1 contient un sous-espace isomorphe à l^p pour un certain $p \geqslant 1$". Nous utilisons ici les techniques développées dans [**3**] pour caractériser le plus petit réel p tel que E contienne un sous-espace isomorphe à l^p. Ceci répond à une question posée par H. P. Rosenthal dans [**5**].

Soit E un espace de Banach. On note $p(E)$ la borne supérieure de l'ensemble des nombres réels p tels que E soit de type p-Rademacher [**4**]. D'après les résultats de Rosenthal [**6**], si E est un sous-espace de L^1, $p(E)$ est aussi la borne supérieure de l'ensemble des réels p tels que E se plonge dans L^p. L'objet de ce travail est de démontrer le théorème suivant.

THEOREME 1. *Soit E un sous-espace fermé de dimension infinie d'un espace L^1. Alors E contient un sous espace isomorphe à $l^{p(E)}$.*

REMARQUE. Il est clair que si $q < p(E)$, E ne contient aucun sous-espace isomorphe à l^q. Donc $p(E)$ est aussi le plus petit réel q tel que l^q soit isomorphe à un sous-espace de E.

Comme B. Maurey et G. Pisier ont démontré dans [**4**] que $l^{p(E)}$ est finiment représentable dans E, le Théorème 1 se déduit du théorème suivant.

THEOREME 2. *Soit E un sous-espace fermé de dimension infinie de L^1. Si l^p est finiment représentable dans E, alors il existe $q \leqslant p$ tel que E contienne un sous-espace isomorphe à l^q.*

La démonstration du Théorème 2 repose sur la stabilité des espaces L^1. Rappelons les principales définitions concernant la stabilité qui figurent dans [**3**].

Received by the editors March 29, 1982 and, in revised form, September 20, 1982.
1980 *Mathematics Subject Classification.* Primary 46E30.
Key words and phrases. L^1-spaces, l^p-subspaces of L^1, stable Banach spaces, ultrapowers.

On dira qu'un espace de Banach X est *stable* si quels que soient les suites bornées $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_m)_{m\in\mathbf{N}}$ de X et les ultrafiltres $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ sur $\mathbf{N}$ on a

$$\lim_{n,\mathfrak{U}}\lim_{m,\mathfrak{V}}\|x_n + y_m\| = \lim_{m,\mathfrak{V}}\lim_{n,\mathfrak{U}}\|x_n + y_m\|.$$

Une fonction σ de X dans $\mathbf{R}^+$ est un *type* sur X s'il existe une suite bornée $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de X et un ultrafiltre $\mathfrak{U}$ sur $\mathbf{N}$ tels que, pour tout élément x de X, on ait: $\sigma(x) = \lim_{n,\mathfrak{U}}\|x + a_n\|$.

On munit *l'espace* $\mathfrak{F}(X)$ *des types sur* X de la topologie de la convergence simple sur X.

Si $\sigma(x) = \lim_{n,\mathfrak{U}}\|x + a_n\|$ et $\tau(x) = \lim_{m,\mathfrak{V}}\|x + b_m\|$, le *produit de convolution* des types σ et τ est défini par

$$\sigma * \tau(x) = \lim_{n,\mathfrak{U}}\lim_{m,\mathfrak{V}}\|x + a_n + b_m\|.$$

On définit le type $\lambda\sigma$ en posant

$$\lambda\sigma(x) = \lim_{n,\mathfrak{U}}\|x + \lambda a_n\| = |\lambda| \cdot \sigma\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

Une *classe conique* est une partie fermée de $\mathfrak{F}(X)$ stable par les deux opérations définies ci-dessus.

On dira qu'un type σ est *symétrique* si $\sigma = -\sigma$. On dira que σ est un *l^p-type* si σ est symétrique et si $\alpha\sigma * \beta\sigma = (\alpha^p + \beta^p)^{1/p}$ pour tous réels positifs α et β. On posera encore: $\|\sigma\| = \sigma(0) = \lim_{n,\mathfrak{U}}\|a_n\|$. Soient E un sous-espace de L^1, $\mathfrak{D}$ un ultrafiltre sur $\mathbf{N}$ et $F = E^{\mathbf{N}}/\mathfrak{D}$ une ultrapuissance de E [**2**]. Les espaces L^1 sont stables [**3**] et toute ultrapuissance d'un espace L^1 est encore un espace L^1, ce qui entraîne la stabilité de E et de F. Dans la suite, on identifiera E à un sous espace de F de la manière suivante: à tout élément x de E, on associe l'élément $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de F, tel que $x_n = x$ pour tout n appartenant à $\mathbf{N}$.

Schéma de la démonstration. D'après les résultats fondamentaux de [**3**], toute classe conique C de $\mathfrak{F}(E)$ contient un l^r-type pour un certain r et de plus, E contient alors un sous-espace $(1 + \varepsilon)$-isomorphe à l^r. Comme l^p est finiment représentable dans E, l'ultrapuissance F contient l^p et $\mathfrak{F}(F)$ contient un l^p-type τ. Soient σ la restriction de τ à E et C la classe conique engendrée par σ. La clé de la démonstration consiste à prouver que $\|\chi * \chi\| \geq 2^{1/p}\|\chi\|$ pour tout type χ de C. Par conséquent, si χ_0 est un l^q-type dans C, on a $q \leq p$.

Nous donnons d'abord les outils techniques concernant les extensions et restrictions de types entre E et F et nous démontrons ensuite les lemmes qui permettent d'obtenir les inégalités ci-dessus.

Extension naturelle d'un type sur E en un type sur F. Soit θ un type sur E, défini par une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de E et un ultrafiltre $\mathfrak{U}$. On définit *l'extension naturelle de θ* à F de la manière suivante: pour tout élément $\xi = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de F, on pose

$$\theta(\xi) = \lim_{n,\mathfrak{D}}\theta(x_n).$$

Par stabilité de E, on a

$$\theta(\xi) = \lim_{n,\mathfrak{D}}\lim_{m,\mathfrak{U}}\|x_n + a_m\| = \lim_{m,\mathfrak{U}}\lim_{n,\mathfrak{D}}\|x_n + a_m\| = \lim_{m,\mathfrak{U}}\|\xi + a_m\|.$$

L'extension naturelle de θ à F est donc un type sur F. On peut alors identifier $\mathcal{F}(E)$ à une classe conique de $\mathcal{F}(F)$.

Restriction à E d'un type sur F. Si τ est un type sur F, défini par une suite $(\xi_m)_{m\in\mathbf{N}}$ d'éléments de F et un ultrafiltre $\mathcal{U}$, la restriction σ de τ à E est un type sur E. En effet pour chaque entier m, ξ_m est défini par une suite $(\xi_m^n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de E et si x appartient à E, on a

$$\sigma(x) = \tau(x) = \lim_{m,\mathcal{U}} \|x + \xi_m\| = \lim_{m,\mathcal{U}} \lim_{n,\mathcal{D}} \|x + \xi_m^n\|.$$

REMARQUE. Si χ est un type sur E défini par une suite $(b_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'éléments de E et un ultrafiltre $\mathcal{V}$, alors on a, pour tout élément x de E,

$$\chi * \tau(x) = \lim_{k,\mathcal{V}} \lim_{n,\mathcal{U}} \|x + \xi_m + b_k\| = \lim_{k,\mathcal{V}} \lim_{m,\mathcal{U}} \lim_{n,\mathcal{D}} \|x + \xi_m^n + b_k\| = \chi * \sigma(x).$$

On utilise maintenant les propriétés particulières de la norme de L^1: comme E est un sous-espace de L^1, la fonction $\varphi(x, y) = e^{-\|x-y\|}$ est de "*type positif*" sur E [**2**], et se représente donc par un produit scalaire dans un espace de Hilbert. Plus précisément, il existe un espace de Hilbert H et une application u de E dans H tels que

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad e^{-\|x-y\|} = \langle u_x, u_y \rangle.$$

Nous utiliserons dans la suite une classe de types sur E possèdant une propriété similaire de représentation par un produit scalaire dans un espace de Hilbert.

DÉFINITION. Soit X un espace de Banach. On dira qu'un type θ sur X est *positif* si θ est un type symétrique et si la fonction $\varphi(x, y) = e^{-\theta(x-y)}$ est de "*type positif*" sur X. (Dans un espace L^1, le type représenté par la suite nulle est donc positif.)

Ceci équivaut [7] à l'existence d'un espace de Hilbert H^θ et d'une application u^θ de X dans H^θ, vérifiant

$$\forall x \in X, \forall y \in X, \quad e^{-\theta(x-y)} = \langle u_x^\theta, u_y^\theta \rangle.$$

Dans la suite, on supposera que $u^\theta(E)$ est total dans H^θ. Soient maintenant θ un type positif sur E et (H^θ, u^θ) comme ci-dessus.

Extension de u^θ à F. L'extension naturelle de θ à F est un type positif sur F. En effet, soit $G^\theta = (H^\theta)^{\mathbf{N}}/\mathcal{D}$. Alors G^θ est un espace de Hilbert et si $\xi = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est un élément de F, on définit l'élément u_ξ^θ de G^θ par $u_\xi^\theta = (u_{x_n}^\theta)_{n\in\mathbf{N}}$. L'élément ainsi défini ne dépend que de ξ. En effet, si x et y sont deux éléments de E, on a

$$\|u_x^\theta - u_y^\theta\|^2 = 2(e^{-\theta(0)} - e^{-\theta(x-y)}) \leqslant 2|\theta(0) - \theta(x-y)| \leqslant 2\|x-y\|.$$

On obtient ainsi une application u^θ de F dans G^θ vérifiant

$$\forall \xi = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in F, \quad \forall \eta = (y_n)_{n\in\mathbf{N}} \in F,$$

$$e^{-\theta(\xi-\eta)} = \lim_{n,\mathcal{D}} e^{-\theta(x_n-y_n)} = \lim_{n,\mathcal{D}} \langle u_{x_n}^\theta, u_{y_n}^\theta \rangle = \langle u_\xi^\theta, u_\eta^\theta \rangle.$$

Il en résulte que θ est un type positif sur F.

Extension de u^θ à $\mathcal{F}(F)$. Soit τ un type sur F défini par une suite $(\xi_m)_{m\in\mathbf{N}}$ d'éléments de F et un ultrafiltre $\mathcal{U}$. La suite $(u_{\xi_m}^\theta)_{m\in\mathbf{N}}$ est bornée dans H^θ, car $\|u_{\xi_m}^\theta\|^2 = e^{-\|\theta\|}$. Soit u_τ^θ sa limite faible dans G^θ suivant l'ultrafiltre $\mathcal{U}$. L'élément u_τ^θ ne dépend que du type τ; an effet on a, pout tout élément η de E,

$$\langle u_\tau^\theta, u_\eta^\theta \rangle = \lim_{m,\mathcal{U}} \langle u_{\xi_m}^\theta, u_\eta^\theta \rangle = \lim_{m,\mathcal{U}} e^{-\theta(\xi_m-\eta)} = e^{-\theta * \tau(-\eta)}.$$

L'application u^θ se prolonge ainsi en une application u^θ de $\mathcal{F}(F)$ dans G^θ qui vérifie

$$\forall \tau \in \mathcal{F}(F), \forall \tau' \in \mathcal{F}(F), \quad e^{-\|\theta * \tau * -\tau'\|} = \left\langle u_\tau^\theta, u_{\tau'}^\theta \right\rangle.$$

De plus, H^θ s'identifie naturellement à un sous-espace de G^θ et il est clair que l'application u^θ envoie $\mathcal{F}(E)$ dans H^θ.

LEMME 1. *Soit θ un type positif sur E, τ un type sur F et σ la restriction de τ à E. Alors* $\|\theta * \tau * -\tau\| \leqslant \|\theta * \sigma * -\sigma\|$.

DÉMONSTRATION DU LEMME 1. Pour tout élément x de E, on a

$$\theta * \sigma(-x) = \theta * \tau(-x)$$

et donc $\langle u_\sigma^\theta, u_x^\theta \rangle = \langle u_\tau^\theta, u_x^\theta \rangle$.

On en déduit que u_σ^θ est l'image de u_τ^θ par la projection orthogonale de G^θ sur H^θ. En particulier on peut écrire

$$\|u_\sigma^\theta\|^2 \leqslant \|u_\tau^\theta\|^2$$

et donc $\|\theta * \tau * -\tau\| \leqslant \|\theta * \sigma * -\sigma\|$.

PROPOSITION. *Le produit de convolution de deux types positifs sur E est un type positif.*

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. On utilise la représentation déjà mentionnée de la norme de E dans un espace de Hilbert: soit H un espace de Hilbert, et soit u une application de E dans H tels que

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad e^{-\|x-y\|} = \left\langle u_x, u_y \right\rangle.$$

On peut supposer que $u(E)$ est total dans H.

Soit z un élément de E. On définit un opérateur T_z sur H en posant, pour tout x dans E, $T_z u_x = u_{x+z}$. Si x et y sont deux éléments de E, on a

$$e^{-\|x+z-y\|} = \left\langle u_{x+z}, u_y \right\rangle = \left\langle u_x, u_{y-z} \right\rangle.$$

D'où $\langle T_z u_x, u_y \rangle = \langle u_x, T_{-z} u_y \rangle$. On peut donc prolonger T_z en un opérateur linéaire sur H vérifiant $T_z^* = T_{-z} = T_z^{-1}$. Soit σ un type sur E défini par une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et un ultrafiltre $\mathcal{U}$. Soit T_σ l'élément de $\mathcal{L}(H)$ tel que pour tout élément h de H et tout élément h' de H on ait

$$\left\langle T_\sigma(h), h' \right\rangle = \lim_{n, \mathcal{U}} \left\langle T_{a_n}(h), h' \right\rangle.$$

L'opérateur T_σ ne dépend que du type σ. En effet, si x et y sont deux éléments de E, on a

$$\left\langle T_\sigma u_x, u_y \right\rangle = \lim_{n, \mathcal{U}} \left\langle T_{a_n} u_x, u_y \right\rangle = \lim_{n, \mathcal{U}} e^{-\|a_n + x - y\|} = e^{-\sigma(x-y)}.$$

On vérifie immédiatement que si σ et σ' sont deux types sur E, alors

$$T_\sigma^* = T_{-\sigma} \quad \text{et} \quad T_{\sigma * \sigma'} = T_\sigma T_{\sigma'} = T_{\sigma'} T_\sigma.$$

La proposition se déduit alors du résultat suivant.

LEMME 2. *Soit σ un type sur E. Alors σ est un type positif si et seulement si T_σ est un opérateur auto-adjoint positif sur H.*

DÉMONSTRATION DU LEMME 2. Il est clair que σ est un type symétrique si et seulement si T_σ est auto-adjoint. D'autre part, si $x_1, \dots, x_n$ sont des éléments de E et $\rho_1, \dots, \rho_n$ des réels, on a

$$\left\langle T_\sigma\left(\sum_{i=1}^n \rho_i u_{x_i}\right), \sum_{j=1}^n \rho_j u_{x_j}\right\rangle = \sum_{i,j=1}^n \rho_i \rho_j e^{-\sigma(x_i - x_j)}.$$

Comme $u(E)$ est total dans H, on en déduit que T_σ est positif si et seulement si la fonction $e^{-\sigma(x-y)}$ est de type positif, ce qui achève la démonstration.

REMARQUE. (1) Pour tout type σ, le type $\sigma * (-\sigma)$ est positif puisque $T_{\sigma * -\sigma} = T_\sigma \cdot T_\sigma^*$.

(2) Si θ est un type positif sur E, l'opérateur T_θ admet une racine positive $\sqrt{T_\theta}$. Il est clair que l'on peut alors définir le couple (u^θ, H^θ) construit précédement par $u^\theta = \sqrt{T_\theta}\, u$, $H^\theta = \sqrt{T_\theta}\, H$.

DÉMONTRONS MAINTENANT LE THÉORÈME 2. Si l^p est finiment représentable dans E, alors F contient un sous-espace X isomorphe à l^p. Soit Γ l'adhérence de X dans $\mathfrak{T}(F)$. Comme Γ est une classe conique, Γ contient un l^r-type pour un certain r **[3]**. De plus, l^r est alors $(1+\varepsilon)$-isomorphe à un sous-espace de X, donc $r = p$. Il existe donc un l^p-type τ sur F. Soit σ sa restriction à E. Pour tout type positif θ, on a l'inégalité $\|\theta * \sigma * \sigma\| \geqslant \|\theta * 2^{1/p}\sigma\|$. (En effet $\|\theta * \sigma * \sigma\| \geqslant \|\theta * \tau * \tau\| = \|\theta * 2^{1/p}\tau\| = \|\theta * 2^{1/p}\sigma\|$.) Notons K l'ensemble $\{\alpha_1\sigma * \cdots * \alpha_k\sigma;\, k \in \mathbf{N},\, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbf{R}\}$ et C la classe conique engendrée par σ. (C est donc l'adhérence de K pour la topologie des types sur E.)

Les Lemmes 3 et 4 permettent de généraliser l'inégalité précédente aux éléments de K, puis par densité, aux éléments de C.

LEMME 3. *Quels que soient u et v dans K, on a l'inégalité* $\|u * u * v\| \geqslant \|2^{1/p} u * v\|$.

DÉMONSTRATION DU LEMME 3. On remarque que pour tout réel α, le type $\alpha\tau$ est positif. En effet, comme τ est un l^p-type, on peut écrire:

$$\alpha\tau = \left(\frac{\alpha}{2^{1/p}}\tau\right) * \left(\frac{\alpha}{2^{1/p}}\tau\right).$$

Comme la restriction à E d'un type positif sur F est un type positif, il en résulte que, pour tout réel α, le type $\alpha\sigma$ est positif. Tous les éléments de K sont donc des types positifs. Soient $u = \alpha_1\sigma * \cdots * \alpha_k\sigma$, $v = \beta_1\sigma * \cdots * \beta_l\sigma$. La démonstration se fait par récurrence sur k. L'inégalité est évidemment vraie pour $k = 0$. Supposons la propriété démontrée jusqu'à l'ordre k, et soit α_{k+1} un réel. Posons $\theta = u * u * v$. Comme θ est un type positif, on obtient en appliquant le Lemme 1:

$$\begin{aligned}\|\theta * (\alpha_{k+1}\sigma) * (\alpha_{k+1}\sigma)\| \geqslant \|\theta * (\alpha_{k+1}\tau) * (\alpha_{k+1}\tau)\| = \|\theta * (2^{1/p}\alpha_{k+1}\tau)\| \\ = \|\theta * (2^{1/p}\alpha_{k+1}\sigma)\| = \|u * u * (v * 2^{1/p}\alpha_{k+1}\sigma)\|.\end{aligned}$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence à u et à $v * (2^{1/p}\alpha_{k+1}\sigma)$.

LEMME 4. *Pour tout élément χ de C, on a* $\|\chi * \chi\| \geqslant 2^{1/p}\|\chi\|$.

D'après le Lemme 3, tout élément χ de K vérifie

$$\|\chi * \chi\| \geq 2^{1/p}\|\chi\|.$$

Soit χ un élément de C. Alors χ est limite d'une suite $(\chi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de K. On peut donc écrire

$$e^{-\|\chi * \chi\|} = \langle u_\chi, u_\chi\rangle \leq \liminf_{n\to\infty}\langle u_{\chi_n}, u_{\chi_n}\rangle = \liminf_{n\to\infty} e^{-\|\chi_n * \chi_n\|}$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} e^{-2^{1/p}\|\chi_n\|} = e^{-2^{1/p}\|\chi\|}.$$

D'après [3], la classe conique C engendrée par σ contient un l^q-type χ_0, pour un certain q. On a alors

$$\|\chi_0 * \chi_0\| = 2^{1/q}\|\chi_0\| \geq 2^{1/p}\|\chi_0\|.$$

Il en résulte que q est inférieur ou égal à p. Comme $\mathcal{F}(E)$ contient un l^q-type, l^q est $(1+\varepsilon)$-isomorphe à un sous-espace de E [3]. Donc E contient l^q, avec $q \leq p$, ce qui achève la démonstration du Théorème 2.

References

1. D. Aldous, *Subspaces of L^1 via random measure*, Trans. Amer. Math. Soc. **258** (1981).
2. D. Dacunha-Castelle et J. L. Krivine, *Applications des ultraproduits*, Studia Math. **41** (1972).
3. J. L. Krivine et B. Maurey, *Espaces de Banach stables*, Israel J. Math. **39** (1981).
4. B. Maurey et G. Pisier, *Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach*, Studia Math. **58** (1976), 45–90.
5. H. P. Rosenthal, *The Banach spaces $C(K)$ and $L^p(\mu)$*, Bull. Amer. Math. Soc. **85** (1975), 763–781.
6. ______, *On subspaces of L^p*, Ann. of Math. (2) **97** (1973), 343–373.
7. J. H. Wells and L. R. Williams, *Embeddings and extensions in analysis*, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1975.

EQUIPE D'ANALYSE, UNIVERSITÉ PARIS VI, 75230-PARIS CEDEX 05, FRANCE