TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 297, Number 1, September 1986

A PROPOS DE "WEDGES" ET D' "EDGES," ET DE PROLONGEMENTS HOLOMORPHES

JEAN-PIERRE ROSAY

ABSTRACT. Holomorphic extensions in wedges of continuous functions defined on edges, which are extensions in the distributional sense, are shown to be genuine continuous extensions, and a $\mathscr{C}^1$ version of the edge of the wedge theorem is proved.

Cet article est consacré à deux problèmes de régularité pour des fonctions définies dans des "wedges" d'arête (edge) non linéaire.

La première partie est écrite suivant une suggestion de M. S. Baouendi, que je remercie de m'avoir posé la question traitée (la réponse est certes sans surprise, mais il n'a pas semblé y avoir de référence précise à donner, pour un cas particulier voir [**3**]). On considère une fonction f_0 *continue* définie sur E un edge "générique" de dimension réelle $2n + l$ dans $\mathbf{C}^{n+l}$, et d'abord supposé $\mathscr{C}^\infty$.

On montre que *si f_0 a un prolongement au sens des distributions en une fonction holomorphe f dans un wedge d'edge* (*arête*) E (i.e. f est une fonction holomorphe à croissance polynomiale en l'inverse de la distance à l'edge, et f_0 est valeur au bord de f au sens des distributions, à ce sujet cf. [**2**]), *alors dans tout wedge "strictement plus fin" f_0 admet f comme prolongement continu*, et holomorphe. Ceci est le contenu de la Proposition 2 dans §I. La discussion est menée pour un edge seulement $\mathscr{C}^k$ ($k < +\infty$), et on considère des hypothèses moindres que l'holomorphie.

Dans la deuxième partie on établit le *théorème de l'edge of the wedge dans le cas d'un edge qui est une variété totalement réelle de dimension n dans $\mathbf{C}^n$ et de classe seulement $\mathscr{C}^1$*. Les démonstrations de E. Bedford [**4**] et de S. Pinčuk [**7**] supposent une régularité $\mathscr{C}^2$. Il s'agit ici de tirer partie de la technique d'approximation polynomiale de Baouendi et Trèves [**1**, **10**]. Que cette technique réduise immédiatement des problèmes de prolongement holomorphe à des problèmes d'enveloppe polynomiale a déjà été largement utilisé, cf. [**5**]. Ici le problème d'enveloppe polynomiale est quasiment trivial. Le cas Lipschitzien, qui pose d'entrée des difficultés, est abordé (négativement) dans une remarque.

Les deux parties I et II sont totalement indépendantes. Et pour cette raison j'ai opté pour la présentation la plus commode de chaque partie, sans chercher l'harmonisation des présentations.

Received by the editors May 7, 1985.
1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 *Revision*). Primary 32A40, 32D99; Secondary 32E20.

I. Valeurs au bord continues. Dans la perspective d'étudier des fonctions holomorphes dans des "wedges" dont l'arête (edge) est non linéaire, en utilisant des paramétrisations, on commence par étudier des fonctions non holomorphes dans des wedges d'arête linéaire.

I.1. Soient N et $l \in \mathbf{N}$. Dans $\mathbf{R}^N \times \mathbf{C}^l$ les coordonnées seront notées (x, w) où $w = s + it$ et $t = (t_1, \ldots, t_l)$. On note Λ_0 le cône de $\mathbf{R}^l$ défini par $|t_j| < t_1$ ($j = 2, \ldots, l$).

Soit $W_0 = \{(x,w) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{C}^l;\ w = s + it,\ t \in \Lambda_0\}$. [$W_0$ est le wedge et l'edge est $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^l$.]

PROPOSITION 1. *Soit g une fonction continûment différentiable sur W_0, telle que $\partial g/\partial \bar{w}_1$ soit une fonction bornée. Soit $k \in \mathbf{N}$; on suppose que quand $(x,w) \in W_0$ et t ($= \operatorname{Im} w$) tend vers 0 (i.e. (x,w) tend vers l'edge) $|g(x,w)| = \mathcal{O}(t_1^{-k})$. Alors*

1° *g admet une valeur au bord sur $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^l$, au sens des distributions. C'est-à-dire, il existe une distribution* (bv$g$) *sur $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^l$ telle que pour tout $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^l)$:*

$$(\mathrm{bv}g, \chi) = \lim_{\substack{t_1, \ldots, t_n \to 0 \\ |t_j| < t_1 \\ 2 \leqslant j \leqslant l}} \int_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^l} \chi(x,s) g(x, s + it)\, dx\, ds.$$

2° *Plus généralement, soit $(\varphi_p)_{p \in \mathbf{N}}$ une suite d'applications $(k+2)$ fois continûment différentiables définies sur $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^l$ à valeurs dans Λ_0, on suppose que, pour tout compact de $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^l$, la suite φ_p tend vers 0 en norme $\mathcal{C}^{k+2}$. Alors pour tout $\chi \in \mathcal{C}_0^{k+1}(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^l)$*

$$(\mathrm{bv}g, \chi) = \lim_{p \to +\infty} \int_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^l} \chi(x,s) g\big(x, s + i\varphi_p(x,s)\big)\, dx\, ds.$$

3° *Si $\partial g/\partial \bar{w}_j$ est une fonction bornée quel que soit $j \in \{1, \ldots, l\}$ et si* (bv$g$) *est (la distribution définie par) une fonction continue sur $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^l$ alors g se prolonge continûment à (l'edge) $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^l$, et le prolongement est* (bv$g$).

REMARQUE 1. Il importe de noter que, contrairement à l'apparence, la proposition ci-dessus est entièrement locale. En effet, supposons g donné, avec les conditions de croissance sur $|g|$ et $|\partial g/\partial \bar{w}_1|$, défini seulement sur l'intersection de W_0 et d'un voisinage d'un point m de $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^l$. Soit alors $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^N \times \mathbf{C}^l)$ tel que $\psi \equiv 1$ au voisinage de m, à support assez petit, et que $\partial\psi/\partial \bar{w}_j$ s'annule à l'ordre infini sur $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^l$ ($j = 1, \ldots, l$). Il est immédiat de vérifier que ψg satisfait les hypothèses de la proposition.

REMARQUE 2 (concernant 1° et 2°). L'hypothèse, qui sera celle utilisée dans l'application, que $\partial g/\partial \bar{w}_1$ est une fonction bornée, peut être remplacée, sans changement de la démonstration, par l'hypothèse que $|\partial g/\partial \bar{w}_1| = \mathcal{O}(t_1^{-1+\gamma})$ où $\gamma > 0$. L'exemple $g(z,w) = \sin(\operatorname{Log} t_1)$ montre que l'on doit exclure le cas $\gamma = 0$.

REMARQUE 3 (concernant 3°). Là encore on pourrait se contenter de l'hypothèse $\partial g/\partial \bar{w} = \mathcal{O}(t_1^{-1+\gamma})$. Mais il est facile de voir que l'hypothèse que seulement $\partial g/\partial \bar{w}_1$ est borné (ou même $\partial g/\partial \bar{w}_1 \equiv 0$) ne suffirait pas.

Pour $N=0$, $l=2$, on peut par exemple considérer la fonction $g(w_1,w_2)=\operatorname{Im} w_2/w_1$, pour laquelle $\operatorname{bv} g=0$. Dans les applications de 3°, nous pouvons remplacer le cône $\Lambda_0=\{t\in\mathbf{R}^l;\ |t_j|<t_1,\ j=2,\dots,l\}$, par n'importe quel cône image de Λ_0 par une application linéaire bijective de $\mathbf{R}^l$ sur lui-même.

DÉMONSTRATION. Suivant la Remarque 1, on peut supposer que $g(x,w)\equiv 0$ pour $(|x|+|w|)$ assez grand.

1° Posons alors, pour $(x,w)\in W_0$

$$G_1(x,w)=-\int_{t_1}^{+\infty} g(x,s_1+i\lambda,w')\,d\lambda,$$

où $w_1=s_1+it_1$ et $w'=(w_2,\dots,w_l)$. On a ainsi $\partial G_1/\partial t_1=g$.

On a aussi

$$\frac{\partial G_1}{\partial\bar w_1}=-\int_{t_1}^{+\infty}\frac{\partial g}{\partial\bar w_1}(x,s_1+i\lambda,w')\,d\lambda;$$

en effet

$$\begin{aligned}2\frac{\partial G_1}{\partial\bar w_1}&=-\int_{t_1}^{+\infty}\frac{\partial g}{\partial s_1}(x,s_1+i\lambda,w')\,d\lambda+ig(x,w)\\&=-\int_{t_1}^{+\infty}\left[2\frac{\partial g}{\partial\bar w_1}(x,s_1+i\lambda,w')-i\frac{\partial g}{\partial t_1}(x,s_1+i\lambda,w')\right]d\lambda+ig(x,w)\\&=-2\int_{t_1}^{+\infty}\frac{\partial g}{\partial\bar w_1}(x,s_1+i\lambda,w')\,d\lambda.\end{aligned}$$

Alors on observe que $\partial G_1/\partial\bar w_1$ est une fonction se prolongeant continûment à $\overline{W}_0$, et que l'on a les conditions de croissance suivantes:

Si $|g(x,w)|=\mathcal{O}(t_1^{-k})$ et $k\geqslant 1$, alors $|G_1(x,w)|=\mathcal{O}(t_1^{-k+1})$.

Si $|g(x,w)|=\mathcal{O}(t_1^{-1})$, alors $G_1(x,w)=\mathcal{O}(|\operatorname{Log} t_1|)$; enfin si $|g(x,w)|=\mathcal{O}(|\operatorname{Log} t_1|)$, G_1 se prolonge continûment à $\overline{W}_0$.

Soit $\chi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^l)$, on a (pour $t\in\Lambda_0$):

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^l}\chi(x,s)g(x,s+it)\,dx\,ds&=\int_{\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^l}\chi(x,s)\frac{\partial}{\partial t_1}G_1(x,s+it)\,dx\,ds\\&=\int_{\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^l}\chi(x,s)\left(-2i\frac{\partial G_1}{\partial\bar w_1}+i\frac{\partial G_1}{\partial s_1}\right)dx\,ds\\&=-2i\int_{\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^l}\chi(x,s)\frac{\partial G_1}{\partial\bar w_1}(x,s+it)\,dx\,ds\\&\quad-i\int_{\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^l}\frac{\partial\chi}{\partial s_1}(x,s)G_1(x,s+it)\,dx\,ds.\end{aligned}$$

Répétant l'opération ci-dessus, et posant

$$G_{q+1}(x,w)=-\int_{t_1}^{+\infty}G_q(x,s_1+i\lambda,w')\,d\lambda,$$

il vient après $(k+1)$ intégrations par parties:

$$(*) \qquad \begin{aligned} &\int_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^l} \chi(x,s) g(x, s+it)\, dx\, ds \\ &\quad = -2i \sum_{q=0}^{k} (-i)^q \frac{\partial^q \chi}{\partial s_1^q}(x,s) \frac{\partial G_{q+1}}{\partial \bar{w}_1}(x, s+it)\, dx\, ds \\ &\quad + (-i)^{k+1} \int_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^l} \frac{\partial^{k+1}\chi}{\partial s_1^{k+1}}(x,s) G_{k+1}(x, s+it)\, dx\, ds. \end{aligned}$$

Les fonctions apparaissant au second membre sont toutes continues sur $\overline{W}_0$, et donc l'expression au premier membre a clairement une limite quand t tend vers vers 0. Alors bv$g$, la valeur au bord de g, est la distribution définie par

$$(\mathrm{bv}g, \chi) = \lim_{t \to 0} \int_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^l} \chi(x,s) g(x, s+it)\, dx\, ds.$$

Observons qu'il apparaît ci-dessus que (bv$g$) appartient à l'espace de Sobolev $H^{-k-1}(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^l)$ et que si $g^{(t)}$ est la fonction $(x,s) \to g(x, s+it)$, alors $g^{(t)}$ tend vers bv$g$ en norme Sobolev H^{-k-1}.

2° La seconde partie de la conclusion s'obtient de la même façon. On utilise pour l'intégration par parties d'une intégrale du type

$$\int \theta(x,s) \frac{\partial G_q}{\partial t_1}(x, s + i\varphi(x,s))\, dx\, ds,$$

l'égalité suivante où $\tilde{G}_q(x,s) = G_q(x, s+i\varphi(x,s))$:

$$\frac{\partial G_q}{\partial t_1} = \frac{1}{-i + \partial\varphi_1/\partial s_1}\left[\frac{\partial}{\partial s_1}\tilde{G}_q(x,s) - 2\frac{\partial G_q}{\partial \bar{w}_1}(x, s+i\varphi(x,s))\right],$$

φ_1 désignant ici la première composante de $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_l)$. Ceci mène à remplacer le terme $\partial^q\chi/\partial s_1^q$ dans $(*)$ en utilisant l'opérateur $(\partial/\partial s_1)(\cdot/(-i + \partial\varphi_1/\partial s_1))$ au lieu de l'opérateur $(\partial/\partial s_1)(\cdot)$. Au bout de $(k+1)$ telles intégrations par parties, interviennent donc φ et ses dérivées (en s_1) d'ordre $\leqslant k+2$.

3° On utilise une technique de régularisation par convolution qui apparaît, par exemple dans [**8**]. Supposons que bv$g$ est une fonction continue sur $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^l$. Soit ρ une fonction appartenant à $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^l)$ vérifiant $\rho \geqslant 0$ et $\int\rho = 1$. Pour $\varepsilon > 0$ soit $\rho_\varepsilon = \rho(\cdot/\varepsilon)/\varepsilon^{N+l}$.

Soit

$$g_\varepsilon(x,w) = \int g(x', s'+it)\rho_\varepsilon(x-x', s-s')\, dx'\, ds'$$

(i.e. le produit de convolution de g et ρ_ε en les variables x, s). Pour $(x,w) \in W_0$ $g_\varepsilon(x,w)$ tend vers $g(x,w)$ quand ε tend vers 0. Si sur W_0 on a $|\partial g/\partial \bar{w}_1| \leqslant B$, il vient, pour tout $\varepsilon > 0$: $|\partial g_\varepsilon/\partial \bar{w}_1| \leqslant B$. Enfin g_ε est une fonction continue jusque sur (l'edge) $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^l$ et sa restriction à $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^l$ est $(\mathrm{bv}g) * \rho_\varepsilon$ (en effet, $g^{(t)}$ tendant vers (bv$g$) dans H^{-k-1}, $g^{(t)} * \rho_\varepsilon$ tend vers bv$g * \rho_\varepsilon$ dans $\mathscr{C}^\infty$).

Soit $(x,w) \in W_0$, $w = s + it = (s_1 + it_1, \dots, s_l + it_l)$. Considérons la fonction holomorphe φ définie sur $\mathbf{C}$, φ: $\zeta \to (x, s + i\zeta t)$. Le demi-plan $\Pi^+ = \{\zeta \in \mathbf{C}, \operatorname{Re}\zeta > 0\}$ est envoyé dans W_0. Appliquons à la fonction $h = g_\varepsilon \circ \varphi$ qui est nulle pour $|\zeta|$ assez grand, la formule

$$h(1) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(i\tau)}{\tau^2+1}\,d\tau - \frac{1}{\pi}\iint_{\Pi^+} \frac{\partial h}{\partial \bar{\zeta}} \frac{2}{\zeta^2 - 1}\,dm(\zeta).$$

Il vient

$$g_\varepsilon(x, s + it) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{bv} g_\varepsilon(x, s + \tau t)}{\tau^2+1}\,d\tau - \frac{1}{\pi}\iint_{\Pi^+}\left(-i\sum_{j=1}^{l} \bar{t}_j \frac{\partial g_\varepsilon}{\partial \bar{w}_j}(x, s + i\zeta t)\right)\frac{2}{\zeta^2-1}\,dm(\zeta).$$

D'où

$$g_\varepsilon(x, s + it) - \operatorname{bv} g_\varepsilon(x,s) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{bv} g_\varepsilon(x, s + \tau t) - \operatorname{bv} g_\varepsilon(x,s)}{\tau^2+1}\,d\tau - \frac{1}{\pi}\iint_{\Pi^+} \cdots.$$

Il est possible maintenant de faire tendre ε vers 0 d'où il vient:

$(**)$

$$g(x, s + it) - \operatorname{bv} g(x,s) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{bv} g(x, s + \tau t) - \operatorname{bv} g(x,s)}{\tau^2+1}\,dt - \frac{1}{\pi}\iint_{\Pi^+}\left(-i\sum_{j=1}^{l} \bar{t}_j \frac{\partial g}{\partial \bar{w}_j}(x, s + i\zeta t)\right)\frac{2}{\zeta^2-1}\,dm(\zeta).$$

Il est alors facile de montrer que quand t tend vers 0, $g(x, s + it)$ tend, uniformément en (x,s), vers $\operatorname{bv} g(x,s)$. Ceci établit la proposition.

Il n'a pas semblé possible d'écrire directement la formule $(**)$, en l'absence d'évidence du fait que la valeur au bord de la restriction de g à $\varphi(\Pi^+)$ était la restriction de $\operatorname{bv} g$ à $\varphi(i\mathbf{R})$, contourner cette difficulté a précisément été fait grâce à la régularisation.

I.2. *Application à un edge non linéaire*. Il s'agit de tirer immédiatement profit des résultats de I.1 en utilisant des paramétrisations, qui dans le cas $\mathscr{C}^\infty$ sont presques analytiques (almost analytic). On essaie de se rapprocher le plus possible des notations utilisées par Baouendi et Trèves dans leurs travaux.

Dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^l$ on note les coordonnées (z,w), $w = s + it$. Par rapport à I.1 nous remplaçons N par $2n$ et $\mathbf{R}^N$ par $\mathbf{C}^n$. Soit $k \in N$. On considère E (l'edge) un germe de sous-variété (réelle) de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^l$ en 0, définie par $\operatorname{Im} w = \Phi(z, \operatorname{Re} w)$ où Φ est définie au voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{R}^l$, de classe $\mathscr{C}^{k+2}$, et $d\phi(0) = 0$. On prolonge l'application $(z,s) \to (z, s + i\Phi(z,s))$ à un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^l$ en une fonction $\tilde{\Phi}$: $(z,w) \to \tilde{\Phi}(z,w) = (z, \omega)$ de classe $\mathscr{C}^{k+2}$, telle que $\bar{\partial}_w\tilde{\Phi}$ et toutes ses dérivées d'ordre $\leqslant k+1$ s'annulent sur $\mathbf{C}^n \times \mathbf{R}^l$. La présentation ci-dessus signifie que E est générique en 0; si T est l'espace tangent à E en 0, alor $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^l = T + iT$, et $(z,w) \to \tilde{\Phi}(z,w)$ est un difféomorphisme local en 0.

Soit Γ (le germe d') un cône ouvert, et connexe, dans $\mathbf{R}^l$ de sommet l'origine. Le "wedge" W est alors défini, au voisinage de 0, par $w = \operatorname{Re} w + i\Phi(z, \operatorname{Re} w) + it$, $t \in \Gamma$. On note d la distance à l'edge E.

PROPOSITION 2 (sous les hypothèses ci-dessus, edge générique et $\mathscr{C}^{k+2}$). *Soit f une fonction holomorphe définie sur W et telle que $|f| = \mathcal{O}(d^{-k})$. Alors f a une valeur au bord sur l'edge E. Supposons que cette valeur au bord est (le courant défini par) une fonction continue f_0. Alors pour tout cône Γ' de sommet 0 et strictement inclus dans Γ (i.e. $\overline{\Gamma}' - \{0\} \subset \Gamma$), la restriction de f à W', le wedge obtenu à partir de Γ' au lieu de Γ, est continue jusque sur l'edge E et a f_0 pour valeur limite.*

Le sens précis de l'énoncé peut être donné par la réduction suivante de la Proposition 2 à la Proposition 1.

DÉMONSTRATION (réduction à la Proposition 1). Soit W'' le wedge correspondant à Γ'' un germe de cône de $\mathbf{R}^l$ strictement inclus dans Γ et contenant strictement Γ'.

On choisit U un voisinage (petit) de 0 dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^l$ et des cônes $\Lambda_1, \dots, \Lambda_\nu$ isomorphes au cône Λ_0 tels que, posant $W_j = \mathbf{C}^n + \mathbf{R}^l + i\Lambda_j$ $(j = 1, \dots, \nu)$, on ait "au voisinage de 0":

$$W' \subset \bigcup_{j=1}^{\nu} \tilde{\Phi}(W_j) \subset W''.$$

Tenant compte des Remarques 1 et 3 de I.1, il ne reste plus qu'à appliquer la Proposition 1 à la fonction $g = g \circ \tilde{\Phi}$. Ayant $\tilde{\Phi}(z,w) = (z, \omega)$ on a à estimer $\partial g/\partial \overline{w} = \partial f/\partial \omega \circ \partial \omega/\partial \overline{w}$ dans chacun des wedges W_j. L'estimation de Cauchy sur les dérivées de la fonction holomorphe f à l'intérieur du wedge W'' donne $|\partial f/\partial \omega| = \mathcal{O}(d^{-k-1})$. Par ailleurs $\partial \tilde{\Phi}/\partial \overline{w} = o(d^{k+1})$, et ceci permet donc de majorer uniformément $\partial g/\partial \overline{w}$.

REMARQUE. La Proposition 2 ne donne pas de résultat intéressant pour le cas d'un edge seulement $\mathscr{C}^1$. Il est à noter que dans le cas de régularité seulement $\mathscr{C}^1$, il ne semble pas exister dans la littérature de construction de disques analytiques tels qu'utilisés par S. Pinčuk dans **[6]**, ce qui aurait pu constituer une autre attaque du problème.

II. Théorème de l'edge of the wedge. Pour $r > 0$ on note B_r la boule ouverte de centre 0 et rayon r.

THÉORÈME (de l'edge of the wedge). *Soit dans un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^n$, E une sous-variété de classe $\mathscr{C}^1$ totalement réelle et de dimension n, $0 \in E$. Soit L un $\mathbf{R}$-sous espace vectoriel de $\mathbf{C}^n$ de dimension n transverse à E (i.e. en tout point de E), et Γ un cône (relativement) ouvert dans L, de sommet 0. On fixe $r_0 > 0$ tel que $(e,t) \to e + t$ définisse un difféomorphisme de $(E \cap B_{r_0}) \times (L \cap B_{r_0})$ sur un ouvert de $\mathbf{C}^n$. Soient*

$$W^+ = \{ e + t \in \mathbf{C}^n;\ e \in E \cap B_{r_0},\ t \in \Gamma \cap B_{r_0} \},$$

$$W^- = \{ e - t \in \mathbf{C}^n;\ e \in E \cap B_{r_0},\ t \in \Gamma \cap B_{r_0} \}.$$

Alors il existe U un voisinage de 0 *dans* $\mathbf{C}^n$ *tel que: pour tout* f^+ *et* f^- *fonctions holomorphes définies respectivement sur* W^+ *et* W^-, *se prolongeant continûment sur l'edge E et dont les prolongements coïncident sur E, il existe F une fonction holomorphe sur U telle que* $F|W^{\pm} \cap U = f^{\pm}$.

Voir la généralisation, Remarque 1 ci-dessous.

DÉMONSTRATION.

1ère étape. Quitte à restreindre Γ, on peut supposer que $f^{\pm}$ sont continues sur $\overline{W}^{\pm}$. On démontre qu'il existe r (indépendant de $f^{\pm}$), $0 < r < r_0$, tel qu'il existe une suite de polynômes (en z) qui tende uniformément vers $f^{\pm}$ sur, respectivement, $W_r^{\pm} = \{z = e + t \in \mathbf{C}^n;\ e \in E \cap B_r,\ t \cap \Gamma \cap B_r\}$.

Si ce n'est écrit exactement dans ce contexte, ce fait se trouve très largement contenu dans les travaux de Baoundi et Trèves [**1**, **10**] (que ces techniques s'appliquent dans le cadre de régularité seulement $\mathscr{C}^1$ a été signalé, cf. [**10**, p. 51]).

Rappelons toutefois pour le lecteur le principe de la démonstration. Quitte à changer linéairement de variables et à se restreindre à un voisinage assez petit de l'origine, on peut supposer que E est paramétré (et orienté) par $x \to x + i\Phi(x)$, où x parcourt un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^n$ et $d\Phi(0) = 0$. Soit $\chi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbf{C}^n)$, $\chi \equiv 1$ au voisinage de 0, et χ à support assez petit. Pour $\tau > 0$ et $z \in \mathbf{C}^n$ on pose, avec $f = f^{\pm}|E$:

$$h_\tau(z) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{n/2} \int_E \chi f(\zeta) e^{-\tau[z-\zeta]^2} d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n,$$

où $[z-\zeta]^2 = \sum_{j=1}^n (z_j - \zeta_j)^2$.

Une estimation asympotique de l'intégrale montre que, pour $z \in E$, $h_\tau(z)$ tend vers $\chi(z)f(z)$ quand τ tend vers $+\infty$.

Si $z \in W^+$, et z est assez voisin de 0, $z = e + t$ ($t \in \Gamma$). On a par la formule de Stokes

$$\begin{aligned} h_\tau(z) = {} & \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{n/2} \int_{\zeta \in E+t} \chi f^+(\zeta) e^{-\tau[z-\zeta]^2} d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n \\ & - \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{n/2} \int_{(\lambda,\zeta)\in[0\ 1]\times E} f^+(\zeta + \lambda t)\bar{\partial}\chi(\zeta + \lambda t) e^{-\tau[z-\zeta-\lambda t]^2} d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n. \end{aligned}$$

Si χ a été choisi à support assez petit, et ensuite e et t sont assez petits le premier terme du membre de droite tend vers $f^+(z)$ quand τ tend vers $+\infty$ (posant $\zeta = \zeta' + t$, on est ramené au cas où $z \in E$), et le second terme tend vers 0. On opère de même avec f^- sur W^-.

2ème étape. Les fonctions entières h_τ convergeant uniformément sur $W_\Gamma^+ \cup W_\Gamma^-$, convergent uniformément sur l'enveloppe polynomiale de $W_\Gamma^+ \cup W_\Gamma^-$. On va montrer que cette enveloppe polynomiale contient U un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^n$. La limite des fonctions h_τ, quand τ tend vers $+\infty$, est, sur U, une fonction holomorphe F qui est le prolongement cherché de $f^{\pm}$. La technique d'approximation de Baouendi-Trèves réduit donc le théorème de l'edge of the wedge au Lemme suivant sur les enveloppes polynomiales.

LEMME. *Soit $r > 0$ l'enveloppe polynomiale de $W_r^+ \cup W_r^-$ contient un voisinage de l'origine*

$$\left(W_r^{\pm} = \{z = e \pm t;\ e \in E,\ t \in \Gamma,\ |e| \text{ et } |t| < r\}.\right)$$

PREUVE. Il s'agit d'une construction très facile de disques (à ne surtout pas comparer avec des constructions non triviales, "à la Bishop," pour résoudre des problèmes autrement difficiles!).

Soit T l'espace tangent à E en 0. Soit $X_0 \in T$, tel qu'il existe $a \in \mathbf{R}$ et $b > 0$ vérifiant: $aX_0 + b(iX_0) \in \Gamma$. Alors il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $e \in E$, $|e| < \rho$, $X \in \mathbf{C}^n$, $|X - X_0| < \rho$, et $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\arg \lambda| \leqslant \pi/3$ on ait:

$$(***) \qquad e + \lambda(iX) \in W_r^+ \quad \text{et} \quad e - \lambda(iX) \in W_r^- .$$

En effet, si les wedges W^+, resp. W^-, sont décrits comme il est classique par $r_1 > 0, \ldots, r_n > 0$ (resp. $r_j < 0$) il s'agit d'observer que le gradient de r_j dans la direction λiX est > 0 (resp. < 0) (la seule propriété utile de $\pi/3$ est d'être $< \pi/2$).

Soit $\omega \in \mathbf{C}^n$, $|\omega| \leqslant 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$ on choisit $\alpha(\varepsilon)$ et $\beta(\varepsilon) \in \mathbf{C}^n$ de sorte que $\varepsilon X_0 + \alpha(\varepsilon) \in E$, $-\varepsilon X_0 + \beta(\varepsilon) \in E$, et $\alpha(\varepsilon)/\varepsilon$ et $\beta(\varepsilon)/\varepsilon$ tendent vers 0 quand ε tend vers 0.

On définit φ^ε sur $\mathbf{C}$,

$$\varphi^\varepsilon\colon z \to \varphi^\varepsilon(z) = z(\varepsilon X_0) + \alpha(\varepsilon)\frac{z(z+1)}{2} + \beta(\varepsilon)\frac{z(z-1)}{-2} - \varepsilon^2\omega(z^2 - 1).$$

On a $\varphi^\varepsilon(0) = \varepsilon^2\omega$, $\varphi^\varepsilon(1)$, et $\varphi^\varepsilon(-1) \in E$.

AFFIRMATION. Pour tout $\theta \in]0, \pi[$ $\varphi^\varepsilon(e^{i\theta}) \in W_r^+$ et $\varphi^\varepsilon(e^{-i\theta}) \in W_r^-$, pourvu que ε soit assez petit (indépendamment du choix de ω). Supposons $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. On a

$$\varphi^\varepsilon(e^{i\theta}) = e_\varepsilon + \int_{[1, e^{i\theta}]} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial z}\, dz = e_\varepsilon + \left(\varepsilon i X_0 + \sigma(\varepsilon)\right)\left(\frac{e^{i\theta} - 1}{i}\right),$$

où $e_\varepsilon = \varphi^\varepsilon(1)$ est voisin de 0, et $-\pi/4 \leqslant \arg(e^{i\theta} - 1)/i \leqslant \pi/4$. D'après $(***)$ $\varphi^\varepsilon(e^{i\theta}) \in W_r^+ \cup W_r^-$ si ε est assez petit, et $\theta \neq 0$. Pour traiter le cas $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$ on écrit

$$\varphi^\varepsilon(e^{i\theta}) = e'_\varepsilon + \int_{[-1, e^{i\theta}]} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial z}\, dz = e'_\varepsilon + \left(\varepsilon i X_0 + \sigma(\varepsilon)\right)\left(\frac{e^{i\theta} + 1}{i}\right),$$

où $e'_\varepsilon = \varphi^\varepsilon(-1)$; il vient encore que $\varphi^\varepsilon(e^{i\theta}) \in W_r^+ \cup W_r^-$ $(\theta \neq \pi)$. On a donc obtenu que $\varepsilon^2\omega = \varphi^\varepsilon(0)$ appartient à l'enveloppe polynomiale de $W_r^+ \cup W_r^-$ et ceci, pourvu que ε soit assez petit, quel que soit $\omega \in \mathbf{C}^n$ de norme $\leqslant 1$.

La démonstration est ainsi achevée.

REMARQUE 1. On peut adapter la technique de construction du disque pour traiter le cas où les wedges W ne sont plus opposés, mais sont les wedges W_1 et W_2 définis par deux cônes Γ_1 et Γ_2 (et le prolongement holomorphe a alors lieu dans les wedges définis par des cônes Γ strictement inclus dans l'enveloppe convexe de Γ_1 et Γ_2, cf. **[4]**).

INDICATION DE PREUVE. Par changement de variable, on peut supposer que l'espace tangent à E en 0 est $i\mathbf{R}^n$, et quitte à restreindre un peu W_1 et W_2 au voisinage de 0 on peut supposer que les cônes Γ_1 et Γ_2 sont des cônes donnés dans $\mathbf{R}^n$ ($W_j = \{e + t \in \mathbf{C}^n;\ e \in E,\ t \in \Gamma_j\ (\subset \mathbf{R}^n),\ |e|$ et $|t| < r_0\}$). Soient t_1 et $t_2 \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) - \{0\}$. Pour $\lambda \in]0,1[$ on considère ψ la fonction holomorphe sur le disque unité de $\mathbf{C}$ définie par

$\operatorname{Im} \psi(0) = 0$,

$\operatorname{Re} \psi(e^{i\theta}) = \sqrt{\sin\theta}\,\lambda t_1$ si $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, et

$\operatorname{Re} \psi(e^{i\theta}) = \sqrt{|\sin\theta|}\,(1-\lambda)t_2$ si $\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

On a donc

$$\psi(0) = (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)\left(\int_0^{\pi} \sqrt{\sin\theta}\,\frac{d\theta}{2\pi}\right).$$

On définit alors φ^ε sur le disque unité de $\mathbf{C}$,

$$z \to \varphi^\varepsilon(z) = \varepsilon\psi(z) + \alpha(\varepsilon)\frac{z(z+1)}{2} + \beta(\varepsilon)\frac{z(z-1)}{-2},$$

$\alpha(\varepsilon)$ et $\beta(\varepsilon)$ étant choisis de sorte que $\varphi^\varepsilon(\pm 1) \in E$ et $(|\alpha(\varepsilon)| + |\beta(\varepsilon)|)/\varepsilon$ tend vers 0 quand ε tend vers 0. Pour ε assez petit, on obtient que $\varphi^\varepsilon(e^{i\theta}) \in \overline{W}_1 \cup \overline{W}_2$ en utilisant le fait que pour θ voisin de 0, mod π,

$$\left|\frac{d}{d\theta}\operatorname{Im}\psi(e^{i\theta})\right| = \mathcal{O}\left(\frac{d}{d\theta}\operatorname{Re}\psi\right),$$

et ceci est la raison de l'introduction de la racine carrée (la conjuguée harmonique de ψ s'étudie aisément en se ramenant à la considération de la fonction $\sqrt{\pm z}$ sur l'axe réel). Il vient alors que $\varepsilon\psi(0)$ appartient à l'enveloppe polynomiale de $W_1 \cup W_2$.

REMARQUE 2. On sait que le théorème de l'edge of the wedge peut être mis en défaut pour un edge $\mathscr{C}^\infty$, et même réel analytique, totalement réel sauf en un point cf. [9]. Ceci montre qu'il est pour sûr mal aisé de donner un énoncé du théorème de l'edge of the wedge dans le cas d'un edge qui ne soit pas $\mathscr{C}^1$, mais par exemple Lipschitzien. La leçon de l'exemple suivant, dérivé de l'exemple de [9], est qu'il n'y a peut être pas de bonne notion d'edge Lipschitzien totalement réel.

Soit dans $\mathbf{C}^2$ l'edge E donné par $z_2 = \operatorname{Re} z_1 + (i/2)|\operatorname{Re} z_1|$. En tout point de E où $\operatorname{Re} z_1 \neq 0$, l'espace tangent à E est engendré par les vecteurs $(1, 1 \pm i/2)(i, 0)$ ($\pm$ selon de signe de $\operatorname{Re} z_1$) et est totalement réel. Aux points où $\operatorname{Re} z_1 = 0$, une définition de tangent généralisé semble devoir être l'ensemble

$$T = \left\{V \in \mathbf{C}^2;\ V = (a + ib,\ a(1 + \lambda i/2)),\ a \text{ et } b \in \mathbf{R},\ -1 \leqslant \lambda \leqslant 1\right\}.$$

Il est à noter que $T \cap iT = \{0\}$.

Considérons $\Gamma = \{\zeta \in \mathbf{C};\ |\operatorname{Im}\zeta| < \operatorname{Re}\zeta/2\}$. Soit enfin $W^{\pm} = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2$ tels que $z_2 = \operatorname{Re} z_1 + (i/2)|\operatorname{Re} z_1| + t,\ t \in \Gamma$ (resp. $-\Gamma$)$\}$.

Observons que si $y_2 > 0$, alors quel que soit $z_1 \in \mathbf{C}$, $(z_1, -iy_2) \notin \overline{W^+ \cup W^-}$. Une fonction définie sur $\overline{W^+ \cup W^-}$ et non prolongeable au voisinage de 0 est obtenue en prenant une détermination continue de la racine carrée de z_2 pour z_2 hors de l'axe imaginaire négatif.

REFERENCES

1. M. S. Baouendi and F. Trèves, *A property of the functions and distributions annihilated by a locally integrable system of complex vector fields*, Ann. of Math. **113** (1981), 387–421.

2. M. S. Baouendi, C. Chang and F. Trèves, *Microlocal hypo analyticity and extensions of C. R. functions*, J. Differential Geom. **18** (1983), 331–391.

3. M. S. Baouendi, H. Jacobowitz and F. Trèves, *On the analyticity of C. R. mappings*, Ann. of Math. **122** (1985), 365–400.

4. E. Bedford, *Holomorphic continuation at a totally real edge*, Math. Ann. **230** (1977), 213–225.

5. A. Boggess and J. Polking, *Holomorphic extension of C. R. functions*, Duke Math. J. **49** (1982), 757–784.

6. S. Pinčuk, *A boundary uniqueness theorem for holomorphic functions of several complex variables*, Math. Notes **15** (1974), 116–120.

7. ______, *Bogoljubov's theorem on the "edge of the wedge" for generic manifolds*, Math. USSR-Sb. **23** (1974), 441–455.

8. W. Rudin, *Lectures on the edge of the wedge theorem*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., no. 6, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1971.

9. E. Straube, *C. R. distributions and analytic continuation at generating edges*, Math. Z. **189** (1985), 131–142.

10. F. Trèves, *Approximation and representation of functions and distributions annihilated by a system of complex vector fields*, Ecole Polytechnique, 1981.

U.E.R. DE MATHÉMATIQUES ET C.N.R.S.- U.A. 225, UNIVERSITÉ DE PROVENCE, 3, PLACE VICTOR HUGO, 13331 MARSEILLE CEDEX 3, FRANCE