

## UNE MINORATION DE LA NORME DE L'OPÉRATEUR DE CAUCHY SUR LES GRAPHS LIPSCHITZIENS

GUY DAVID

ABSTRACT. It was shown by T. Murai that the norm of the operator defined by the Cauchy kernel on the graph of a Lipschitz function  $A$  is less than  $C(1 + \|A'\|_\infty)^{1/2}$ . We use Garnett's example to show that this estimate is optimal.

**I. Introduction.** Soit  $A: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction lipschitzienne. On considère l'opérateur  $T_A$  défini par

$$T_A f(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} [(x-y) + i(A(x) - A(y))]^{-1} f(y) dy$$

pour  $f$  assez régulière.

On sait depuis [CMM] que  $T_A$  s'étend en un opérateur borné sur  $L^2(\mathbf{R})$ , et T. Murai a montré dans [M] que la norme de  $T_A$  sur  $L^2(\mathbf{R})$  est inférieure à  $C(1 + \|A'\|_\infty)^{1/2}$ . Le but de cet article est de prouver que cette estimation est la meilleure possible.

**THÉORÈME.** *Pour tout  $M > 0$  assez grand, il existe une fonction lipschitzienne  $A$  telle que  $\|A'\|_\infty \leq M$  et  $\|T_A\|_{L^2(\mathbf{R}), L^2(\mathbf{R})} \geq M^{1/2}/10$ .*

**REMARQUE.** On peut aussi s'intéresser à une version légèrement différente de l'opérateur de Cauchy. On se donne un paramétrage  $s \rightarrow w(s)$  du graphe de  $A$  par la longueur d'arc, et on considère l'opérateur  $C_A$  défini par

$$C_A f(s) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{|s-t|>\varepsilon} [w(s) - w(t)]^{-1} f(t) dt.$$

L'opérateur  $C_A$  diffère de  $T_A$  seulement par le changement de variable qui transforme  $x$  en  $s$ . Le résultat de Murai entraîne que  $\|C_A\|_{L^2, L^2} \leq C(1 + \|A'\|_\infty)^{3/2}$ . D'autre part, la fonction  $A$  que nous allons construire est telle que  $M/2 \leq |A'(x)| \leq M$  pour presque tout  $x$ , ce qui montre que la dérivée du changement de variable  $x \rightarrow s$  est comprise entre  $(1 + M^2/4)^{1/2}$  et  $(1 + M^2)^{1/2}$ . Par conséquent, la norme de  $C_A$  pour notre exemple est supérieure à  $M^{3/2}/40$ .

L'idée de la démonstration est d'utiliser (comme P. Jones l'a suggéré à l'auteur) l'ensemble de Cantor du plan complexe connu sous le nom d'"exemple de Garnett" [G, I]. Cet ensemble est le produit cartésien  $G = K \times K$ , où  $K$  est l'ensemble de Cantor contenu dans  $[0, 1]$  défini par  $K = \bigcap_n E_n$ , où  $E_0 = [0, 1]$ ,  $E_1 = [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1]$ , ... et où  $E_{n+1}$  est obtenu à partir de  $E_n$  en retirant, de chacun des  $2^n$

Received by the editors August 1, 1986.

1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 Revision). Primary 42B20, 30C85.

*Key words and phrases.* Lipschitz graph, Cauchy integral, Calderón-Zygmund operators.

intervalles de longueur  $4^{-n}$  qui composent  $E_n$ , l'intervalle de longueur  $\frac{1}{2}4^{-n}$  situé en son centre. On constate (voir la figure) que  $G$  est, à une rotation près, le graphe d'une fonction  $F$ . La fonction  $A$  que nous construirons est une approximation  $M$ -lipschitzienne de cette fonction  $F$ , et nous estimerons dans la suite la vitesse avec laquelle la norme de  $T_A$  augmente quand  $M$  devient grand, c.à.d. quand  $A$  se rapproche de  $F$ .

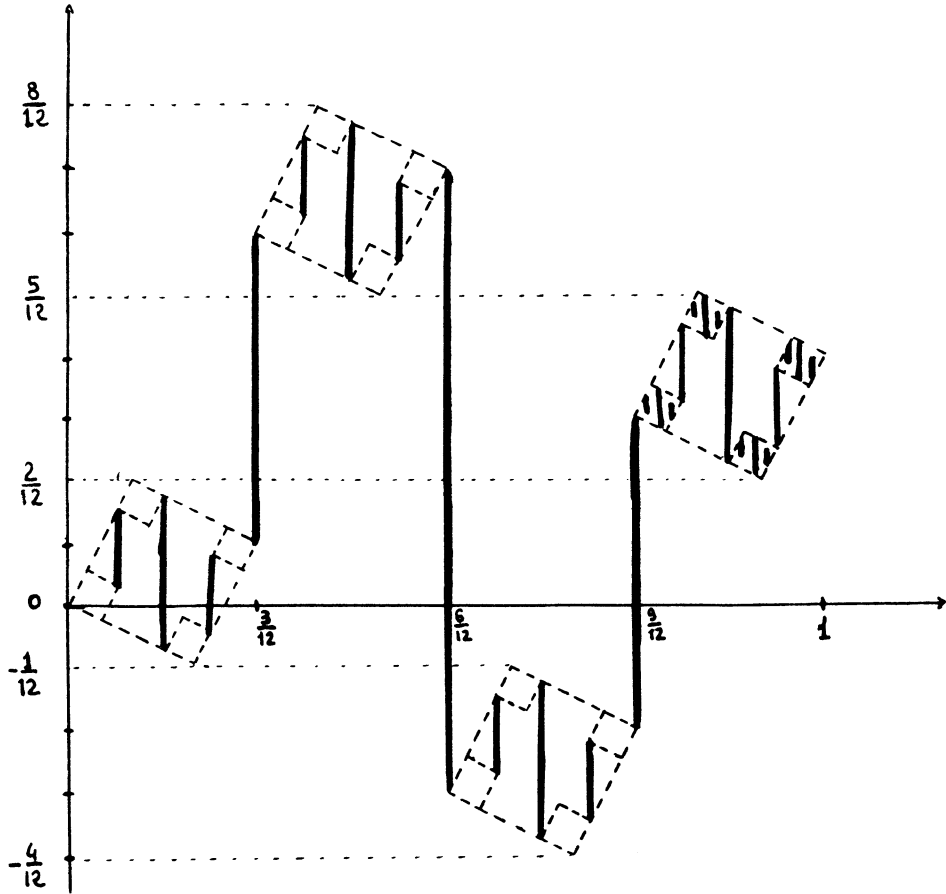


FIGURE. Graphe de  $A$  pour  $\varepsilon$  très petit (en traits pleins)

Nous donnerons au §II la définition précise de  $A$  et l'essentiel de la démonstration du théorème, en réservant pour le §III les calculs ennuyeux.

**II. Définition de  $A$ .** Pour simplifier les calculs, nous avons contracté un peu le graphe de  $F$ . La fonction  $A$  dépend du paramètre  $\varepsilon = 10/4M$ , et est définie par les conditions suivantes (voir la figure).

$$(1) \quad \begin{cases} A(\frac{3}{12}) = \frac{1}{12}, & A(\frac{3+4\varepsilon}{12}) = \frac{6}{12}, \\ A(\frac{6+4\varepsilon}{12}) = \frac{7}{12}, & A(\frac{6+8\varepsilon}{12}) = \frac{-3}{12}, \\ A(\frac{9+8\varepsilon}{12}) = \frac{-2}{12}, & A(\frac{9+12\varepsilon}{12}) = \frac{3}{12}; \end{cases}$$

(2)  $A$  est affine sur les segments

$$\left[ \frac{3}{12}, \frac{3+4\varepsilon}{12} \right], \quad \left[ \frac{6+4\varepsilon}{12}, \frac{6+8\varepsilon}{12} \right] \quad \text{et} \quad \left[ \frac{9+8\varepsilon}{12}, \frac{9+12\varepsilon}{12} \right];$$

(3)  $A$  est continue, et satisfait aux relations de récurrence suivantes: si  $\rho = 1/4(1 + \varepsilon)$ , alors

$$A(x) = \begin{cases} \rho A\left(\frac{x}{\rho}\right) & \text{pour } x \in I_0^1 = \left[0, \frac{3}{12}\right], \\ \rho A\left(\frac{x}{\rho} - \frac{3+4\varepsilon}{12\rho}\right) + \frac{6}{12} & \text{pour } x \in I_1^1 = \left[\frac{3+4\varepsilon}{12}, \frac{6+4\varepsilon}{12}\right], \\ \rho A\left(\frac{x}{\rho} - \frac{6+8\varepsilon}{12\rho}\right) - \frac{3}{12} & \text{pour } x \in I_2^1 = \left[\frac{6+8\varepsilon}{12}, \frac{9+8\varepsilon}{12}\right], \\ \rho A\left(\frac{x}{\rho} - \frac{9+12\varepsilon}{12\rho}\right) + \frac{3}{12} & \text{pour } x \in I_3^1 = \left[\frac{9+12\varepsilon}{12}, 1 + \varepsilon\right]. \end{cases}$$

On vérifie aisément que ces conditions définissent une fonction  $A$  (celle de la figure), et que  $A$  est lipschitzienne avec

$$(4) \quad -10/4\varepsilon \leq A'(x) \leq 5/4\varepsilon,$$

avec, en fait, égalité d'un des deux côtés presque-partout.

Nous voulons prouver que la norme de  $T_A$  sur  $L^2$  est supérieure à  $M^{1/2}/10$ . Il suffira de montrer que l'image par  $T_A$  de la fonction caractéristique de  $[0, 1 + \varepsilon]$  a une norme  $\geq ((1 + \varepsilon)/40\varepsilon)^{1/2}$  dans  $L^2([0, 1 + \varepsilon])$ .

Nous avons besoin de quelques notations. Soit

$$f(x) = \mathbf{1}_I(x) \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{dy}{x-y+i(A(x)-A(y))}.$$

On note  $I_0^0 = I$ , les  $I_k^l$ ,  $0 \leq k \leq 3$ , sont comme ci-dessus, et  $J_0^0$  est le complémentaire dans  $I_0^0$  de l'union des  $I_k^l$  (par conséquent,  $J_0^0$  est composé de trois petits intervalles ouverts).

Les  $I_k^l$  sont  $4^l$  intervalles de même longueur  $(1 + \varepsilon)\rho^l$  définis par récurrence de la manière suivante: ce sont les images inverses des  $I_{k'}^{l-1}$  ( $0 \leq k' \leq 4^{l-1} - 1$ ) par l'une des transformations  $x \rightarrow x/\rho - j(3 + 4\varepsilon)/\rho$ , où  $j = 0, 1, 2, 3$ . On numérote les  $I_k^l$  de gauche à droite (c.à.d. que  $I_k^l$  est le  $(k + 1)$ ième de ces intervalles à partir de la gauche). Pour tenter d'éclaircir un peu les notations, disons que les  $I_k^l$  correspondent aux  $4^l$  carrés de l'ensemble  $E_l \times E_l$  défini plus haut.

Pour  $l \geq 1$  et  $0 \leq k \leq 4^l - 1$ ,  $J_k^l$  est le complémentaire dans  $I_k^l$  de l'union des  $I_{k'}^{l+1}$  qui sont contenus dans  $I_k^l$  (cela correspond aux indices  $k' \in [4k, 4k + 3]$ ).  $J_k^l$  est donc la réunion de trois petits intervalles ouverts.

Enfin, on notera  $\tilde{k}$  la partie entière de  $k/4$ .

Nous allons décomposer la fonction  $f$  en de nombreux termes. Pour  $l \geq 1$ , on définit les trois fonctions  $f_l, g_l, h_l$  par les relations suivantes.

$$(5) \quad f_l(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ n'est dans aucun } I_k^l, \\ \sum_{\substack{k' \neq k \\ \tilde{k}' = \tilde{k}}} \int_{I_{k'}^l} \frac{dy}{z(x) - z(y)} & \text{si } x \in I_k^l, \end{cases}$$

où l'on a noté  $z(x) = x + iA(x)$ . La fonction  $f_l$  est donc, pour  $x \in I_k^l$ , la partie de  $T_A(1)$  qui provient des carrés dont la distance à  $z(x)$  est de l'ordre de  $4^{-l}$ .

$$(6) \quad g_l(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ n'est dans aucun des } I_k^l, \\ \int_{J_k^{l-1}} \frac{dy}{z(x) - z(y)} & \text{si } x \in I_k^l; \end{cases}$$

$$(7) \quad h_l(x) = \begin{cases} \int_{I_k^{l-1}} \frac{dy}{z(x) - z(y)} & \text{si } x \in J_k^{l-1}, \\ 0 & \text{si } x \text{ n'est dans aucun des } J_k^{l-1}. \end{cases}$$

Pour minorer la norme de  $f$ , on remarque que  $f = \sum_{l=1}^\infty (f_l + g_l + h_l)$ , et on veut calculer les produits scalaires entre toutes ces fonctions. Notre but est de montrer que les produits  $\langle f_l, f_l \rangle$  sont grands et positifs, alors que tous les autres produits sont petits. Le lemme suivant utilise le fait que le graphe de  $A$  est presque invariant par certaines dilatations et translations. Il nous permettra de réduire considérablement le nombre de termes à calculer.

LEMMA 1. Soient  $l \geq 1$  et  $m \geq 0$ . La formule qui suit est valable quand on remplace la lettre  $u$  par l'une des lettres  $f, g$ , ou  $h$  et la lettre  $v$  par l'une des lettres  $f, g$ , ou  $h$  :

$$(8) \quad \langle u_{1+m}, v_{l+m} \rangle = 4^m \rho^m \langle u_1, v_l \rangle.$$

Démontrons par exemple que  $\langle f_{1+m}, f_{l+m} \rangle = 4^m \rho^m \langle f_1, f_l \rangle$ . On écrit

$$\langle f_{1+m}, f_{l+m} \rangle = \sum_{k=0}^{4^m-1} \int_{I_k^m} f_{1+m}(x) \overline{f_{l+m}(x)} dx.$$

Fixons  $k \in [0, 4^m - 1]$  et  $x \in I_k^m$ . On écrit  $k = 4\tilde{k} + k'$  ( $0 \leq k' \leq 3$ ) et l'on note  $a$  l'extrémité initiale de  $I_{\tilde{k}}^l$ . Alors

$$\begin{aligned} f_{1+m}(x) &= \sum_{\substack{0 \leq k'' \leq 3 \\ k'' \neq k'}} \int_{I_{4\tilde{k}+k''}^{1+m}} \frac{dy}{z(x) - z(y)} \\ &= \sum_{\substack{0 \leq k'' \leq 3 \\ k'' \neq k'}} \int_{I_{4\tilde{k}+k''}^{1+m}} \frac{dy}{\rho^m z((x-a)/\rho^m) - \rho^m z((y-a)/\rho^m)} \\ &= \sum_{\substack{0 \leq k'' \leq 3 \\ k'' \neq k'}} \int_{I_{k''}^1} \frac{du}{z((x-a)/\rho^m) - z(u)} = f_1 \left( \frac{x-a}{\rho^m} \right). \end{aligned}$$

De même,  $f_{l+m}(x) = f_l((x-a)/\rho^m)$ . On en déduit aussitôt que

$$\begin{aligned} \langle f_{1+m}, f_{l+m} \rangle &= \sum_{k=0}^{4^m-1} \int_{I_k^m} f_1 \left( \frac{x-a}{\rho^m} \right) \overline{f_l \left( \frac{x-a}{\rho^m} \right)} dx \\ &= \sum_{k=0}^{4^m-1} \int_I f_1(x) \overline{f_l(x)} \rho^m dx = 4^m \rho^m \langle f_1, f_l \rangle. \end{aligned}$$

La démonstration des autres égalités (8) est semblable.

Le lemme suivant est un résumé des majorations dont on aura besoin pour conclure.

LEMME 2. *Posons  $\beta = \|f_1\|_2^2$ . Alors, si  $\varepsilon$  est assez petit,*

- (9)  $|\langle f_1, f_2 \rangle| \leq 23\beta/100;$
- (10)  $|\langle f_1, f_{1+k} \rangle| \leq (24/10)4^{-k}\beta \quad \text{pour } k \geq 2;$
- (11)  $|\langle f_1, g_k + h_k \rangle| + |\langle f_k, g_1 + h_1 \rangle| \leq 3^{-k}10^{-3}\beta;$
- (12)  $\beta \geq \frac{1}{2}.$

Nous gardons la démonstration du lemme pour le prochain paragraphe. L'idée est que l'intégrale de  $f_{1+k}$  (ou  $g_k$ , ou  $h_k$ ) sur  $I_j^k$  est nulle, alors que  $f_1$  (ou  $g_1$ ) varie assez peu sur cet intervalle. Les fonctions  $f_{1+k}$  et  $f_1$  sont donc presque orthogonales (ce qui explique (10) et (11) lorsque  $k$  est grand); le reste n'est qu'une question de calculs.

Montrons maintenant comment le Lemme 2 permet de démontrer le théorème.

Puisque  $f = \sum_{l=1}^{\infty} (f_l + g_l + h_l)$ ,

$$(13) \quad \|f\|_2^2 = \left\| \sum_l f_l \right\|_2^2 + \left\| \sum_l (g_l + h_l) \right\|_2^2 + 2\text{Re} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \langle f_l, g_m + h_m \rangle.$$

Commençons par minorer le premier terme:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{l=1}^{\infty} f_l \right\|_2^2 &= \sum_{l=1}^{\infty} \|f_l\|_2^2 + 2\text{Re} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \langle f_l, f_{l+k} \rangle \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} 4^m \rho^m \|f_1\|_2^2 + 2 \left( \sum_{m=0}^{\infty} 4^m \rho^m \right) \left( \text{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \langle f_1, f_{1+k} \rangle \right) \\ &\geq \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} (1 + \varepsilon)^{-m} \right\} \left\{ \beta - 2|\langle f_1, f_2 \rangle| - 2 \sum_{k=2}^{\infty} |\langle f_1, f_{1+k} \rangle| \right\} \\ &\geq \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} \beta \left( 1 - \frac{46}{100} - \frac{48}{10} \left( \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots \right) \right), \end{aligned}$$

et par conséquent

$$(14) \quad \left\| \sum_{l=1}^{\infty} f_l \right\|_2^2 \geq \frac{14}{100} \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} \beta.$$

Le second terme est positif, donc il ne reste plus qu'à s'occuper du troisième.

$$\begin{aligned}
 & \left| 2\operatorname{Re} \sum_l \sum_m \langle f_l, g_m + h_m \rangle \right| \\
 & \leq 2 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |\langle f_l, g_{l+k} + h_{l+k} \rangle| + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f_{m+k}, g_m + h_m \rangle| \\
 & \leq 2 \left( \sum_{j=0}^{\infty} (1 + \varepsilon)^{-j} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} |\langle f_1, g_{1+k} + h_{1+k} \rangle| \right) \\
 & \quad + 2 \left( \sum_{j=0}^{\infty} (1 + \varepsilon)^{-j} \right) \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f_{1+k}, g_1 + h_1 \rangle| \right) \\
 & \leq \frac{2(1 + \varepsilon)}{\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} (|\langle f_1, g_{1+k} + h_{1+k} \rangle| + |\langle f_{1+k}, g_1 + h_1 \rangle|) \\
 & \leq \frac{2(1 + \varepsilon)}{\varepsilon} \left( \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} \right) 10^{-3}\beta = \frac{3(1 + \varepsilon)}{\varepsilon} 10^{-3}\beta.
 \end{aligned}$$

Compte tenu de (13) et de (14),

$$\|f\|_2^2 \geq \frac{13(1 + \varepsilon)}{100\varepsilon} > \frac{1 + \varepsilon}{40\varepsilon},$$

ce qui démontre le théorème.

**III. Démonstration du Lemme 2.** Nous avons encore besoin de quelques notations. Pour chaque  $I_k^l$ , on appelle  $Q_k^l$  le carré dont l'une des diagonales est le segment  $[a_k^l + iA(a_k^l), b_k^l + iA(b_k^l)]$ , où  $a_k^l$  et  $b_k^l$  sont les extrémités de  $I_k^l$ .

LEMMA 3. *La fonction*

$$u(z) = \sum_{k=1}^3 \int_{I_k^1} \frac{dy}{z - z(y)}$$

est définie et analytique sur  $Q_0^1$ . Sa dérivée satisfait à

$$(15) \quad |u'(z)| \leq 34/10 \quad \text{sur } Q_0^1.$$

Pour démontrer cela, on écrit

$$u'(z) = \sum_{k=1}^3 \int_{I_k^1} \frac{-dy}{(z - z(y))^2},$$

et l'on majore  $|u'(z)|$  par

$$\sum_{k=4}^{15} \int_{I_k^2} \left[ \operatorname{dist} \left( \frac{3+i}{12}, Q_k^2 \right) \right]^{-2} dy \leq \frac{1}{16} \sum_{k=4}^{15} \left[ \operatorname{dist} \left( \frac{3+i}{12}, Q_k^2 \right) \right]^{-2}.$$

On fait le calcul et on obtient  $|u'(z)| \leq 34/10$ .

Pour  $k = 0, \dots, 15$ , soit  $z_k$  le centre de  $Q_k^2$ . Nous voulons calculer avec une certaine précision les valeurs de  $u(z)$  aux points  $z_0, z_1, z_2$  et  $z_3$ . Commençons par

remplacer, dans l'intégrale  $\int_{I_k^2} dy/(z_l - z(y))$ , le point  $z(y)$  par la constante  $z_k$ . Cela donne

$$\tilde{u}(z_l) = \frac{1}{16} \sum_{k=4}^{15} \frac{1}{z_l - z_k}.$$

On peut maintenant calculer  $\tilde{u}(z_l)$  pour  $l = 0, 1, 2, 3$ . Si  $\varepsilon$  est assez petit, le calcul donne

$$(16) \quad \frac{850}{1000} < -\operatorname{Re} \tilde{u}(z_0) < \frac{853}{1000} \quad \text{et} \quad \frac{283}{1000} < \operatorname{Im} \tilde{u}(z_0) < \frac{285}{1000};$$

$$(17) \quad \frac{924}{1000} < -\operatorname{Re} \tilde{u}(z_1) < \frac{929}{1000} \quad \text{et} \quad \frac{261}{1000} < \operatorname{Im} \tilde{u}(z_1) < \frac{265}{1000};$$

$$(18) \quad \frac{918}{1000} < -\operatorname{Re} \tilde{u}(z_3) < \frac{919}{1000} \quad \text{et} \quad \frac{306}{1000} < \operatorname{Im} \tilde{u}(z_3) < \frac{307}{1000}.$$

Nous n'avons pas besoin de calculer  $\tilde{u}(z_2)$  car nous pouvons l'obtenir par symétrie. La différence  $u(z_l) - \tilde{u}(z_l)$  est facilement majorée:

$$\begin{aligned} u(z_l) - \tilde{u}(z_l) &= \sum_{k=4}^{15} \int_{I_k^2} \left[ \frac{1}{z_l - z(y)} - \frac{1}{z_l - z_k} \right] dy + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= \sum_{k=4}^{15} \int_{I_k^2} \frac{z(y) - z_k}{(z_l - z(y))(z_l - z_k)} dy + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= \sum_{k=4}^{15} \int_{I_k^2} \frac{z(y) - z_k}{(z_l - z_k)^2} dy + \sum_{k=4}^{15} \int_{I_k^2} \frac{(z(y) - z_k)^2 dy}{(z_l - z_k)^2 (z_l - z(y))} + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Notons que la partie du graphe  $A$  qui se trouve dans  $Q_l^2$  est symétrique par rapport au centre  $z_k$ , de sorte que les 12 premières intégrales sont nulles, et que

$$\begin{aligned} |u(z_l) - \tilde{u}(z_l)| &\leq \sum_{k=4}^{15} \frac{1}{16} \left[ \sup_{y \in I_k^2} |z(y) - z_k|^2 \right] \frac{1}{|z_l - z_k|^2} \frac{1}{\operatorname{dist}(z_l, Q_k^2)} + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &\leq \frac{12}{16} \left[ \frac{1}{16^2} \frac{10}{36} \right] \frac{16^2}{45} 3 = \frac{1}{64} < \frac{16}{1000} \end{aligned}$$

dès que  $\varepsilon$  est assez petit.

Enfin, on déduit du Lemme 3 que si  $z \in Q_l^2$ , alors

$$|u(z) - u(z_l)| \leq \frac{34}{10} |z - z_l| \leq \frac{34}{10} \frac{1}{16} \left( \frac{10}{36} \right)^{1/2} < \frac{114}{1000}.$$

Par conséquent, si  $z \in Q_l^2$ ,

$$(19) \quad |u(z) - \tilde{u}(z_l)| < 13/100.$$

Les estimations suivantes sont des conséquences faciles de (16), (17), (18) et (19);

$$(20) \quad \inf_{x \in I_1^2} |f_1(x)| \geq 76/100,$$

$$(21) \quad \|f_1\|_\infty \leq 115/100.$$

Notons que, bien que nous n'ayons prouvé ces inégalités que pour  $0 \leq l \leq 3$ , elles restent vraies par le même argument (ou par symétrie) pour  $4 \leq l \leq 15$ . De même, (20) et (21) restent vraies quand  $f_1$  est remplacé par  $f_2$  et  $I_l^2$  par  $I_l^3$ .

On déduit de (20) que  $\beta = \|f_1\|_2^2 \geq \frac{1}{2}$  dès que  $\varepsilon$  est assez petit.

On déduit de (17), (18) et (19) que

$$(22) \quad |\tilde{u}(z_0) - \tilde{u}(z_3)| \leq \frac{73}{1000} \quad \text{et} \quad |\tilde{u}(z_1) - \tilde{u}(z_2)| \leq \frac{85}{1000}.$$

Montrons que, pour  $x \in I_0^1$  et  $\tilde{x} = 3/12 - x$ ,

$$(23) \quad |f_1(x) - f_1(\tilde{x})| \leq 345/1000.$$

En effet, si  $x \in I_0^2$ , alors

$$\begin{aligned} |f_1(x) - f_1(\tilde{x})| &= |u(z(x)) - u(z(\tilde{x}))| \\ &\leq |u(z(x)) - \tilde{u}(z_0)| + |u(z(\tilde{x})) - \tilde{u}(z_3)| + |\tilde{u}(z_0) - \tilde{u}(z_3)|. \end{aligned}$$

Par (19) et (22), ceci est inférieur à

$$2 \frac{130}{1000} + \frac{73}{1000} < \frac{345}{1000}.$$

De même, si  $x \in I_1^2$ ,

$$|f_1(x) - f_1(\tilde{x})| \leq |u(z(x)) - \tilde{u}(z_1)| + |u(z(\tilde{x})) - \tilde{u}(z_2)| + |\tilde{u}(z_1) - \tilde{u}(z_2)| \leq \frac{345}{1000}.$$

Enfin, le résultat pour  $x \in I_2^2$  ou  $x \in I_3^2$  s'en déduit par symétrie.

Démontrons maintenant l'inégalité (9). On écrit

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_I f_1(x) \overline{f_2(x)} dx = \sum_{j=0}^3 \int_{I_j^1} f_1(x) \overline{f_2(x)} dx.$$

Regardons seulement le premier terme de la somme, les autres étant semblables. Notons que la partie du graphe de  $A$  qui se trouve dans  $Q_0^1$  est symétrique par rapport à son centre, ce qui signifie que, pour  $x \in I_0^1$ ,  $z(\tilde{x}) = 3/12 + i/12 - z(x)$ . On en déduit que  $f_2(\tilde{x}) = -f_2(x)$  pour  $x \in I_0^1$ , et

$$\begin{aligned} \left| \int_{I_0^1} f_1(x) \overline{f_2(x)} dx \right| &= \frac{1}{2} \left| \int_{I_0^1} f_1(x) \overline{f_2(x)} dx - \int_{I_0^1} f_1(x) \overline{f_2(\tilde{x})} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{I_0^1} |f_1(x) - f_1(\tilde{x})| |f_2(x)| dx \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{345}{1000} \int_{I_0^1} |f_2(x)| dx \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{345}{1000} \left[ \frac{100}{76} \inf_{I_0^1} |f_2| \right] \int_{I_0^1} |f_2(x)| dx \\ &\leq \frac{345}{1520} \int_{I_0^1} |f_2(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

En additionnant les quatre morceaux provenant des  $I_l^1$ , on obtient

$$|\langle f_1, f_2 \rangle| \leq \frac{345}{1520} \beta < \frac{23}{100} \beta.$$



Passons à la démonstration de (10). A nouveau, on écrit

$$\langle f_1, f_{1+k} \rangle = \int_I f_1(x) \overline{f_{1+k}(x)} dx = \sum_{j=0}^{4^k-1} \int_{I_j^k} f_1(x) \overline{f_{1+k}(x)} dx.$$

Si  $x$  est dans  $I_j^k$ , et si  $\tilde{x}$  est le symétrique de  $x$  par rapport au centre de  $I_j^k$ ,  $f_{k+1}(\tilde{x}) = -f_{k+1}(x)$ , ce qui nous permet d'écrire

$$|\langle f_1, f_{1+k} \rangle| = \left| \sum_{j=0}^{4^k-1} \int_{I_j^k} \frac{1}{2} [f_1(x) - f_1(\tilde{x})] \overline{f_{k+1}(x)} dx \right|.$$

Comme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |f_1(x) - f_1(\tilde{x})| &\leq \frac{1}{2} \frac{34}{10} |x - \tilde{x}| \\ &\leq \frac{17}{10} 4^{-k} \frac{\sqrt{10}}{3} \left[ \frac{100}{76} \inf_{I_l^{k+1}} |f_{k+1}| \right] \leq \frac{24}{10} 4^{-k} \inf_{I_l^{k+1}} |f_{k+1}|, \end{aligned}$$

on obtient

$$|\langle f_1, f_{k+1} \rangle| \leq \frac{24}{10} 4^{-k} \sum_{j=0}^{4^k-1} \int_{I_j^k} |f_{k+1}(x)|^2 dx \leq \frac{24}{10} 4^{-k} \beta.$$

Il nous faut encore démontrer (11). Comme  $\|g_1\|_2$  et  $\|h_1\|_2$  tendent vers 0 avec  $\varepsilon$ , et que  $\|g_n\|_2 + \|h_n\|_2 \leq \|g_1\|_2 + \|h_1\|_2$ , il suffit de choisir  $\varepsilon$  assez petit pour que (11) soit vraie pour tout  $k \leq 100$ .

Soit maintenant  $k \geq 100$ , et supposons que  $\varepsilon$  est assez petit pour que  $\|h_1\|_2 + \|g_1\|_2 \leq 1$ . Soit  $M_1 = |\langle f_1, g_{k+1} \rangle|$ . Alors

$$M_1 \leq \sum_{j=0}^{4^k-1} \left| \int_{I_j^k} f_1(x) \overline{g_{k+1}(x)} dx \right|.$$

Comme le graphe de  $A$  est symétrique par rapport au point  $\frac{1}{2} + \frac{i}{6}$ , l'intégrale de la fonction  $g_1$  sur  $I_0^0$  est nulle. On en déduit que l'intégrale de  $g_{k+1}$  sur chaque  $I_j^k$  est encore nulle. Si  $x_j^k$  est le centre de  $I_j^k$ , on peut, sans changer l'intégrale, soustraire  $f_1(x_j^k)$  à  $f_1(x)$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} M_1 &\leq \sum_{j=0}^{4^k-1} \int_{I_j^k} |f_1(x) - f_1(x_j^k)| |g_{k+1}(x)| dx \\ &\leq \frac{34}{10} 4^{-k} \sum_{j=0}^{4^k-1} \int_{I_j^k} |g_{k+1}(x)| dx \\ &\leq \frac{34}{10} 4^{-k} \|g_{k+1}\|_2 \leq \frac{68}{10} 4^{-k} \beta. \end{aligned}$$

Soit maintenant  $M_2 = |\langle f_1, h_{k+1} \rangle|$ . A nouveau, par symétrie, l'intégrale de  $h_{k+1}$  sur chaque  $I_j^k$  est nulle. Le même calcul donne

$$M_2 \leq \frac{34}{10} 4^{-k} \|h_{k+1}\|_2 \leq \frac{68}{10} 4^{-k} \beta.$$

Soit  $M_3 = |\langle g_1, f_{k+1} \rangle|$ . La fonction  $g_1$  est de la forme

$$g_1(x) = \sum_{m=1}^6 \alpha_m \operatorname{Log}(z(x) - z(x_m))$$

sur le support de  $f_{k+1}$ , où les  $x_m$  sont les extrémités des intervalles composant  $J_0^0$ , et les  $\alpha_m$  sont des nombres complexes de module inférieur à 1. Alors,

$$M_3 \leq \sum_{m=1}^6 \sum_{j=0}^{4^k-1} \left| \int_{I_j^k} \operatorname{Log}(z(x) - z(x_m)) \overline{f_{k+1}}(x) dx \right|.$$

Si la distance de  $x_m$  à  $I_j^k$  est inférieure à  $10\rho^k$ , on utilise la majoration

$$\begin{aligned} & \left| \int_{I_j^k} \operatorname{Log}(z(x) - z(x_m)) \overline{f_{k+1}}(x) dx \right| \\ & \leq \|f_{k+1}\|_\infty \|\operatorname{Log}(z(x) - z(x_m))\|_{L^1(I_j^k)} \leq 10k\rho^k. \end{aligned}$$

Si la distance de  $x_m$  à  $I_j^k$  est supérieure à  $n\rho^k$  pour un  $n \geq 10$ , choisissons un point  $w$  dans  $I_j^k$  et remplaçons  $\operatorname{Log}(z(x) - z(x_m))$  par

$$\operatorname{Log}((z(x) - z(x_m))/(z(w) - z(x_m)))$$

dans l'intégrale, ce qui n'en change pas la valeur car l'intégrale de  $f_{k+1}$  sur  $I_j^k$  est nulle. On obtient

$$\left| \int_{I_j^k} \operatorname{Log}(z(x) - z(x_m)) \overline{f_{k+1}}(x) dx \right| \leq \frac{\operatorname{diam}(I_j^k)}{n\rho^k} \int_{I_j^k} |f_{k+1}(x)| dx \leq \frac{3}{n} \rho^k.$$

Notons que pour chaque entier  $n \geq 10$ , il y a au plus deux intervalles  $I_j^k$  tels que la distance de  $x_m$  à  $I_j^k$  soit comprise entre  $n\rho^k$  et  $(n+1)\rho^k$ . On somme maintenant tous les termes, et on obtient

$$M_3 \leq \sum_{m=1}^6 \left\{ 200k\rho^k + 2 \sum_{n=10}^{\rho^{-k}} \frac{3}{n} \rho^k \right\} \leq 10^4 k 4^{-k}.$$

Enfin, puisque  $h_1$  et  $f_{k+1}$  ont des supports disjoints,  $M_4 = |\langle h_1, f_{k+1} \rangle| = 0$ , et (11) est obtenue en sommant nos majorations de  $M_1, M_2$  et  $M_3$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [CMM] R. R. Coifman, A. McIntosh et Y. Meyer, *L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur  $L^2$  pour les courbes lipschitziennes*, Ann. of Math. (2) **116** (1982), 361–387.
- [G] J. Garnett, *Positive length but zero analytic capacity*, Proc. Amer. Math. Soc. **21** (1970), 696–699.
- [M] T. Murai, *Boundedness of singular integral operators of Calderon type VI*, preprint series, College of General Education, Nagoya, no. 12, 1984.
- [I] L. D. Ivanov, *The local structure of sets with finite variation*, Mat. Sb. (N.S.) **78** (120)(1969), 85–100.