

## ENSEMBLES DE RIESZ

VALÉRIE TARDIVEL

**ABSTRACT.** Let  $G$  be an abelian countable discrete group. We show that there exists no positive characterization of Riesz subsets of  $G$ , by proving that the Riesz subsets of  $G$  form a coanalytic non-Borel subset of  $2^G$ .

Soit  $G$  un groupe abélien discret dénombrable. Nous démontrons qu'il n'existe pas de caractérisation positive des ensembles de Riesz de  $G$ , en prouvant que les ensembles de Riesz de  $G$  forment un coanalytique non borélien dans  $2^G$ .

Si  $G$  est un groupe abélien discret dénombrable, le groupe dual  $\hat{G}$  est un compact métrisable. Le spectre d'une mesure  $\mu$ , élément de  $M(\hat{G})$ , est le support de  $\hat{\mu}$  dans  $G$  discret. Il est noté  $S(\mu)$ . On notera  $m$  ou  $d\xi$  la mesure de Haar sur  $\hat{G}$ . Les notions d'analyse de Fourier utilisées se trouvent dans les deux premiers chapitres du livre de Rudin [R1].

Soient  $E$  et  $F$ , deux espaces polonais. Un ensemble  $A \subset E$  est un ensemble analytique, s'il existe un borélien  $B \subset E \times F$ , tel que  $A$  soit la projection de  $B$  sur  $E$ . Le complémentaire d'un ensemble analytique est un ensemble coanalytique. Les résultats utilisés en théorie descriptive se trouvent dans Dellacherie [D].

On note  $S$  l'ensemble des suites finies d'entiers. Pour  $s$  et  $s'$  éléments de  $S$ , on note  $s < s'$  si  $\widehat{s}$  est une section commençante de  $s'$ . Si  $s$  et  $s'$  sont deux éléments de  $S$ , on note  $ss'$  la suite obtenue par concaténation des suites  $s$  et  $s'$ . On notera  $|s|$  la longueur de  $s$ .

**DEFINITION 1.** On appelle *arbre* sur  $\mathbb{N}$ , un ensemble  $T$  de suites finies d'entiers telles que  $(n_0, n_1, \dots, n_k) \in T \Rightarrow (n_0, n_1, \dots, n_{k-1}) \in T$ .  $(n_k)$  est une branche infinie pour  $T$  si  $\forall k (n_0, \dots, n_k) \in T$ . Un arbre  $T$  est dit bien fondé, s'il ne contient aucune branche infinie.

Si on identifie un arbre  $T$  avec sa fonction caractéristique, l'ensemble  $\mathcal{T}$  des arbres sur  $\mathbb{N}$  est un sous-ensemble de  $2^S$ . On voit facilement que  $\mathcal{T}$  est un fermé de  $2^S$ . Si on le munit de la topologie induite par  $2^S$ , on obtient un compact métrisable.

On a le théorème suivant:

**THEOREME 2 [D].** *L'ensemble des arbres bien fondés sur  $\mathbb{N}$  est un ensemble coanalytique non borélien.*

Nous allons maintenant définir les ensembles de Riesz.

**DEFINITION 3.** Soit  $G$  un groupe abélien discret dénombrable. Une partie  $\Lambda \subset G$  est un *ensemble de Riesz*, si toute mesure définie sur  $\hat{G}$ , à spectre contenu dans  $\Lambda$ , est absolument continue par rapport à la mesure de Haar.

Received by the editors January 26, 1986.

1980 *Mathematics Subject Classification.* Primary 43A46, 04A15.

*Key words and phrases.* Riesz sets, coanalytic sets, harmonic analysis on compact abelian groups.

REMARQUES. (1) L'ensemble vide est un ensemble de Riesz car  $S(\mu) = \emptyset$  entraîne  $\mu = 0$ .

(2) Toute sous-partie d'un ensemble de Riesz est encore un ensemble de Riesz.

(3) D'après le théorème de F. et M. Riesz,  $\mathbf{N}$  est un ensemble de Riesz dans  $\mathbf{Z}$  [R2].

On appelle  $\tau$  la topologie induite sur  $G$  par le compactifié de Bohr  $bG$  de  $G$  [R1]. Le théorème suivant, est une généralisation d'un résultat dû à Meyer [M].

THEOREME 4. Soit  $E \subset G$  un ensemble de Riesz. Soit  $\Lambda \subset G$ , possédant la propriété suivante: pour tout  $x \notin E$ , il existe un  $\tau$ -voisinage ouvert  $V_x$  de  $x$  tel que  $V_x \cap \Lambda$  soit un ensemble de Riesz. Alors  $\Lambda$  est un ensemble de Riesz.

DEMONSTRATION. Soit  $\mu$ , un élément de  $M(\hat{G})$ , dont le spectre est contenu dans  $\Lambda$ . Nous allons montrer que la partie singulière  $\mu_s$ , de  $\mu$ , est nulle. Soit  $x \notin E$  et soit  $V_x$  un  $\tau$ -voisinage ouvert de  $x$  tel que  $V_x \cap \Lambda$  soit un ensemble de Riesz. Il existe alors une mesure atomique  $\sigma$  telle que  $\hat{\sigma}(x) = 1$  et  $\hat{\sigma} = 0$  sur le complémentaire de  $V_x$  [M]. Alors, le spectre de  $\mu * \sigma$  est contenu dans  $V_x \cap \Lambda$ , qui est un ensemble de Riesz. On en déduit que  $(\mu * \sigma)_s = 0$ . Puisque  $(\mu * \sigma)_s = \mu_s * \sigma$  [M], en passant aux transformées de Fourier, on obtient  $\hat{\mu}_s(x) = 0$ . Donc, le spectre de  $\mu_s$  est contenu dans  $E$ , qui est ensemble de Riesz. On en déduit que  $\mu_s$  est nulle, et que  $\Lambda$  est un ensemble de Riesz.

PROPOSITION 5. Tout ensemble fini est un ensemble de Riesz.

DEMONSTRATION. Soit  $E = \{x_0, \dots, x_k\}$  et soit  $\mu$  une mesure dont le spectre est contenu dans  $E$ . La mesure  $\nu$  définie par  $\nu = \sum_{j=0}^k \hat{\mu}(x_j)(\xi, x_j)d\xi$  est telle que  $\hat{\nu} = \hat{\mu}$ . Donc  $\mu = \nu$  et, par conséquent  $\mu \ll m$ .

DEFINITION 6. Soit  $(x_k)$  une suite d'éléments de  $G$ .  $(x_k)$  est dite dissociée si tout élément de  $G$  admet au plus une représentation de la forme

$$\sum_{j=0}^n \varepsilon_k x_k \quad \text{où } \varepsilon_k \in \begin{cases} \{-1, 0, 1\} & \text{si } 2x_k \neq 0, \\ \{0, 1\} & \text{si } 2x_k = 0. \end{cases}$$

THEOREME 7. Soit  $(x_k)$  une suite dissociée d'éléments de  $G$ . Soit

$$E = \left\{ \sum_{k \geq 0} \varepsilon_k x_k \mid \varepsilon_k = -1, 0, 1 \text{ si } 2x_k \neq 0, \varepsilon_k = 0, 1 \text{ si } 2x_k = 0 \right\}.$$

Alors  $E$  n'est pas un ensemble de Riesz.

DEMONSTRATION. Soit  $(\alpha_k)$  une suite de réels compris entre  $-\frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{2}$ , et ne tendant pas vers 0 à l'infini. Pour tout  $k$  élément de  $\mathbf{N}$ , on définit la fonction  $P_k$  par

$$P_k(\xi) = \begin{cases} (1 + \alpha_k \langle x_k, \xi \rangle + \alpha_k \overline{\langle x_k, \xi \rangle}) & \text{si } 2x_k \neq 0, \\ (1 + \alpha_k \langle x_k, \xi \rangle) & \text{si } 2x_k = 0. \end{cases}$$

Pour tout  $n$  élément de  $\mathbf{N}$ , on définit la mesure de probabilité  $\mu_n$  par

$$\mu_n = \prod_{k=0}^n P_k(\xi) dm(\xi).$$

$\hat{\mu}_n$  vérifie alors

$$(1) \quad \begin{cases} \hat{\mu}_n(0) = 1, \\ \hat{\mu}_n(x) = \prod_{k=0}^j \alpha_k^{|\varepsilon_k|} & \text{si } x = \sum_{k=0}^j \varepsilon_k x_k, \quad j \leq n, \\ \hat{\mu}_n = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après (1), et puisque les mesures  $\mu_n$  sont des mesures de probabilité, la suite  $(\mu_n)_{n \geq 0}$  possède une limite vague  $\mu$  telle que

$$\begin{cases} \hat{\mu}(0) = 1, \\ \hat{\mu}(x) = \prod_{k=0}^j \alpha_k^{|\varepsilon_k|} & \text{si } x = \sum_{k=0}^j \varepsilon_k x_k, \\ \hat{\mu}(x) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\mu$  est une mesure de probabilité dont le support est contenu dans  $E$ . Puisque la suite  $(\alpha_k)$  ne tend pas vers 0,  $\mu$  n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Haar.  $E$  n'est donc pas un ensemble de Riesz.

Notre but, maintenant, est de montrer que  $R(G)$ , l'ensemble des ensembles de Riesz, n'est pas borélien (Théorème 10). En utilisant les Théorèmes 4 et 7, nous allons associer à tout arbre bien fondé un ensemble de Riesz, et, à tout arbre qui n'est pas bien fondé, un ensemble qui n'est pas un ensemble de Riesz. Nous aurons à établir deux résultats préliminaires. Tout d'abord, nous introduisons sur  $G$  une nouvelle topologie.

$G$  est un groupe abélien discret dénombrable. Le compactifié de Bohr de  $G$ ,  $bG$ , est un compact, qui généralement n'est pas métrisable. Cependant, on peut trouver un compact métrisable  $G^*$  contenant  $G$ . En effet, considérons dans  $\hat{G}$ , un sous-groupe dénombrable séparant les points de  $G$ . Son groupe dual,  $G^*$ , est un compact métrisable contenant  $G$ . En fait,  $G^*$  peut être identifié à un quotient de  $bG$  [R1];  $bG$  se projette donc sur  $G^*$ . Si on note  $\tau^*$ , la topologie induite sur  $G$  par  $G^*$ , tout ouvert de  $G$  pour  $\tau^*$  est un ouvert de  $G$  pour  $\tau$ .

**LEMME 8.** *Soit  $K$  un compact métrisable. Soient  $D$  un ensemble dénombrable contenu dans  $K$  et  $F$  un fermé disjoint de  $K$ . Alors, il existe des ouverts  $U_n$ , deux à deux disjoints, tels que*

- (i)  $\overline{U_n} \cap F = \emptyset$ ,
- (ii)  $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \supset D$ ,
- (iii)  $U_n \cap D$  est ouvert et fermé dans  $D$ .

**DEMONSTRATION.** Soit  $x$  un élément de  $D$ .  $D$  étant dénombrable, on peut trouver  $r \in \mathbf{R}^{*+}$  tel que  $B(x, r) \cap D$  soit ouvert et fermé dans  $D$ , et  $\overline{B}(x, r) \cap F = \emptyset$ . On en déduit un recouvrement de  $D$  par des boules  $B_n$  telles que  $B_n \cap D$  soit ouvert et fermé dans  $D$ , et  $B_n \cap F = \emptyset$ . Si l'on pose  $U_n = B_n \setminus \bigcup_{k < n} \overline{B}_k$ , les  $U_n$  vérifient les conditions (i), (ii), et (iii) de l'énoncé.

**THEOREME 9.** *Soit  $G$  un groupe abélien discret dénombrable. Soit  $G^*$ , un compact métrisable, contenant  $G$ , et induisant sur  $G$  la topologie  $\tau^*$ . Soit  $(x_k)_{k \geq 0}$ , une suite d'éléments non nuls de  $G$ , tendant vers 0 pour la topologie  $\tau^*$ .*

*Alors, pour tout  $s \in S$ , on peut construire:*

- (i) un ensemble

$$E_s = \left\{ \sum_{k=0}^{|s|-1} \varepsilon_k t_k^{(s)} \mid \varepsilon_k = -1, 0, 1 \text{ si } 2t_k^{(s)} \neq 0, \varepsilon_k = 0, 1 \text{ si } 2t_k^{(s)} = 0, t_k^{(s)} \in (x_k) \right\}$$

*tel que  $s < s' \Rightarrow E_s \subset E_{s'}$ ;*

- (ii) une partition  $(W_j^{(s)})_{j \in \mathbb{N}}$  en ouverts fermés, pour la topologie induite par  $G^*$ , de  $G \setminus E_s$ ;
- (iii) si  $s = \widehat{rk}$ , un ouvert  $U_s$  de  $G \setminus E_r$ , pour la topologie induite par  $G^*$ , réunion d'éléments de  $(W_j^{(r)})$  et vérifiant:

$$U_{rk} \cap U_{rn} = \emptyset \quad \text{si } k \neq n,$$

$$E_t \setminus E_r \subset U_{rk} \quad \text{si } rk < t.$$

DEMONSTRATION. On note  $(p_k)_{k \geq 0}$  la suite des nombres premiers. A toute suite finie  $s = (n_0, \dots, n_k)$ , on associe l'entier naturel  $\nu(s) = p_0^{n_0} p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k+1}$ . On vérifie aisément, que  $\nu$  est une bijection de  $S$  sur  $\mathbb{N}$ , vérifiant  $s < s' \Rightarrow \nu(s) \leq \nu(s')$ . Nous allons construire, par récurrence, pour tout  $k = \nu(u)$  un ensemble  $E_u$ , et des parties finies  $A_{sn}^k$  de  $\mathbb{N}$  tels que

- ( $\alpha$ ) si  $k' > k$ ,  $A_{sn}^{k'} \supset A_{sn}^k$ ,
- ( $\beta$ ) si  $m \neq n$ ,  $A_{sm}^k \cap A_{sn}^k = \emptyset$ ,
- ( $\gamma$ ) si  $t > \widehat{sn}$  et  $\nu(t) \leq k$ ,  $E_t \setminus E_s \subset \bigcup_{j \in A_{sn}^k} W_j^{(s)}$ ,
- ( $\delta$ ) si  $\nu(\widehat{sn}) > k$ ,  $A_{sn}^k = \emptyset$ .

On pose  $E_\emptyset = \{0\}$ . Grâce au Lemme 8, on construit  $(W_j^{(s)})_{j \in \mathbb{N}}$  vérifiant (ii). A cette étape de la construction, il n'y a que la condition ( $\delta$ ) qui est vérifiée. Supposons la construction effectuée pour tout  $k < n = \nu(s)$ , et effectuons la construction pour  $s$ . On a donc construit:

- des ensembles  $E_u$ , pour  $\nu(u) < \nu(s)$ , vérifiant (i),
- des partitions  $(W_j^{(u)})_{j \in \mathbb{N}}$ , pour  $\nu(u) < \nu(s)$ , vérifiant (ii),
- des parties finies de  $\mathbb{N}$ ,  $A_{up}^k$ , vérifiant ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ), ( $\gamma$ ), et ( $\delta$ ).

On a  $s = \widehat{rm}$ , par exemple. Il faut trouver  $t_{|r|}^{(s)}$ , élément de  $G \setminus E_r$  et extrait de la suite  $(x_k)_{k \geq 0}$ , pour construire

$$E_s = E_r \cup \{E_r + t_{|r|}^{(s)}\} \cup \{E_r - t_{|r|}^{(s)}\} \quad \text{si } 2t_{|r|}^{(s)} \neq 0$$

ou

$$E_s = E_r \cup \{E_r + t_{|r|}^{(s)}\} \quad \text{si } 2t_{|r|}^{(s)} = 0$$

et il faut construire les  $A_{up}^n$  vérifiant ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ), ( $\gamma$ ), et ( $\delta$ ).

Pour simplifier les notations, posons  $t_{|r|}^{(s)} = t$ . Soit  $x$  élément de  $E_r$ ,  $x \neq 0$ . Il existe une suite  $u$ , de longueur maximale, pour laquelle on a:  $x \in E_r \setminus E_u \subset \bigcup_{j \in A_{up}^{n-1}} W_j^{(u)}$  si  $\widehat{up} < r(*)$ . Nous allons trouver  $t$  et  $A_{up}^n$  tels que

- (a) pour tout  $x$  vérifiant (\*)

$$x + t \in \bigcup_{j \in A_{up}^n} W_j^{(u)} \quad \text{si } \widehat{up} < r,$$

$$x - t \in \bigcup_{j \in A_{up}^n} W_j^{(u)} \quad \text{si } \widehat{up} < r,$$

la deuxième condition pouvant être nulle

(b)

$$t \in \bigcup_{j \in A_{up}^n} W_j^{(u)}, \quad -t \in \bigcup_{j \in A_{up}^n} W_j^{(u)},$$

la deuxième condition pouvant être nulle.

D'après la condition ( $\delta$ ), il suffit de construire les  $A_{up}^n$  vérifiant ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ) et ( $\gamma$ ) pour  $\nu(\widehat{up}) \leq n$ .

La suite  $(x_k)$  tend vers 0, donc, pour tout  $x$  vérifiant (\*), la suite  $x + t$ , où  $t \in (x_k)$ , tend vers  $x$  (il en est de même pour la suite  $x - t$ ). Si  $x \in \bigcup_{j \in A_{up}^{n-1}} W_j^{(u)}$ , pour  $t$  suffisamment grand, puisque  $\bigcup_{j \in A_{up}^{n-1}} W_j^{(u)}$  est ouvert, en peut avoir  $(x + t)$ , (respectivement  $x - t$ ) élément de  $\bigcup_{j \in A_{up}^{n-1}} W_j^{(u)}$ . Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de tels  $x$ , on peut trouver  $t$  tel que (a) soit vérifié, dès que  $A_{up}^n \supset A_{up}^{n-1}$ .

Pour que la condition (b) soit vérifiée, il faut que l'on puisse trouver  $t$  dans la suite  $(x_k)$  tel que pour tout  $\widehat{up} < s$ ,  $t$  soit dans un  $W_{j(\widehat{up})}^{(u)}$  et  $-t$  soit dans un  $W_{j'(\widehat{up})}^{(u)}$  qui n'aient pas déjà été choisis. Il suffit alors de poser  $A_{up}^n = A_{up}^{n-1} \cup \{j(\widehat{up}), j'(\widehat{up})\}$  pour avoir le résultat, puisque les  $W_j^{(u)}$  forment des partitions de  $G \setminus E_u$ .

Pour chaque  $u$ , telle que  $\nu(u) < \nu(s)$ , il n'y a qu'un nombre fini de  $W_j^{(u)}$  qui ont été choisis. Supposons, qu'à partir d'un certain rang, tous les éléments de la suite  $(x_k)$  soient dans la réunion de ces  $W_j^{(u)}$  ( $\nu(u) < \nu(s)$ ). Alors, il existe un  $W_j^{(u)}$  contenant un nombre infini d'éléments de la suite  $(x_k)$ . Donc, il existe une suite extraite qui se trouve dans l'un des  $W_j^{(u)}$ . Cette suite extraite converge vers 0, et,  $W_j^{(u)}$  étant fermé, doit contenir cette limite. Or, ceci est impossible par construction de  $W_j^{(u)}$ . Il y a donc une infinité d'éléments de  $(x_k)$  en dehors des  $W_j^{(u)}$  déjà choisis. S'il y a une infinité d'éléments de la suite  $(x_k)$  qui ne sont pas d'ordre 2, un raisonnement analogue au précédent montre qu'il y a une infinité d'éléments  $t$  de la suite tels que  $t$  et  $-t$  soient en dehors des  $W_j^{(u)}$  déjà choisis. On choisit donc  $t$ ,  $j(\widehat{up})$  et  $j'(\widehat{up})$ , pour  $\widehat{up} < s$  tels que la condition (b) soit satisfaite. On achève ainsi la construction de  $E_s$ , et des  $A_{up}^n$  vérifiant ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ), ( $\gamma$ ), et ( $\delta$ ) au rang  $n$ .  $E_s$  vérifie (i). Ensuite, le Lemme 8 permet de construire la partition  $(W_j^{(s)})_{j \in \mathbb{N}}$  vérifiant (ii). Il suffit alors de poser  $U_{sn} = \bigcup \{W_j^{(s)} \mid j \in \bigcup_k A_{sn}^k\}$  pour que (iii) soit vérifiée.

Ceci achève la démonstration du théorème.

**THEOREME 10.** *Soit  $G$  un groupe abélien discret dénombrable.  $R(G)$  n'est pas borélien.*

**DEMONSTRATION.** Soit  $(t_k)$  une suite d'éléments non nuls de  $G$  tendant vers 0 pour  $\tau^*$ . On peut, par induction, à partir de la suite  $(t_k)$ , construire une suite dissociée  $(x_k)$  tendant vers 0 pour  $\tau^*$  [G-McG, Lemma 7.1.1] A partir de cette suite  $(x_k)$ , on effectue la construction donnée par le Théorème 9.

Soit  $T$  un arbre sur  $\mathbf{N}$ . Posons  $F(T) = \bigcup_{s \in T} E_s$ .

(a) Nous allons montrer:  $F(T)$  est un ensemble de Riesz si, et seulement si,  $T$  est bien fondé.

(1) Si  $T$  admet une branche infinie,  $F(T)$  contient un ensemble de la forme  $\{\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k x'_k \mid \varepsilon_k = -1, 0, 1 \text{ si } 2x'_k \neq 0, \varepsilon_k = 0, 1 \text{ si } 2x'_k = 0\}$  où la suite  $(x'_k)$  est une suite dissociée, extraite de la suite  $(x_k)$ . D'après le Théorème 7,  $F(T)$  n'est pas un ensemble de Riesz.

(2) Supposons que  $F(T)$  ne soit pas un ensemble de Riesz. Pour  $s \in S$ , on pose  $F_s(T) = \bigcup_{u >_s} E_u$ .

D'après la construction effectuée au théorème précédent, on a

$$F_s(T) \subset E_s \cup \left( \bigcup_{n \in \mathbf{N}} U_{\widehat{sn}} \right).$$

Nous allons montrer que  $T$  contient une branche infinie. On a

$$F(T) = \bigcup_n F_{\langle n \rangle}(T).$$

Montrons qu'il existe  $\langle n_0 \rangle \in T$ , telle que  $F_{\langle n_0 \rangle}(T)$  ne soit pas un ensemble de Riesz. Supposons que ceci soit faux. Soit  $x \in G \setminus E_\emptyset$ .  $x$  est dans l'un des  $W_j^{(\emptyset)}$ , soit  $W_{j(x)}^{(\emptyset)}$ . D'après la construction effectuée au Théorème 9,  $W_{j(x)}^{(\emptyset)} \cap F(T) = \emptyset$  ou, il existe  $\langle n \rangle$  tel que  $j(x) \in \bigcup_k A_n^k$  et  $W_{j(x)}^{(\emptyset)} \cap F(T) \subset F_{\langle n \rangle}(T)$ . On en déduit que  $W_{j(x)}^{(\emptyset)} \cap F(T)$  est un ensemble de Riesz. Puisque les  $W_j^{(\emptyset)}$  sont des ouverts de  $G$  pour  $\tau$  et  $E_\emptyset$  est un ensemble de Riesz, d'après le Théorème 4,  $F(T)$  est un ensemble de Riesz. Il existe donc bien  $n_0$  telle que  $F_{\langle n_0 \rangle}(T)$  ne soit pas un ensemble de Riesz. De plus,  $\langle n_0 \rangle \in T$  car sinon  $F_{\langle n_0 \rangle}(T)$  serait l'ensemble vide, donc un ensemble de Riesz.

Supposons qu'il existe  $s \in T$  telle que  $F_s(T)$  ne soit pas un ensemble de Riesz, et montrons que l'on peut trouver  $n \in \mathbf{N}$ , tel que  $F_{\langle \widehat{sn} \rangle}(T)$  ne soit pas un ensemble de Riesz et tel que  $\langle \widehat{sn} \rangle \in T$ . On a  $F_s(T) = \bigcup_n F_{\langle \widehat{sn} \rangle}(T)$ . Supposons, que, pour tout  $n$ ,  $F_{\langle \widehat{sn} \rangle}(T)$  soit un ensemble de Riesz. Soit  $x \in G \setminus E_s$ .  $x$  est donc dans l'un des  $W_j^{(s)}$ , soit  $W_{j(x)}^{(s)}$ . Comme précédemment, en utilisant le Théorème 9, on montre que  $W_{j(x)}^{(s)} \cap F_s(T)$  est un ensemble de Riesz. Les  $W_j^{(s)}$  étant des ouverts de  $G$  pour la topologie  $\tau$  et  $E_s$  étant un ensemble de Riesz, une nouvelle utilisation du Théorème 4 montre que  $F_s(T)$  est un ensemble de Riesz. Donc, il existe bien  $n$  tel que  $F_{\langle \widehat{sn} \rangle}(T)$  ne soit pas un ensemble de Riesz. Puisque  $F_{\langle \widehat{sn} \rangle}(T)$  ne peut pas être vide,  $\langle \widehat{sn} \rangle \in T$ .

Donc, pour toute suite finie  $s \in T$  telle que  $F_s(T)$  ne soit pas un ensemble de Riesz, il existe  $n \in \mathbf{N}$  tel que  $\langle \widehat{sn} \rangle \in (T)$ , et  $F_{\langle \widehat{sn} \rangle}(T)$  ne soit pas un ensemble de Riesz.

On en déduit l'existence d'une suite infinie d'entiers  $\sigma$ , telle que, pour toute section commençante  $s$  de  $\sigma$ ,  $F_s(T)$  soit non vide et ne soit pas un ensemble de Riesz et  $s \in T$ .  $\sigma$  est donc une branche infinie pour  $T$ .

Ceci achève la partie (a) de la démonstration.

(b) On montre facilement que l'application  $F$  de  $\mathcal{T}$  dans  $2^G$  définie par  $F(T) = \bigcup_{s \in T} E_s$ , est de première classe.

Si  $R(G)$  était borélien, son image réciproque par  $F$  serait un borélien de  $\mathcal{T}$ . Or, cette image réciproque est l'ensemble des arbres bien fondés sur  $\mathbb{N}$  qui, d'après le Théorème 2, n'est pas borélien. Donc  $R(G)$  n'est pas borélien.

**THEOREME 11.** *Soit  $G$  un groupe abélien discret dénombrable.  $R(G)$  est un ensemble coanalytique dans  $2^G$ .*

**DEMONSTRATION.**  $2^G$  est un espace polonais.  $M^1(\hat{G})$ , muni de la topologie vague, est également un espace polonais.

Or,  $\Lambda \subset G$  est un ensemble de Riesz, si et seulement si,

$$\forall \mu \in M^1(\hat{G}) \quad (\forall x \in G \ (x \notin \Lambda \Rightarrow \hat{\mu}(x) = 0)) \Rightarrow \mu \ll m$$

or,  $\mu$  est absolument continue par rapport à  $m$  si, et seulement si,  $|\mu|$  est absolument continue par rapport à  $m$ , c'est-à-dire si, et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall B \text{ borélien} \quad m(B) < \eta \Rightarrow |\mu|(B) < \varepsilon$$

ou encore

$$\forall k > 0 \quad \exists p > 0 \quad \forall B \text{ borélien} \quad m(B) < \frac{1}{p} \Rightarrow |\mu|(B) < \frac{1}{k}.$$

De plus, il suffit de faire la vérification sur les réunions finies d'ouverts de base. Ces réunions sont dénombrables car  $\hat{G}$ , étant un compact métrisable, admet une base dénombrable.

Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  l'ensemble de ces réunions finies d'ouverts de base.  $\Lambda \subset G$  est un ensemble de Riesz si, et seulement si,

$$\begin{aligned} \forall \mu \in M^1(\hat{G}) \quad (\forall x \in G \ (x \notin \Lambda \Rightarrow \hat{\mu}(x) = 0)) \\ \Rightarrow \left( \forall k > 0 \ \exists p > 0 \ \forall n \ m(U_n) < \frac{1}{p} \Rightarrow |\mu|(U_n) < \frac{1}{k} \right). \end{aligned}$$

Considérons le borélien suivant de  $M^1(\hat{G}) \times 2^G \times 2^G$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = \bigcup_{x \in G} \bigcap_{k > 0} \bigcup_{p > 0} \bigcap_{n \geq 0} \left( \{ \mu | \hat{\mu}(x) \neq 0 \} \times \{ \Lambda | x \notin \Lambda \} \times 2^G \cup M^1(\hat{G}) \times 2^G \right. \\ \left. \times \left\{ U_n | m(U_n) \geq \frac{1}{p} \right\} \cup \left\{ \mu | |\mu|(U_n) < \frac{1}{k} \right\} \times 2^G \times 2^G \right). \end{aligned}$$

Le complémentaire de  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}^c$ , est un borélien de  $M^1(\hat{G}) \times 2^G \times 2^G$ . La projection de  $\mathcal{B}^c$  sur le deuxième facteur de  $M^1(\hat{G}) \times 2^G \times 2^G$  est un ensemble analytique de  $2^G$ , soit  $\mathcal{A}$ . Or,  $R(G) = \mathcal{A}^c$ , donc  $R(G)$  est coanalytique dans  $2^G$ .

**COROLLAIRE 12.** *Si  $G$  est un groupe abélien discret dénombrable,  $R(G)$  est un ensemble coanalytique non borélien dans  $2^G$ .*

Je remercie vivement Monsieur le Professeur Jean Saint Raymond pour le temps qu'il a bien voulu m'accorder, et tout l'intérêt qu'il a porté à la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier également Monsieur le Professeur Gilles Godefroy pour les indications qu'il m'a données sur les ensembles de Riesz.

## BIBLIOGRAPHIE

- [D] C. Dellacherie, *Ensembles analytiques: théorèmes de séparation et applications*, Séminaire de Probabilités IX, Lecture Notes in Math., vol. 465, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1975, pp. 336–372.
- [G-McG] C. G. Graham and O. C. McGehee, *Essays in commutative harmonic analysis*, Springer-Verlag, New York and Berlin, 1979.
- [M] Y. Meyer, *Spectres des mesures et mesures absolument continues*, *Studia Math.* **30** (1968), 87–99.
- [R1] W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, Interscience Tracts, no. 12, Wiley, New York, 1962.
- [R2] ———, *Real and complex analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1974.

EQUIPE D'ANALYSE, UNIVERSITÉ PARIS 6, 4, PLACE JUSSIEU T/46/0 - 4ÈME ÉTAGE,  
75256 PARIS CEDEX 05, FRANCE