TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 331, Number 1, May 1992

L'ESPACE DES PSEUDO-ARCS D'UNE SURFACE

ROBERT CAUTY

ABSTRACT. We prove that, for any surface M, the space of pseudo-arcs contained in M is homeomorphic to $M \times l^2$.

1. INTRODUCTION

Tous les espaces considérés ici sont supposés métriques séparables et munis d'une distance d fixée, mais arbitraire sauf indication contraire. Nous noterons $C(X)$ l'espace des sous-continus de X muni de la topologie définie par la distance de Hausdorff associée à d ; il est connu que la topologie ainsi obtenue sur $C(X)$ ne dépend pas du choix de d. Soit $P(X)$ le sous-ensemble de $C(X)$ formé des continus homéomorphes au pseudo-arc. S. B. Nadler, Jr. a demandé [8, 19.33] si $P(\mathbf{R}^2)$ était homéomorphe à l'espace de Hilbert l^2. Nous nous proposons ici de répondre affirmativement à cette question et, plus généralement, de démontrer le résultat suivant.

1.1. **Théorème.** *Pour toute surface* M (*avec ou sans bord*), $P(M)$ *est homéomorphe à* $M \times l^2$.

Rappelons qu'un sous-continu K d'une surface M est dit cellulaire s'il est l'intersection d'une suite $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ de disques fermés tels que D_{n+1} soit contenu dans l'intérieur de D_n pour tout n ; puisque nous sommes en dimension deux, ceci équivaut au fait que K est contenu dans l'intérieur de M et est homéomorphe à un sous-continu de la sphére S^2 ne séparant pas cette sphère (cela résulte, par exemple, du Théorème 3.1, p. 108, de [11]). Nous noterons c.e.(M) le sous-espace de $C(M)$ formé des continus cellulaires.

Notre démonstration n'utilise pratiquement aucune propriété particulière au pseudo-arc; il nous suffit de savoir que si un pseudo-arc est contenu dans l'intérieur d'une surface M, son intérieur est vide et il est cellulaire dans M. En fait, l'étude de $P(M)$ est ainsi ramenée à celle de c.e.(M) et de certains sous-espaces de c.e.(M).

Soit D le disque unité ouvert du plan complexe; $D = \{z \in \mathbf{C}/|z| < 1\}$. La partie la plus délicate de la démonstration est de montrer que $P(D)$ est une l^2-variété; cela prendra la plus grande partie de l'article et nécessitera l'utilisation intensive de la théorie des représentations conformes. Une fois cela établi, nous saurons que $P(M)$ est une l^2-variété (au moins si le bord de M est vide), et

Received by the editors April 8, 1989 and, in revised form, February 9, 1990.
1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 *Revision*). Primary 54B20, 57N20.

il suffira, pour achever la démonstration, de déterminer son type d'homotopie, ce qui peut se faire par un argument géométrique simple.

La distance sur un espace métrique sera toujours notée d ; la distance de Hausdorff associée sur $C(X)$ sera toujours notée ρ. Si A et B sont des sous-ensembles de X, nous noterons $\delta(A)$ le diamètre de A, et nous poserons $d(A, B) = \inf_{a\in A, b\in B} d(a, b)$; si $A = \{x\}$, nous écrirons $d(x, B)$ au lieu de $d(\{x\}, B)$. La boule ouverte (resp. fermée) de centre x et de rayon ε sera notée $B(x, \varepsilon)$ (resp. $\overline{B}(x, \varepsilon)$). Si A est un sous-ensemble de X, nous identifierons $C(A)$ à un sous-espace de $C(X)$ et, si X est une surface, nous poserons $\mathrm{c.e.}(A) = \mathrm{c.e.}(X) \cap C(A)$; nous noterons $F_1(A) = \{\{a\}/a \in A\} \subset C(A)$.

L'espace X sera dit topologiquement complet s'il admet une distance complète. Il est connu qu'un sous-espace A d'un espace complet X est topologiquement complet si, et seulement si, c'est un G_δ dans X.

Si X et Y sont des espaces métriques, nous noterons $\mathscr{C}(X, Y)$ l'espace des fonctions continues de X dans Y avec la topologie compacte-ouverte. Si X est localement compact, cette topologie coïncide avec la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de X. Une fonction $f : X \to Y$ est appelée un plongement si c'est un homéomorphisme de X sur $f(X)$. Une fonction $f : X \to Y$ est dite fermée au-dessus d'un sous-ensemble A de Y si, pour tout a dans A et tout voisinage U de $f^{-1}(a)$ dans X, il existe un voisinage V de a dans Y tel que $f^{-1}(V) \subset U$. L'expression semicontinue supérieurement (resp. inférieurement) sera abrégée en s.c.s. (resp. s.c.i.).

Nous noterons I l'intervalle [0,1]. Une homotoppie est une fonction $h : X \times I \to Y$; étant donnée une telle homotopie, nous noterons h_t la fonction $h_t(x) = h(x, t)$ de X dans Y.

Pour $0 < t < 1$, définissons les sous-ensembles suivants du disque-unité $D : S(t) = \{z \in \mathbf{C}/|z| = t\}$, $A(t) = \{z \in C/t \leq |z| < 1\}$, $B(t) = \{z/|z| < t\}$ et $\overline{B}(t) = \{z/|z| \leq t\}$. Nous noterons S^1 le bord de D.

Pour terminer cette introduction, rappelons quelques résultats connus sur les l^2-variétés. Pour $n \geq 1$, soit I^n le cube unité de dimension n ; notons $\bigoplus_{n=1}^{\infty} I^n$ la somme topologique de tous les I^n.

1.2. **Lemme.** *Un rétracte absolu de voisinage séparable et topologiquement complet X est un l^2-variété si, et seulement si, pour toute fonction continue $g : \bigoplus_{n=1}^{\infty} I^n \to X$ et toute fonction continue $\varepsilon : X \to]0, \infty[$, il existe une fonction continue $k : \bigoplus_{n=1}^{\infty} I^n \to X$ vérifiant*

(i) *la famille $\{k(I^n)\}_{n=1}^{\infty}$ est discrète dans X,*
(ii) *$d(g(x), k(x)) < \varepsilon(g(x))$ pour tout x dans $\bigoplus_{n=1}^{\infty} I^n$.*

Ceci est le Corollaire 3.2 de [9].

1.3. **Lemme.** *Soient X un espace métrique et A un sous-ensemble de X. Supposons qu'il existe une homotopie $h : X \times I \to X$ telle que* (i) $h_0 = \mathrm{id}$, (ii) *$h_t(X) \subset A$ pour tout $t > 0$. Alors*

(a) *X est un rétracte absolu de voisinage si, et seulement si, A en est un,*
(b) *si X est une l^2-variété et si A est topologiquement complet, A est une l^2-variété,*

(c) *si A est une l^2-variété, X topologiquement complet et si, en outre, A est ouvert dans X et la fonction h fermée au-dessus de $X \backslash A$, alors X est une l^2-variété.*

(a) résulte du Théorème 6.3, pp. 139–140, de [5],

(b) peut se prouver à l'aide de la version du Lemme 1.2 utilisant des recouvrements ouverts au lieu des fonctions ε (si g est une fonction continue de $\bigoplus_{n=1}^{\infty} I^n$ dans A et $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in J}$ un recouvrement ouvert de A, soit, pour tout i, U_i' un ouvert de X tel que $U_i = U_i' \cap X$, et soit $U' = \bigcup_i U_i'$. La fonction g peut être approximée dans U' par une fonction k' telle que les ensembles $\{k'(I^n)\}_{n=1}^{\infty}$ forment une famille discrète dans U'. L'homotopie h peut être utilisée pour rentrer k' dans A en conservant une bonne approximation, ainsi que la propriété des images des I^n de former une famille discrète dans U', donc à fortiori dans A).

(c) est un cas particulier du Théorème (B1) de [10] (remarquer que l'hypothèse sur h garantit que, pour toute fonction α continue et strictement positive sur X, la fermeture de l'ensemble des points $h(x, \alpha(x))$, $x \in X$, est contenue dans A).

Il est aussi clair que, sous les hypothèses du Lemme 1.3, X et A ont le même type d'homotopie.

2. Rappel sur les représentations conformes

Nous regarderons la sphère de Riemann tantôt comme le compactifié $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ du plan complexe, tantôt comme la sphère unité $S^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 / x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$, les deux étant identifiés par projection stéréographique depuis le pôle nord $(0, 0, 1)$ de S^2. Par cette identification, D correspond à l'hémisphère inférieur $(x_3 < 0)$ de S^2.

Soient $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ des domaines simplement connexes de S^2 contenant tous un disque fixé de centre p_0. Soit H l'ensemble (ouvert) des points p de S^2 pour lesquels il existe un voisinage V de p et un entier n_0 tels que H_n contienne V pour $n \geq n_0$. Le noyau de la suite $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ (par rapport à p_0) est la composante connexe de H qui contient p_0. On dit que la suite $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers un domaine H_0 au sens de Carathéodory (par rapport au point p_0) si toute sous-suite de $\{H_n\}$ a pour noyau H_0.

Il est connu qu'étant donné un domaine simplement connexe H de S^2 dont le complémentaire contient plus d'un point, et un point p de $H \cap \mathbf{C}$, il existe une unique représentation conforme f de D sur H telle que $f(0) = p$ et $f'(0) > 0$ [7, Théorème 1.3, p. 13].

2.1. **Lemme.** *Soient $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ des domaines simplement connexes de S^2 dont les complémentaires ne sont pas dégénérés. Pour $n \geq 0$, soit p_n un point de $H_n \cap \mathbf{C}$. Supposons que les H_n contiennent tous un disque fixé de centre p_0, et que la suite $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers p_0. Soit f_n la représentation conforme de D sur H_n telle que $f_n(0) = p_n$ et $f_n'(0) > 0$. Si la suite $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers H_0 au sens de Carathéodory, alors la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers f_0 uniformément sur tout compact de D.*

Ce lemme est prouvé dans [7, Théorème 2.1, p. 33] lorsque les H_n sont des sous-ensembles uniformément bornés de $\mathbf{C}$ et les p_n tous égaux à p_0. La démonstration s'applique sans changement quand $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite quelconque tendant vers p_0, et cela suffit à traiter le case particulier où les ensembles $S^2\backslash H_n$ contiennent tous un disque fixé; le cas général se ramène à celui-ci comme suit. Prenons deux points distincts q_0 et r_0 de la frontière de $S^2\backslash H_0$. La convergence au sens de Carathéodory de $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ vers H_0 implique l'existence de suites $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ avec q_n et r_n dans $S^2\backslash H_n$ pour $n \geq 1$, qui convergent vers q_0 et r_0 resp. (si, par exemple, $\{q_n\}$ n'existait pas, il y aurait une sous-suite $\{H_{n_k}\}$ telle que le noyau de $\{H_{n_k}\}$ par rapport à p_0 contienne un voisinage de q_0). Nous supposons $q_n \neq r_n$ pour tout n. Soit T_n l'unique homographie de S^2 qui envoie p_n, q_n et r_n sur 1, 0 et ∞ resp. Alors $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément vers T_0 sur S^2, et $\{T_n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément vers T_0^{-1}. On peut vérifier que les ensembles $\{T_n(H_n)\}_{n=1}^{\infty}$ contiennent tous un disque fixé de centre 1 et que la suite $\{T_n(H_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers $T_0(H_0)$ au sens de Carathéodory. Soit k_n l'unique racine carrée holomorphe sur $T_n(H_n)$ telle que $k_n(1) = 1$; k_n est injective sur $T_n(H_n)$. On peut vérifier que les ensembles $H_n' = k_n(T_n(H_n))$, $n \geq 0$, contiennent tous un disque fixé de centre 1 dont le symétrique par rapport à l'origine est contenu dans tous les $S^2\backslash H_n'$, et que la suite $\{H_n'\}_{n=1}$ converge vers H_0' au sens de Carathéodory. D'après le cas particulier, $\{k_n \circ T_n \circ f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément sur tout compact vers $k_0 \circ T_0 \circ f_0$ (les dérivées $(k_n \circ T_n \circ f_n)'(0)$ ne sont pas nécessairement positives, mais l'argument de $(k_n \circ T_n \circ f_n)'(0)$, qui est égal à l'argument de $T_n'(p_n)$, tend vers l'argument de $(k_0 \circ T_0 \circ f_0)'(0)$, ce qui suffit pour la démonstration du Théorème 2.1 de [7]). La convergence de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ vers f_0 s'en déduit facilement.

La réciproque de Lemme 2.1, prouvée dans [7, Théorème 2.1] lorsque les H_n sont uniformément bornés dans $\mathbb{C}$, est encore vraie dans le cas général, mais nous n'en avons pas besoin.

La remarque élémentaire suivante, combinée avec le lemme précédent, permettra d'utiliser les représentations conformes pour l'étude de c. e.(D).

2.2. **Lemme.** *Soient p_0 un point de S^2, $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ des éléments de $C(S^2)$ ne contenant pas p_0 et, pour $n \geq 0$, H_n la composante de $S^2\backslash C_n$ qui contient p_0. Si la suite $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers C_0 dans $C(S^2)$, alors la suite $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers H_0 au sens de Carathéodory (par rapport à p_0).*

Démonstration. Cela résulte du fait que si x appartient à C_0, il est limite d'une suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ où x_n appartient à C_n pour tout n, tandis que si x appartient à $S^2\backslash C_0$ et si V est un voisinage compact de x contenu dans $S^2\backslash C_0$, alors $V \cap C_n = \varnothing$ si n est assez grand.

Soit $\mathscr{A}(\overline{D})$ l'ensemble des plongements de $\overline{D}$ dans $\mathbb{C}$ dont la restriction à D est une représentation conforme.

2.3. **Lemme.** *$\mathscr{A}(\overline{D})$ est un rétracte absolu de voisinage.*

C'est le Lemme 11 de [6].

3. L'espace des continus nondégénérés de c. e.(D)

Posons c. e.$^*(D) =$ c. e.$(D)\backslash F_1(D)$. Nous allons démontrer dans cette section que le couple (c. e.(D), c. e.$^*(D)$) vérifie l'hypothèse du Lemma 1.3.

Nous aurons besoin du fait élémentaire suivant.

3.1. **Lemme.** *Soient* $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ *des courbes simples fermées dans* S^2 ; *pour* $n \geq 0$, *soient* D_n *et* E_n *les fermetures des composantes de* $S^2 \backslash J_n$. *Si, dans* $C(S^2)$, $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge vers* J_0 *et* $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge vers* D_0, *alors* $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge vers* E_0.

Démonstration. Nous avons $J_0 \subset \liminf J_n \subset \liminf E_n$. Soit x un point de $S^2 \backslash J_0$, et soit B un disque fermé de centre x disjoint de J_0. Alors $B \cap J_n = \varnothing$ pour n assez grand, donc B est contenu dans $\mathring{D}_n$ ou dans $\mathring{E}_n$. Si x appartient à $\mathring{D}_0$, alors B rencontre D_n pour n grand, donc est contenu dans D_n ; par suite, $B \cap E_n = \varnothing$ pour n grand, donc $x \notin \limsup E_n$. Si x est dans $\mathring{E}_0$, $B \cap D_n$ est vide pour n grand, d'où $B \subset E_n$ et $x \in \liminf E_n$. Nous avons donc

$$E_0 \subset \liminf E_n \subset \limsup E_n \subset S^2 \backslash \mathring{D}_0 = E_0,$$

d'où le résultat.

3.2. **Lemme.** *Il existe un homotopie* $\Phi : \text{c.e.}(D) \times I \to \text{c.e.}(D)$ *et une fonction continue* $\varphi : ce(D) \times]0, 1] \to D$ *vérifiant*

(i) $\Phi_0 = \text{id}$,

(ii) *pour tout point* x *de* D *et tout* t *dans* I, $\Phi(\{x\}, t) = \{x\}$,

(iii) *pour tout* C *dans* $\text{c.e.}^*(D)$ *et tout* $t > 0$, $\Phi(C, t)$ *est un disque fermé,*

(iv) *pour tout* x *de* D *et tout* t *dans* $]0, 1]$, $\varphi(\{x\}, t) = x$,

(v) *pour tout* C *dans* $\text{c.e.}^*(D)$ *et tout* $t > 0$, $\varphi(C, t)$ *appartient à l'intérieur de* $\Phi(C, t)$.

Démonstration. Fixons un point p_0 de $\mathbb{C} \backslash \overline{D}$. Pour C dans $\text{c.e.}^*(D)$, soit f_C la représentation conforme de D sur $S^2 \backslash C$ telle que $f_C(0) = p_0$ et $f'_C(0) > 0$. D'après le Lemmes 2.1 et 2.2, la fonction $F : \text{c.e.}(D) \to \mathscr{C}(D, S^2)$ définie par $F(C) = f_C$ est continue.

Pour (C, s) dans $\text{c.e.}^*(D) \times]0, 1[$, posons

$$\Sigma(C, s) = C \cup f_C(A(s)) = S^2 \backslash f_C(B(s)).$$

$\Sigma(C, s)$ est un disque contenant C. La fonction Σ est continue car, si $\{(C_n, s_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers (C_0, s_0) dans $\text{c.e.}^*(D) \times]0, 1[$, il résulte de la continuité de F que $\{f_{C_n}(S(s_n))\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{f_{C_n}(\overline{B}(s_n))\}_{n=1}^{\infty}$ convergent vers $f_{C_0}(S(s_0))$ et $f_{C_0}(\overline{B}(s_0))$ resp.; le Lemme 3.1 entraîne alors que $\{\Sigma(C_n, s_n)\}$ converge vers $\Sigma(C_0, s_0)$.

Pour C dans $\text{c.e.}^*(D)$ et $0 < t \leq 1$, posons

$$(1) \qquad \alpha(C, t) = \inf\{s > 0 / \rho(C, \Sigma(C, s)) < t \cdot \min(\delta(C), d(C, S^2 \backslash D))\}$$

$\alpha(C, t) > 0$ car $f_C(0) = p_0$ appartient à $S^2 \backslash \overline{D}$. De plus, $\alpha(C, t) < 1$ car $\Sigma(C, s)$ contient C, et l'ensemble des $x \in S^2$ vérifiant

$$d(x, C) \geq t \cdot \min(\delta(C), d(C, S^2 \backslash D))$$

est un compact contenu dans $S^2 \backslash C$, donc dans $f_C(B(s))$ si s est assez proche de 1. Remarquons aussi que, puisque $C \subset \Sigma(C, s) \subset \Sigma(C, s')$ pour $s' < s < 1$, tout nombre $s > \alpha(C, t)$ vérifie $\rho(C, \Sigma(C, s)) < t \cdot \min(\delta(C), d(C, S^2 \backslash D))$. La fonction α est s.c.s. car il résulte de la continuité des fonctions δ, $d(\cdot, S^2 \backslash D)$ et Σ que, pour un s donné dans $]0, 1[$, l'ensemble des (C, t) vérifiant $\rho(C, \Sigma(C, s)) < t \cdot \min(\delta(C), d(C, S^2 \backslash D))$ est ouvert dans $\text{c.e.}^*(D) \times]0, 1[$.

Puisque α est s.c.s. et strictement inférieure à 1, nous pouvons [3, Théorème 4.3, p. 171] trouver une fonction continue $\gamma : \text{c.e.}^*(D)\times]0, 1] \to]0, 1]$ vérifiant

(2) $$\alpha(C, t) < \gamma(C, t) < 1 \quad \text{quels que soient } C \text{ et } t.$$

Définissons maintenant Φ par

(3) $$\begin{aligned} &\Phi(C, t) = C \quad \text{si } t = 0 \text{ ou si } C \in F_1(D), \\ &\Phi(C, t) = \Sigma(C, \gamma(C, t)) \quad \text{si } (C, t) \in \text{c.e.}^*(D)\times]0, 1]. \end{aligned}$$

Il résulte de (1) et (2) que $\Phi(C, t)$ est contenu dans D. Les conditions (i) et (ii) sont vérifiées par définition, et (iii) résulte d'une remarque précédente. La continuité de Φ en un point de l'ouvert $\text{c.e.}^*(D)\times]0, 1]$ résulte de la continuité des fonctions Σ et γ. Soit $\{(C_n, t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ une suite d'éléments de $\text{c.e.}(D) \times I$ convergeant vers un point (C_0, t_0) de $(\text{c.e.}(D) \times \{0\}) \cup (F_1(D) \times I)$. Il résulte de (3), (2) et (1) que $\rho(C_n, \Phi(C_n, t_n))$ tend vers zéro, donc $\{\Phi(C_n, t_n)\}$ a la même limite $C_0 = \Phi(C_0, t_0)$ que $\{C_n\}$, d'où la continuité de Φ en un tel point (C_0, t_0).

Pour (C, t) dans $\text{c.e.}^*(D)\times]0, 1]$, le réel $\frac{1}{2}(\gamma(C, t)+1)$ est dans l'intérieur de $A(\gamma(C, t))$. Nous pouvons donc définir φ par

$$\left| \begin{array}{l} \varphi(\{x\}, t) = x \quad \text{pour } x \text{ dans } D \text{ et } t > 0, \\ \varphi(C, t) = f_C(\frac{1}{2}(\gamma(C, t) + 1)) \quad \text{pour } (C, t) \text{ dans } \text{c.e.}^*(D)\times]0, 1]. \end{array} \right.$$

Il est clair que les conditions (iv) et (v) sont vérifiées. La continuité de φ en un point de $\text{c.e.}^*(D)\times]0, 1]$ résulte de la continuité de F et de γ. Soit $\{(C_n, t_n)\}$ une suite tendant vers un point $(\{x_0\}, t_0)$ de $F_1(D)\times]0, 1]$. Alors $\{\Phi(C_n, t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers $\{x_0\}$, donc, puisque $\varphi(C_n, t_n)$ appartient à $\Phi(C_n, t_n)$, $\{\varphi(C_n, t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers $x_0 = \varphi(\{x_0\}, t_0)$, d'où la continuité de φ en $(\{x_0\}, t_0)$.

Convention. Dans toute la suite de cet article, les notations f_C, F et Σ auront la même signification que dans la démonstration précédente.

3.3. **Lemme.** *Il existe une homotopie* $\Psi : \text{c.e.}(D) \times I \to \text{c.e.}(D)$ *vérifiant*

(i) $\Psi_0 = \text{id}$,

(ii) *pour tout* $t > 0$, $\Psi_t(\text{c.e.}(D))$ *est contenu dans* $\text{c.e.}^*(D)$.

Démonstration. Si x est un point de S^2, nous noterons $\tilde{x}$ son antipode. Nous utiliserons la distance d sur S^2 induite par la distance euclidienne de $\mathbb{R}^3$. Pour x dans D et tout ε vérifiant

(1) $$0 < \varepsilon \leq d(x, S^2\backslash D),$$

soit $\lambda(x, \varepsilon)$ la fonction de S^2 sur S^2 définie comme suit: $\lambda(x, \varepsilon)$ est l'identité hors de $B(x, \varepsilon)$ et en x, contracte $\overline{B}(x, \varepsilon/2)$ sur le point x et, pour tout demi-grand cercle L reliant x à $\tilde{x}$, envoie $L\cap(\overline{B}(x, \varepsilon)\backslash B(x, \varepsilon/2))$ sur $L\cap\overline{B}(x, \varepsilon)$ linéairement (au sens de la longueur du sous-arc de L). Il est clair que $\lambda(x, \varepsilon)$ dépend continuement des éléments x, ε vérifiant (1).

Les fonctions Φ et φ étant celles du Lemme 3.2, posons, pour (C, t) dans $\text{c.e.}(D)\times]0, 1]$, $\varepsilon(C, t) = d(\Phi(C, t), S^2\backslash D) \leq d(\varphi(C, t), S^2\backslash D)$. Nous définissons alors une fonction continue Λ de $\text{c.e.}(D)\times]0, 1]$ dans $\mathscr{C}(S^2, S^2)$ par

$$\Lambda(C, t) = \lambda(\varphi(C, t), t\varepsilon(C, t)).$$

Soit K un continu contenant $\varphi(C, t)$ et contenu dans D. Puisque $\Lambda(C, t)$ est l'identité sur $S^2\backslash D$, $\Lambda(C, t)^{-1}(K)$ est contenu dans D. De plus, $\Lambda(C, t)^{-1}(K)$ contient le disque nondégénéré $\overline{B}(\varphi(C, t), \frac{t}{2}\varepsilon(C, t))$ et $\Lambda(C, t)$ induit un homéomorphisme de $S^2\backslash\Lambda(C, t)^{-1}(K)$ sur $S^2\backslash K$. Par suite, $\Lambda(C, t)^{-1}(K)$ est dans c. e.$^*(D)$ si K est dans c. e.(D). Nous pouvons donc définir la fonction $\Psi : \text{c. e.}(D) \times I \to \text{c. e.}(D)$ par

$$\Psi(C, 0) = C, \quad \Psi(C, t) = \Lambda(C, t)^{-1}(\Phi(C, t)) \quad \text{si } t > 0.$$

Les conditions (i) et (ii) sont alors vérifiées. Pour voir la continuité de Ψ, soit $\{(C_n, t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ une suite d'éléments de c. e.$(D) \times I$ convergeant vers (C_0, t_0). Distinguons deux cas.

Cas 1. $t_0 = 0$. Puisque, pour $t > 0$, $\Lambda(C, t)$ est l'identité hors du disque $\overline{B}(\varphi(C, t), t\varepsilon(C, t))$ et envoie ce disque sur lui-même, nous avons

$$(2) \quad \rho(\Psi(C, t), \Phi(C, t)) \leq \delta(\overline{B}(\varphi(C, t), t\varepsilon(C, t))) = 2t\varepsilon(C, t) \leq 2t\delta(S^2).$$

Puisque $\{t_n\}$ tend vers zéro, les suites $\{\Psi(C_n, t_n)\}$ et $\{\Phi(C_n, t_n)\}$ ont donc la même limite $\Phi(C_0, 0) = C_0 = \Psi(C_0, 0)$.

Cas 2. $t_0 > 0$. Nous pouvons supposer $t_n > 0$ pour tout n. Les fonctions φ et Φ étant continues, $\{\varphi(C_n, t_n)\}$ tend vers $\varphi(C_0, t_0)$ et $\{\varepsilon(C_n, t_n)\}$ vers $\varepsilon(C_0, t_0)$, donc le disque $\overline{B}(\varphi(C_n, t_n), (t_n/2)\varepsilon(C_n, t_n))$ tend vers le disque $\overline{B}(\varphi(C_0, t_0), (t_0/2)\varepsilon(C_0, t_0))$. Tout point de S^2 autre que $\varphi(C_0, t_0)$ a un voisinage compact V tel que, posant $\Lambda_n = \Lambda(C_n, t_n)$, $\Lambda_n^{-1}|V$ soit injective pour n assez grand et que la suite $\{\Lambda_n^{-1}|V\}$ converge uniformément vers $\Lambda_0^{-1}|V$; il est facile d'en déduire que x est dans la limite supérieure (resp. inférieure) de $\{\Phi(C_n, t_n)\}$ si, et seulement si, $\Lambda_0^{-1}(x)$ est dans la limite supérieure (resp. inférieure) de $\{\Psi(C_n, t_n)\}$. Combinée avec ce qui précède, la continuité Φ entraîne alors que de $\{\Psi(C_n, t_n)\}$ tend vers $\Psi(C_0, t_0)$.

4. c. e.(D) EST UN RÉTRACTE ABSOLU DE VOISINAGE

4.1. **Lemme.** *c. e.(D) et c. e.$^*(D)$ sont des rétractes absolus de voisinage.*

Pour prouver cela, nous aurons besoin du résultat suivant.

4.2. **Lemme.** *Soient X, Y deux espaces métriques, A un fermé de X, g une fonction continue de A dans Y et $G : A \times I \to Y$ une homotopie telle que $G_0 = g$. Si la restriction de G à $A\times]0, 1]$ se prolonge à un voisinage de $A\times]0, 1]$ dans $X\times]0, 1]$, alors g se prolonge à un voisinage de A dans X.*

Le Lemme 4.2 est un corollaire d'un théorème de Dowker [2, Théorème 1], (si V est un voisinage ouvert de $A\times]0, 1]$ dans $X\times]0, 1]$ auquel G se prolonge, et si $V \cap (X \times \{1\}) = W \times \{1\}$, ce théorème implique que g se prolonge à W).

Démonstration du Lemme 4.1. D'après les Lemmes 1.3 et 3.3, il suffit de traiter le cas de c. e.$^*(D)$. Soient donc X un espace métrique, A un fermé de X et g une fonction continue de A dans c. e.$^*(D)$. Définissons l'homotopie $G : A \times I \to \text{c. e.}^*(D)$ par

$$G(x, t) = \Phi(g(x), t),$$

où Φ est l'homotopie construite au Lemme 3.2. Alors $G_0 = g$, donc, d'après le Lemme 4.2, il suffit de montrer que la restriction de G à $A\times]0, 1]$ se prolonge à un voisinage de $A\times]0, 1]$ dans $X\times]0, 1]$. Rappelons que, pour (C, t) dans $\text{c.e.}^*(D)\times]0, 1]$,

$$\Phi(C, t) = \Sigma(C, \gamma(C, t)), \tag{1}$$

où γ est une fonction continue de $\text{c.e.}^*(D)\times]0, 1]$ dans $]0, 1[$. Pour (x, t) dans $A\times]0, 1]$, nous pouvons, puisque $\gamma(g(x), t) < 1$, définir une fonction continue $H(x, t)$ de $\overline{D}$ dans S^2 par

$$H(x, t)(z) = F(g(x))(\gamma(g(x), t) \cdot z), \qquad z \in \overline{D}. \tag{2}$$

Puisque F et γ sont continues, H est une fonction continue de $A\times]0, 1]$ dans $\mathscr{C}(\overline{D}, S^2)$. Puisque $F(g(x))$ est une représentation conforme de D sur $S^2\backslash g(x)$, la fonction H prend ses valeurs dans le sous-ensemble Z de $\mathscr{C}(\overline{D}, S^2)$ formé des plongements dont les restrictions à D sont des représentations conformes. Ce sous-ensemble Z est localement homéomorphe à l'ensemble $\mathscr{A}(\overline{D})$ du Lemme 2.3, donc est un rétracte absolu de voisinage. Nous pouvons donc trouver un voisinage V de $A\times]0, 1]$ dans $X\times]0, 1]$ et un prolongement $\widetilde{H} : V \to Z$ de H. Définissons $\widetilde{G} : V \to C(S^2)$ par

$$\widetilde{G}(x, t) = S^2\backslash\widetilde{H}(x, t)(D), \qquad (x, t) \in V.$$

$\widetilde{G}(x, t)$ est donc un disque de bord $\widetilde{H}(x, t)(S^1)$, donc un élément de $\text{c.e.}^*(S^2)$. La fonction $\widetilde{G}$ est continue. En effet, si $\{(x_n, t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers (x_0, t_0), il résulte de la continuité de $\widetilde{H}$ que la suite de courbes simples fermées $\{\widetilde{H}(x_n, t_n)(S^1)\}$ converge vers $\widetilde{H}(x_0, t_0)(S^1)$ et que la suite de disques $\{\widetilde{H}(x_n, t_n)(\overline{D})\}$ converge vers $\widetilde{H}(x_0, t_0)(\overline{D})$; il résulte alors du Lemme 3.1 que $\{\widetilde{G}(x_n, t_n)\}$ converge vers $\widetilde{G}(x_0, t_0)$.

Pour (x, t) dans $A\times]0, 1]$, nous avons

$$\widetilde{H}(x, t)(D) = H(x, t)(D) = F(g(x))(B(\gamma(g(x), t)))$$

(d'après (2)), d'où $\widetilde{G}(x, t) = S^2\backslash F(g(x))(B(\gamma(g(x), t))) = \Sigma(g(x), \gamma(g(x), t)) = \Phi(g(x), t) = G(x, t)$. Ceci montre que $\widetilde{G}$ prolonge G. Quitte à restreindre V, nous pouvons supposer que G prend ses valeurs dans l'ouvert $\text{c.e.}^*(D)$ de $\text{c.e.}^*(S^2)$, d'où le lemme.

5. Déformation de c. e.*(D) en $P(D)$

Nous allons montrer dans cette section que le couple $(\text{c.e.}^*(D), P(D))$ vérifie l'hypothèse du Lemme 1.3. Nous avons besoin d'un résultat auxiliaire.

5.1. **Lemme.** *Il existe un chemin $\theta : [0, 1] \to C(\overline{D})$ vérifiant*

(i) $\theta(0) = \overline{D}$,

(ii) *pour* $0 < t \leq 1$, *$\theta(t)$ est un pseudo-arc contenu dans D.*

Démonstration. Soient $a = (-1, 0)$, $b = (1, 0)$, $J = [-1, 1] \times \{0\} \subset \mathbf{R}^2$ et $E = [-2, 2] \times [-2, 2]$. Nous allons construire, pour $0 < t \leq 1$, un arc J_t d'extrémités $a(t)$ et $b(t)$, un disque E_t contenant J_t et contenu dans D, et un homéomorphisme π_t du couple (E, J) sur le couple (E_t, J_t) tel que $\pi_t(a) = a(t)$ et $\pi_t(b) = b(t)$, ces objets vérifiant les conditions suivantes:

(1) Si $0 < t \leq t' \leq 1$, alors $J_{t'} \subset J_t$.

(2) $\bigcup_{t \geq 0} J_t$ est dense dans D.

(3) Il ya une fonction $\varepsilon(t)$, tendant vers zéro avec t, telle que, pour tout $t > 0$ et tout point x de $J_t \backslash \{a(t), b(t)\}$, il existe un arc K_x de diamètre inférieur à $\varepsilon(t)$ dans D tel que $E_t \cap K_x$ sépare $a(t)$ et $b(t)$ dans E_t.

(4) La fonction $t \to \pi_t$ de $]0, 1]$ dans $\mathscr{C}(E, D)$ est continue.

Supposant ces objets construits, prenons un pseudo-arc P_0 contenu dans E et contenant les deux points a et b. Définissons alors le chemin θ par

$\theta(0) = \overline{D}$,

$\theta(t) = \pi_t(P_0)$ pour $0 < t \leq 1$.

Pour tout $t > 0$, $\theta(t)$ est un pseudo-arc. La continuité de θ sur $]0, 1]$ résulte de (4). Puisque π_t envoie J sur J_t, il envoie les points a et b sur les points $a(t)$ et $b(t)$, donc $\theta(t)$ contient $a(t)$ et $b(t)$. Par suite, tout sous-ensemble de E_t qui sépare $a(t)$ et $b(t)$ dans E_t rencontre $\theta(t)$. La condition (3) entraîne alors que tout point de J_t est à une distance inférieure à $\varepsilon(t)$ de $\theta(t)$. Puisque $\theta(t) \subset D$, nous avons donc, par définition de la distance de Hausdorff,

$$\rho(\overline{D}, \theta(t)) \leq \rho(\overline{D}, J_t) + \varepsilon(t).$$

Les conditions (1) et (2) entraînent que $\rho(\overline{D}, J_t)$ tend vers zéro avec t; avec (3), cela entraîne la continuité de θ en 0.

Pour construire J_t, E_t et π_t, prenons un sous-ensemble dénombrable $Q = \{q_i\}_{i=1}^{\infty}$ de D dense dans D. Construisons les arcs $J_{1/n}$ par récurrence. Soit J_1 un segment horizontal d'extrémités $a(1)$ et $b(1)$. Supposons $J_{1/n}$ construit, d'extrémités $a(1/n) = a(1)$ et $b(1/n)$. Soit q_{i_n} le premier point de Q n'appartenant pas à $J_{1/n}$, et soit L_n un arc polygonal formé de segments parallèles à l'un des axes de coordonnées, d'extrémités $b(1/n)$ et q_{i_n}, tel que $L_n \cap J_{1/n} = \{b(1/n)\}$. Posons $J_{1/n+1} = J_{1/n} \cup L_n$ et $b(1/n+1) = q_{i_n}$. Les arcs $J_{1/n}$ étant ainsi définis, J_t sera, pour $\frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n}$, un sous-arc de $J_{1/(n+1)}$, d'extrémités $a(t) = a(1)$ et $b(t)$, où $b(t)$ parcourt de façon monotone l'arc L_n lorsque t varie de $\frac{1}{n}$ à $\frac{1}{n+1}$. La condition (1) est évidemment satisfaite, et (2) résulte du fait que $\bigcup_{t>0} J_t$ contient Q.

Pour $t > 0$, J_t est donc la réunion d'un nombre fini de segments parallèles à l'un des axes de coordonnées. Prenons pour E_t la réunioin d'un nombre fini de rectangles de côtés parallèles aux axes, un pour chacun des segments composant J_t, et chacun d'eux contenant le segment correspondant dans son intérieur. Nous supposons tous ces rectangles de la même largeur, laquelle tend vers zéro avec t et est suffisamment petite pour que deux tels rectangles ne se rencontrent que si les segments de J_t qu'ils entourent ont une extrémité commune; il est facile de voir que cela entraîne la condition (3). Qu'il soit possible, en faisant varier continuement les dimensions des rectangles, de choisir les homéomorphismes π_t de façon à vérifier la condition (4) est un exercice laborieux, mais géométriquement clair, que nous laissons au lecteur.

5.2. **Lemme.** *Il existe un homotopie* $\boldsymbol{\Theta} : \text{c. e.}^*(D) \times I \to \text{c. e.}^*(D)$ *vérifiant*

(i) $\boldsymbol{\Theta}_0 = \text{id}$,

(ii) $\boldsymbol{\Theta}_t(\text{c. e.}^*(D)) \subset P(D)$ *pour tout* $t > 0$.

Démonstration. Soient Φ et φ les fonctions construites au Lemme 3.2. Rappelons que, pour C dans $\text{c. e.}^*(D)$ et $0 < t \leq 1$, $\Phi(C, t) = \Sigma(C, \gamma(C, t))$

est un disque fermé contenant C et contenu dans D, et $\varphi(C, t)$ un point intérieur à $\Phi(C, t)$. De plus, posant

$$(1) \qquad \varepsilon(C, t) = t \cdot \min(\delta(C), d(C, S^2 \backslash D)),$$

Φ est construite de façon à vérifier

$$(2) \qquad \rho(C, \Phi(C, t)) < \varepsilon(C, t) \quad \text{quel que soit } (C, t) \text{ dans c.e.}^*(D) \times]0, 1].$$

Soit $H(C, t)$ l'intérieur de $\Phi(C, t)$, et soit $g(C, t)$ l'unique représentation conforme de D sur $H(C, t)$ telle que $g(C, t)(0) = \varphi(C, t)$ et $g'(C, t)(0) > 0$. La fonction $g : \text{c.e.}^*(D) \times]0, 1] \to \mathscr{C}(D, S^2)$ ainsi obtenue est continue. En effet, soit $\{(C_n, t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ une suite convergeant vers (C_0, t_0) dans $\text{c.e.}^*(D) \times]0, 1]$. D'après la continuité de φ, $\{\varphi(C_n, t_n)\}$ tend vers $\varphi(C_0, t_0)$; de plus, la fermeture de $S^2 \backslash \Phi(C, t)$ qui est $f_C(\overline{B}(\gamma(C, t)))$, dépend continuement de $\Phi(C, t)$, donc si $\eta = \frac{1}{2} d(\varphi(C_0, t_0), S^2 \backslash \Phi(C_0, t_0))$, le disque $B(\varphi(C_0, t_0), \eta)$ est contenu dans $\Phi(C_n, t_n)$, donc dans $H(C_n, t_n)$, pour n assez grand. Donc, pour montrer que $\{g(C_n, t_n)\}$ tend vers $g(C_0, t_0)$, il suffit, d'après le Lemme 2.1, de vérifier que $\{H(C_n, t_n)\}$ converge vers $H(C_0, t_0)$ au sense de Carathéodory (relativement à $\varphi(C_0, t_0)$). Mais cela résulte du Lemme 2.2 et de la continuité de la fermeture de $S^2 \backslash \Phi(C, t)$.

Pour (C, t) dans $\text{c.e.}^*(D) \times]0, 1]$, soit $\beta(C, t)$ la borne inférieure des nombres $0 < s < 1$ vérifiant

$$(3) \qquad \rho(\Phi(C, t), g(C, t)(\overline{B}(s))) < \varepsilon(C, t).$$

Puisque l'intérieur $H(C, t)$ de $\Phi(C, t)$ est réunion des disques $g(C, t)(\overline{B}(s))$ avec $0 < s < 1$ et que $\overline{B}(s) \subset \overline{B}(s')$ si $s < s'$, nous avons $\beta(C, t) < 1$ et tout nombre s vérifiant $\beta(C, t) < s < 1$ satisfait la condition (3). De plus, la continuité des fonctions Φ, g et ε garantit que β est s.c.s. sur $\text{c.e.}^*(D) \times]0, 1]$. Nous pouvons donc trouver [3, Théorème 4.3, p. 171] une fonction continue $u : \text{c.e.}^*(D) \times]0, 1] \to I$ vérifiant

$$(4) \qquad \beta(C, t) < u(C, t) < 1 \quad \forall (C, t) \in \text{c.e.}^*(D) \times]0, 1].$$

Posons alors, pour (C, t) dans $\text{c.e.}^*(D) \times]0, 1]$,

$$\Phi^2(C, t) = g(C, t)(\overline{B}(u(C, t))).$$

Compte-tenu de ce qui précède, il résulte de (3) et (4) que

$$(5) \qquad \rho(\Phi(C, t), \Phi^2(C, t)) < \varepsilon(C, t).$$

Soit $\theta : [0, 1] \to C(\overline{D})$ le chemin du Lemme 5.1. Pour (C, t) dans $\text{c.e.}^*(D) \times]0, 1]$, soit $r(C, t)$ l'homéomorphisme radial de $\overline{D}$ sur $\overline{B}(u(C, t))$ défini par $r(C, t)(z) = u(C, t) \cdot z (z \in \overline{D})$; $r(C, t)$ dépend continuement de (C, t). Soit $\xi(C, t)$ la borne supérieure de l'ensemble des $s \in [0, 1]$ vérifiant

$$(6) \qquad \rho(\Phi^2(C, t), g(C, t) \circ r(C, t)(\theta(s'))) < \varepsilon(C, t) \quad \text{pour tout } s' \leq s.$$

Puisque $\theta(0) = \overline{D}$, $g(C, t) \circ r(C, t)(\theta(0)) = \Phi^2(C, t)$; la continuité de θ entraîne que $\xi(C, t) > 0$. De plus, la continuité des fonctions Φ^2, g, r, θ et ε entraîne que ξ est s.c.i. Nous pouvons donc trouver une fonction continue $v : \text{c.e.}^*(D) \times]0, 1] \to I$ vérifiant

$$(7) \qquad 0 < v(C, t) < \xi(C, t) \quad \forall (C, t) \in \text{c.e.}^*(D) \times]0, 1].$$

Nous pouvons maintenant définir Θ comme suit
$\Theta(C, 0) = C$,
$\Theta(C, t) = g(C, t) \circ r(C, t)(\theta(v(C, t)))$ pour $t > 0$.

Pour $t > 0$, $\Theta(C, t)$ est contenu dans $\Phi^2(C, t) \subset H(C, t) \subset D$ et, puisque $v(C, t) > 0$, $\Theta(C, t)$ est un pseudo-arc. Par suite, Θ envoie $\mathrm{c.e.}^*(D) \times I$ dans $\mathrm{c.e.}^*(D)$ et vérifie les conditions (i) et (ii). La continuité de Θ aux points de $\mathrm{c.e.}^*(D) \times]0, 1]$ résulte de la continuité des fonctions g, r, θ et v. D'autre part, il résulte de (6) et (7) que, pour (C, t) dans $\mathrm{c.e.}^*(D) \times]0, 1]$, nous avons

$$\rho(\Phi^2(C, t), \Theta(C, t)) < \varepsilon(C, t). \tag{8}$$

Combiné avec les relations (2), (5), (8) et (1), cela entraîne

$$\rho(C, \Theta(C, t)) < 3\varepsilon(C, t) \leq 3t\delta(S^2) \quad \text{pour } t > 0.$$

La continuité de Φ aux points de $\mathrm{c.e.}^*(D) \times \{0\}$ en résulte, d'où le lemme.

6. $P(D)$ EST UNE l^2-VARIÉTÉ

Introduisons, pour des raisons techniques, un nouveau sous-ensemble de $\mathrm{c.e.}^*(S^2)$. Soit $\mathrm{c.e.}_v(S^2)$ le sous-ensemble de $\mathrm{c.e.}(S^2)$ formé des continus nondégénérés dont l'intérieur est vide, et soit $\mathrm{c.e.}_v(D) = \mathrm{c.e.}_v(S^2) \cap \mathrm{c.e.}(D)$.

6.1. **Lemme.** $\mathrm{c.e.}(S^2)$ *et* $\mathrm{c.e.}_v(S^2)$ *sont topologiquement complets.*

Démonstration. Puisque $C(S^2)$ est compact, il suffit de montrer que $\mathrm{c.e.}(S^2)$ et $\mathrm{c.e.}_v(S^2)$ sont des G_δ dans $C(S^2)$. Soit P un sous-ensemble dénombrable partout dense de S^2. Un élément de $C(S^2)$ n'appartient pas à $\mathrm{c.e.}(S^2)$ si, et seulement si, il sépare S^2, donc sépare au moins deux points de P dans S^2. Pour p et q des points distincts de P, notons $E_{p,q}$ l'ensemble des éléments de $C(S^2)$ qui ne séparent pas p et q. Alors, $\mathrm{c.e.}(S^2)$ est l'intersection de la famille dénombrable des $E_{p,q}$ $(p \neq q)$. Mais $E_{p,q}$ est la réunion de l'ensemble $F_{p,q}$ formé des continus contenant au moins un des points p et q et de l'ensemble $G_{p,q}$ formé des continus C pour lesquels il existe un arc disjoint de C reliant p à q. Puisque $F_{p,q}$ est fermé et $G_{p,q}$ ouvert, $E_{p,q}$ est un G_δ quels que soient p et q, donc $\mathrm{c.e.}(S^2)$ en est un aussi.

Soit $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ une base dénombrable de S^2. L'ensemble H_n formé des continus contenant U_n est fermé dans S^2. Un continu a un intérieur non vide si, et seulement si, il contient l'un des U_n, $n \geq 1$, donc $\mathrm{c.e.}_v(S^2) = \mathrm{c.e.}(S^2) \backslash (F_1(S^2) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n))$, ce qui montre que $\mathrm{c.e.}_v(S^2)$ est aussi un G_δ dans $C(S^2)$.

Définissons une fonction $\Pi : \mathrm{c.e.}_v(D) \times]0, 1] \to C(S^2)$ par

$$\Pi(C, t) = f_C(S(t)) \quad \text{si } 0 < t < 1,$$
$$\Pi(C, 1) = C.$$

6.2. **Lemme.** *La fonction* Π *est continue.*

Démonstration. La continuité de Π en un point de $\mathrm{c.e.}_v(D) \times]0, 1[$ résulte de la continuité de F.

Fixons un élément C de $\mathrm{c.e.}_v(D)$ et un $\varepsilon > 0$. Soient $y_1, \dots, y_n$ des points de C tels que les boules $B_i = B(y_i, \varepsilon/4)$, $1 \leq i \leq n$, recouvrent C. Soit N

un sous-ensemble compact connexe de $S^2\backslash C$ contenant $S^2\backslash D$ et l'ensemble des points x de S^2 vérifiant $d(x, C) \geq \varepsilon/2$; il ya un t_0 tel que $f_C(B(t_0))$ contienne N. Puisque C a un intérieur vide, $B_i\backslash C \neq \varnothing$, $i = 1, \ldots, n$; fixons un point a_i de $B_i\backslash C$. Soient $z_i = f_C^{-1}(a_i)$ et $t_i = |z_i|$. La continuité de F permet de trouver un $\eta < \frac{\varepsilon}{2}$ tel que $\rho(C, C') < \eta$ entraîne

(1) $f_{C'}(S(t_0)) \subset S^2\backslash N$,
(2) $C' \subset \bigcup_{i=1}^n B_i$,
(3) $f_{C'}(z_i) \in B_i$.

Soient C' avec $\rho(C', C) < \eta$ et $t \geq \max(t_0, t_1, \ldots, t_n)$. D'après (1) et la connexité de N, l'ensemble N est contenu dans $f_{C'}(B(t_0))$, donc, pour tout z dans $S(t)$, nous avons

$$d(f_{C'}(z), C') \leq d(f_{C'}(z), C) + \rho(C, C') < \frac{\varepsilon}{2} + \eta < \varepsilon.$$

Soit y un point de C'; d'après (2), il y a un indice i tel que B_i contienne y. D'après (3), B_i contient $a_i' = f_{C'}(z_i)$, donc aussi un arc J_i irréductible entre a_i' et $C' \cap B_i$. L'ensemble $K_i = f_{C'}^{-1}(J_i\backslash C')$ est connexe, contient z_i, et sa fermeture rencontre le bord de D; K_i rencontre donc tous les $S(s)$ avec $s \geq |z_i| = t_i$. Il y a donc un point de $f_{C'}(S(t))$ dans B_i, d'où $d(y, f_{C'}(S(t)) < \varepsilon/2)$. Par suite, d'après la définition de la distance de Hausdorff, nous avons

$$\rho(C', f_{C'}(S(t))) < \varepsilon \quad \text{si } \rho(C, C') < \eta \text{ et } t \geq \max(t_0, t_1, \ldots, t_n),$$

d'où la continuité de Π au point $(C, 1)$.

6.3. **Lemme.** *$P(D)$ et $\mathrm{c.e.}_v(D)$ sont des l^2-variétés.*

Démonstration. Il est connu [0, Théorème 2] que $P(S^2)$ est topologiquement complet, donc aussi son ouvert $P(D)$; $\mathrm{c.e.}_v(D)$, étant ouvert dans $\mathrm{c.e.}_v(S^2)$, est aussi topologiquement complet. D'après les Lemmes 1.3, 4.1 et 5.2, tout sous-ensemble de $\mathrm{c.e.}^*(D)$ qui contient $P(D)$ est un rétracte absolu de voisinage; en particulier, $\mathrm{c.e.}_v(D)$ et $P(D)$ sont des rétractes absolus de voisinage. La restriction Θ' de l'homotopie Θ du Lemme 5.2 à $\mathrm{c.e.}_v(D)$ vérifie (i) $\Theta_0' = \mathrm{id}$ et (ii) $\Theta_t'(\mathrm{c.e.}_v(D)) \subset P(D)$ pour $t > 0$; d'après le Lemme 1.3 (b), il suffit donc de démontrer que $\mathrm{c.e.}_v(D)$ est une l^2-variété.

Compte-tenu de ce qui précède et du Lemme 1.2, il ne reste plus qu'à vérifier que si ε: $\mathrm{c.e.}_v(D) \to]0, \infty[$ et g: $\bigoplus_{n=1}^\infty I^n \to \mathrm{c.e.}_v(D)$ sont des fonctions continues, il existe une fonction continue $k : \bigoplus_{n=1}^\infty I^n \to \mathrm{c.e.}_v(D)$ vérifiant

(i) la famille $\{k(I^n)\}_{n=1}^\infty$ est discrète dans $\mathrm{c.e.}_v(D)$,
(ii) $\rho(g(x), k(x)) < \varepsilon(g(x))$ pour tout x dans $\bigoplus_{n=1}^\infty I^n$.

Nous pouvons supposer que ε vérifie

$$(1) \qquad 0 < \varepsilon(C) < \min(\delta(C), d(C, S^2\backslash D)) \quad \forall C \in \mathrm{c.e.}_v(D).$$

Pour C dans $\mathrm{c.e.}_v(D)$, soit $\alpha(C)$ la borne inférieure des $t < 1$ vérifiant

$$(2) \qquad \rho(f_C(S(s)), C) < \tfrac{1}{2}\varepsilon(C) \quad \text{pour tout } s \in [t, 1[.$$

La continuité de la fonction Π garantit que $\alpha(C) < 1$ pour tout C dans $\mathrm{c.e.}_v(D)$ et que la fonction α est s.c.s. ((2) équivaut à $\rho(\Pi(C, s), C) < \frac{1}{2}\varepsilon(C)$ pour $s \in [t, 1]$). Nous pouvons donc trouver une fonction continue u : $\mathrm{c.e.}_v(D) \to I$ vérifiant

$$(3) \qquad \alpha(C) < u(C) < 1 \quad \forall C \in \mathrm{c.e.}_v(D),$$

d'où en particulier,

(4) $$\rho(f_C(S(u(C))), C) < \tfrac{1}{2}\varepsilon(C) \quad \forall C \in \text{c.e.}_v(D).$$

Le plan $\mathbf{R}^2$ étant muni de coordonnées polaires (r, θ), posons, pour C dans $\text{c.e.}_v(D)$,

$$M_n(C) = \{(r, \tfrac{1}{n})/u(C) \leq r \leq \tfrac{1}{2}(1+u(C))\},$$
$$M_0(C) = \{(r, 0)/u(C) \leq r \leq \tfrac{1}{2}(1+u(C))\}.$$

Pour C dans $\text{c.e.}_v(D)$ et $\pi \leq \xi \leq 2\pi$, posons

$$R(C, \xi) = \{(r, \theta)/r = u(C) \text{ et } 0 \leq \theta \leq \xi\} \qquad (\subset S(u(C))).$$

Il est clair que $M_n(C)$ dépend continuement de C et que $R(C, \xi)$ dépend continuement de C et de ξ.

Pour C dans $\text{c.e.}_v(D)$ et $n \geq 1$, soit $\beta_n(C)$ la borne inférieure des nombres $\theta \geq \pi$ vérifiant

(5) $$\rho(f_C(R(C, \xi)), f_C(S(u(C)))) < \min(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{2}\varepsilon(C)) \quad \forall \xi \in [\theta, 2\pi].$$

Il est clair que $\beta_n(C) < 2\pi$, et la continuité des fonctions F, $R(C, \xi)$ et u entraîne que β_n est s.c.s. sur $\text{c.e.}_v(D)$. Nous pouvons donc trouver des fonctions continues $\xi_n : \text{c.e.}_v(D) \to [\pi, 2\pi]$ vérifiant

(6) $$\beta_n(C) < \xi_n(C) < 2\pi \quad \text{pour tout } C \text{ dans } \text{c.e.}_v(D) \qquad (n \geq 1).$$

En particulier,

(7) $$\rho(f_C(R(C, \xi_n(C))), f_C(S(u(C)))) < \min(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{2}\varepsilon(C)).$$

Pour C dans $\text{c.e.}_v(D)$ et $n \geq 1$, posons

$$X_n(C) = R(C, \xi_n(C)) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} M_i(C)\right).$$

Il est clair que $X_n(C)$ dépend continuement de C.

Nous pouvons maintenant définir la fonction k. Dans sa formule, nous poserons, pour x dans $\bigoplus_{n=1}^{\infty} I^n$, $C = g(x)$. Posons

$$k(x) = f_C(X_n(C)) \quad \text{si } x \in I^n, \ n \geq 1.$$

Il est clair que $k(x)$ est un élément de $\text{c.e.}_v(S^2)$, et la continuité de k résulte de la continuité des fonctions F et X_n. Montrons que la condition (ii) est vérifiée. Par construction, $X_n(C)$ est contenu dans la réunion des $S(t)$ avec $t \geq u(C)$, donc il résulte de (2) et (3) que

(8) $$d(y, C) < \tfrac{1}{2}\varepsilon(C), \quad \forall y \in f_C(X_n(C)).$$

Il résulte de (4) et (7) que $\rho(C, f_C(R(C, \xi_n(C)))) < \varepsilon(C)$; puisque $R(C, \xi_n(C)) \subset X_n(C)$, nous avons donc, pour tout y dans C,

(9) $$\begin{aligned} d(y, f_C(X_n(C))) &\leq d(y, f_C(R(C, \xi_n(C)))) \\ &\leq \rho(C, f_C(R(C, \xi_n(C)))) < \varepsilon(C). \end{aligned}$$

Par définition de la distance de Hausdorff, il résulte de (8) et (9) avec $C = g(x)$ que

(10) $$\rho(g(x), k(x)) < \varepsilon(g(x)) \quad \forall x \in \bigoplus_{n=1}^{\infty} I^n,$$

ce qui prouve la condition (ii) et, compte-tenu de (1), montre que $k(x)$ est contenu dans D.

Il est clair que, quels que soient les ensembles C et C' dans $\text{c.e.}_v(D)$, $X_n(C)$ et $X_m(C')$ sont homéomorphes si, et seulement si, $n = m$. Puisque $f_C(X_n(C))$ est homéomorphe à $X_n(C)$, il en résulte que si x appartient à I^n et x' à I^m avec $n \neq m$, les ensembles $k(x)$ et $k(x')$ ne sont pas homéomorphes. Par suite, les ensembles $\{k(I^n)\}_{n=1}^{\infty}$ sont des compacts deux à deux disjoints, donc, si la condition (i) n'est pas vérifiée, nous pouvons trouver une suite strictement croissante $\{n_l\}_{l=1}^{\infty}$ d'entiers et, pour $l \geq 1$, un point x_l de I^{n_l}, de façon que la suite $\{k(x_l)\}$ converge vers un élément C de $\text{c.e.}_v(D)$. Pour $l \geq 1$, posons $C_l = g(x_l)$, $f_l = f_{C_l}$ et $u_l = u(C_l)$. Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que $\{C_l\}_{l=1}^{\infty}$ converge vers un sous-continu C_0 de S^2. Distinguons quatre cas.

Cas 1. C_0 rencontre $S^2 \backslash D$ ou C_0 est réduit à un point. Alors, d'après (1), $\{\varepsilon(C_l)\}$ tend vers zéro, donc $\rho(g(x_l), k(x_l))$ tend vers zéro. Les limites C et C_0 des suites $\{k(x_l)\}$ et $\{g(x_l)\}$ sont donc égales, ce qui est impossible puisque C appartient à $\text{c.e.}_v(D)$, mais pas C_0.

Cas 2. C_0 appartient à $\text{c.e.}_v(D)$. Alors $\{f_l\}$ converge uniformément sur tout compact vers $f_0 = f_{C_0}$, $\{u_l\}$ converge vers $u(C_0)$, donc, pour chaque i fixé, $\{M_i(C_l)\}$ converge vers $M_i(C_0)$. En utilisant (7), il est alors facile de voir que $f_l(X_{n_l}(C_l)) = k(x_l)$ converge vers $f_0(X_\infty)$, où

$$X_\infty = S(u(C_0)) \cup \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} M_i(C_0) \right).$$

Mais ceci est impossible car $f_0(X_\infty)$ sépare S^2.

Cas 3. C_0 appartient à $\text{c.e.}^*(D) \backslash \text{c.e.}_v(D)$. Alors, l'intérieur de C_0 n'est pas vide, donc C ne contient pas C_0. Soit y un point de $C_0 \backslash C$. Nous pouvons trouver, pour tout $l \geq 1$, un élément y_l de C_l de façon que la suite $\{y_l\}$ converge vers y. Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que la suite $\{f_l(S(u_l))\}$ converge vers un sous-continu C' de S^2. D'apres (7), $\{f_l(R(C_l, \xi_{n_l}(C_l)))\}$ converge aussi vers C', donc C' est contenu dans C et $y \notin C'$. Mais, pour tout l, la courbe simple fermée $f_l(S(u_l))$ sépare y_l de $S^2 \backslash D$, donc C' sépare y de $S^2 \backslash D$. A fortiori, C sépare aussi y de $S^2 \backslash D$, ce qui est impossible.

Cas 4. C_0 est contenu dans D, mais sépare S^2. Soit K la réunion de C_0 et des composantes de $S^2 \backslash C_0$ qui ne contiennent pas $S^2 \backslash D$. L'intérieur de K n'est pas vide, donc C ne contient pas K; C ne peut donc contenir C_0, sans quoi il séparerait S^2. Mais alors, l'argument du cas précédent peut être répété pour obtenir la contradiction cherchée.

Ceci achève de montrer que k possède la propriété (i), d'où le lemme.

7. Démonstration du Théorème 1.1

Si le bord de M est vide, tout élément K de $P(M)$ a, dans M, un voisinage E homéomorphe à D; $P(E)$ est alors un voisinage de K dans $P(M)$ homéomorphe à $P(D)$. D'après le Lemme 6.3, $P(M)$ est donc une l^2-variété. Puisque les l^2-variétés sont déterminées par leur type d'homotopie [4], le lemme suivant achèvera la démonstration dans le cas où le bord de M est vide.

7.1. **Lemme.** *Si le bord de M est vide, les inclusions $M \hookrightarrow$ c. e.(M) et $P(M) \hookrightarrow$ c. e.(M) sont des équivalences homotopiques.*

Démonstration. Nous pouvons supposer M connexe. Distinguons trois cas.

Cas 1. $M = D$. D'après les Lemmes 3.3 et 5.2, c. e.(D), c. e.$^*(D)$ et $P(D)$ ont le même type d'homotopie. D est contractile, une contraction particulière étant donnée par $h(z, t) = (1 - t) \cdot z$. Puisque, pour $t \neq 1$; h_t est un plongement, h induit une contraction H de c. e.(D). Les espaces c. e.(D) et $P(D)$ sont donc contractiles, d'où le résultat dans ce cas.

Pour traiter les deux autres cas, nous avons besoin d'un résultat auxiliaire. Si $\mathscr{U} = \{\bigcup_\alpha / \alpha \in A\}$ est un recouvrement ouvert d'un espace X et si σ est un sous-ensemble fini de A, nous poserons $\bigcup_\sigma = \bigcap_{\alpha \in \sigma} \bigcup_\alpha$.

7.2. **Lemme.** *Soient X, Y deux rétractes absolus de voisinage, $\mathscr{U} = \{\bigcup_\alpha / \alpha \in A\}$ et $\mathscr{V} = \{\bigvee_\alpha / \alpha \in A\}$ deux recouvrements ouverts de X et Y resp. indexés par le même ensemble d'indices. Soit f une fonction continue de X dans Y telle que $f(\bigcup_\alpha) \subset \bigvee_\alpha$ pour tout α. Si, pour tout sous-ensemble fini σ de A, $f | \bigcup_\sigma$ est une équivalence homotopique de $\bigcup_\sigma$ dans $\bigvee_\sigma$, alors f est une équivalence homotopique.*

Puisqu'une fonction continue entre rétractes absolus de voisinage est une équivalence homotopique si, et seulement si, c'est un équivalence homotopique faible, ceci est un cas particulier du Théorème 5(b) de [1].

Suite de la démonstration du Lemme 7.1: *Cas* 2: $M \neq S^2$. M étant triangulable, supposons la munie d'une triangulation T. Un compact K contenu dans M est dit polyédrique s'il existe une subdivision T' de T telle que K soit un sous-complexe de T'. Soit $\{D_\alpha / \alpha \in A\}$ l'ensemble des disques fermés polyédriques contenus dans M. Alors, $\mathscr{U} = \{\mathring{D}_\alpha / \alpha \in A\}$ est un recouvrement ouvert de M, $\mathscr{V} = \{$c. e.$(\mathring{D}_\alpha) / \alpha \in A\}$ un recouvrement ouvert de c. e.(M) et $\mathscr{U}' = \{P(\mathring{D}_\alpha) / \alpha \in A\}$ un recouvrement ouvert de $P(M)$. Les espaces c. e.(M) et $P(M)$, étant localement homéomorphes à c. e.(D) et $P(D)$ resp. sont des rétractes absolus de voisinage. Nous allons montrer que les recouvrements ouverts $\mathscr{U}$ (resp. $\mathscr{U}'$) et $\mathscr{V}$ et l'inclusion f (resp. f') de M (resp. $P(M)$) dans c. e.(M) vérifient les hypothèses du Lemme 7.2. Pour cela, il suffit de vérifier que, si $D_1, \ldots, D_n$ sont des disques fermés polyédriques dont les intérieurs ont une intersection non vide, il existe des disques polyédriques $E_1, \ldots E_m$ dont *les intérieurs* sont deux à deux disjoints tels que $\mathring{D}_1 \cap \cdots \cap \mathring{D}_n = \mathring{E}_1 \cup \cdots \mathring{E}_m$, car alors $\bigcap_{i=1}^n$ c. e.$(\mathring{D}_i)$ (resp. $\bigcap_{i=1}^n P(\mathring{D}_i)$) est la réunion disjoint des ensembles c. e.$(\mathring{E}_j)$ (resp. $P(\mathring{E}_j)$), $1 \leq j \leq m$, et le premier cas implique que la restriction de f (resp. f') à $\mathring{D}_1 \cap \cdots \cap \mathring{D}_n$ (resp. $P(\mathring{D}_1) \cap \cdots \cap P(\mathring{D}_n)$) est une équivalence homotopique.

Si $\mathring{D}_1 \cap \cdots \cap \mathring{D}_n$ est la réunion disjointe des $\mathring{E}_j$, $1 \leq j \leq m$, alors $\mathring{D}_1 \cap \cdots \cap \mathring{D}_{n+1}$ est la réunion disjoint des $\mathring{E}_j \cap \mathring{D}_{n+1}$, $1 \leq j \leq m$, donc il suffit de traiter le cas $n = 2$. Si l'un des disques D_1 ou D_2 est contenu dans l'autre, le résultat est évident. Sinon, puisque $\mathring{D}_1 \cap \mathring{D}_2 \neq \varnothing$, le bord ∂D_2 de D_2 rencontre $\mathring{D}_1$. Puisque D_1 et D_2 sont polyédriques, $\partial D_2 \cap \mathring{D}_1$ a un nombre fini de composantes $J_1, \ldots, J_k$; nous procéderons par récurrence sur k.

Si $k = 1$, $\overline{J}_1$ est un arc, car sinon $\overline{J}_1 = \partial D_2$ et, puisque M n'est pas une sphère, D_2 est contenu dans D_1. L'arc $\overline{J}_1$ divise D_1 en deux disques polyédriques D_1' et D_1'' dont l'un, soit D_1', est contenu dans D_2, tandis que l'autre a son intérieur disjoint de D_2, d'où $\mathring{D}_1 \cap \mathring{D}_2 = \mathring{D}_1'$. Si $k > 1$, $\overline{J}_1$ est un arc qui divise D_1 en deux disques polyédriques D_1' et D_1''. Alors $\partial D_2 \cap \mathring{D}_1'$ (resp. $\partial D_2 \cap \mathring{D}_1''$) est réunion de certaines des composantes $J_2, \dots, J_k$ de $\partial D_2 \cap \mathring{D}_1$; par récurrence, il y a des disques polyédriques $E_1, \dots, E_m$ (resp. $E_{m+1}, \dots, E_q$) tels que $\mathring{D}_1' \cap \mathring{D}_2$ (resp. $\mathring{D}_1'' \cap \mathring{D}_2$) soit la réunion disjointe de $\mathring{E}_1, \dots, \mathring{E}_m$ (resp. $\mathring{E}_{m+1}, \dots, \mathring{E}_q$). Puisqu'aucun point de J_1 n'est dans $\mathring{D}_1 \cap \mathring{D}_2$, cet ensemble est la réunion disjointe de $\mathring{E}_1, \dots, \mathring{E}_m, \mathring{E}_{m+1}, \dots, \mathring{E}_q$.

Cas 3. $M = S^2$. Soit $\mathscr{U} = \{\bigcup_\alpha / \alpha \in A\}$ l'ensemble des ouverts non vides de S^2 distincts de S^2. Soient $\mathscr{V} = \{\text{c.e.}(\bigcup_\alpha)/\alpha \in A\}$ et $\mathscr{U}' = \{P(\bigcup_\alpha)/\alpha \in A\}$. L'intersection de toute famille finie d'éléments de $\mathscr{U}$ est un élément de $\mathscr{U}$ et, d'après le deuxième cas, les inclusions $\bigcup_\alpha \hookrightarrow \text{c.e.}(\bigcup_\alpha)$ et $P(\bigcup_\alpha) \hookrightarrow \text{c.e.}(\bigcup_\alpha)$ sont des équivalences homotopiques. Le Lemme 7.2 est donc encore applicable.

Passons au cas où le bord ∂M de M n'est pas vide; soit $\mathring{M}$ l'intérieur de M.

7.3. **Lemme.** *Si le bord de M n'est pas vide, il y a une homotopie $H : P(M) \times I \to P(M)$ vérifiant*

(i) $H_0 = \text{id}$,

(ii) $H_t(P(M)) \subset P(\mathring{M})$ *pour tout* $t > 0$,

(iii) H *est fermée au-dessus de* $P(M) \backslash P(\mathring{M})$.

Démonstration. Soit $c : \partial M \times [0, 2] \to M$ un collier sur le bord de M avec $c(x, 0) = x$ pour tout x dans ∂M. Pour simplifier les notations, nous identifierons l'image de c à $\partial M \times [0, 2]$. Pour $0 \le t \le 1$, soit h_t la fonction de M dans M qui est l'identité hors de $\partial M \times [0, 2]$ et envoie chaque segment $\{x\} \times [0, 2]$ $(x \in \partial M)$ linéairement sur $\{x\} \times [t, 2]$. Puisque h_t est un homéomorphisme de M sur $h_t(M)$, l'homotopie h induit une homotopie $H: P(M) \times I \to P(M)$. Il est clair que les conditions (i) et (ii) sont vérifiées.

Si la condition (iii) n'est pas vérifiée, nous pouvons trouver un C dans $P(M) \backslash P(\mathring{M})$, un voisinage U de $(C, 0)$ dans $P(M) \times I$ et une suite $\{(C_n, t_n)\}$ d'éléments de $P(M) \times I$ tels que $\{H(C_n, t_n)\}$ tende vers C, mais qu'aucun des (C_n, t_n) n'appartienne à U. Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que la suite $\{t_n\}$ converge vers t_0.

Si $t_0 > 0$, $H(C_n, t_n)$ est contenu dans $M \backslash \partial M \times [0, \frac{1}{2} t_0]$ pour n assez grand, donc C ne peut rencontrer ∂M, ce qui est absurde.

Si $t_0 = 0$, soit g_t l'application de M sur M définie par $g_t(x) = h_t^{-1}(x)$ si x appartient à $h_t(M)$ et $g_t(y, s) = y$ pour (y, s) dans $\partial M \times [0, t]$. Alors, quand t tend vers 0, g_t converge, uniformément sur tout compact, vers l'identité, donc $\{g_{t_n}(H(C_n, t_n))\}$ tend vers C. Mais $g_{t_n}(H(C_n, t_n)) = h_{t_n}^{-1} h_{t_n}(C_n) = C_n$, donc $\{(C_n, t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers $(C, 0)$ contrairement à notre hypothèse.

D'après les Lemmes 1.3(c) et 7.3, $P(M)$ est donc une l^2-variété qui a le type d'homotopie de $P(\mathring{M})$, donc lui est homéomorphe. Elle est donc homéomorphe à $\mathring{M} \times l^2$ d'après ce que nous avons déjà vu. Mais $\mathring{M}$ et M ont le même type d'homotopie, donc $\mathring{M} \times l^2$ est homéomorphe à $M \times l^2$, d'où le résultat quand ∂M n'est pas vide.

BIBLIOGRAPHIE

0. R. H. Bing, *Concerning hereditarily indecomposable continua*, Pacific J. Math. **1** (1951), 43–51.
1. T. tom Dieck, *Partitions of unity in homotopy theory*, Compositio Math. **23** (1971), 159–167.
2. C. H. Dowker, *Homotopy extension theorems*, Proc. London Math. Soc. (3) **6** (1956), 100–116.
3. J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, Mass., 1966.
4. D. W. Henderson and R. M. Schori, *Topological classification of infinite dimensional manifolds by homotopy type*, Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970), 121–124.
5. S. T. Hu, *Theory of retracts*, Wayne State Univ. Press, Detroit, Mich., 1965.
6. R. Luke and W. K. Mason, *The space of homeomorphisms on a compact two-manifold is an absolute neighborhood retract*, Trans. Amer. Math. Soc. **164** (1972), 275–285.
7. A. I. Markushevich, *Theory of functions of a complex variable*, vol. III, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1967.
8. S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of sets*, Dekker, New York and Basel, 1978.
9. H. Toruńczyk, *Characterizing Hilbert space topology*, Fund. Math. **111** (1981), 247–262.
10. ——, *A correction of two papers concerning Hilbert manifolds*, Fund. Math. **125** (1985), 89–93.
11. G. T. Whyburn, *Analytic topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 28, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1942; 3rd printing 1986.

UNIVERSITÉ PARIS VI, U.F.R. DE MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, 4, PLACE JUSSIEU, 75252-PARIS CEDEX 05, FRANCE