TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 347, Number 6, June 1995

DUALITÉ DANS LE GROUPE DE GROTHENDIECK DE LA CATÉGORIE DES REPRÉSENTATIONS LISSES DE LONGUEUR FINIE D'UN GROUPE RÉDUCTIF p-ADIQUE

ANNE-MARIE AUBERT

ABSTRACT. We define an involution on the Grothendieck ring of the category of finite length smooth representations of a p-adic algebraic group, which is a direct analogue Curtis-Alvis duality for finite groups of Lie type. This involution commutes with taking the contragredient, with parabolic induction and, up a few twists, with truncation. It also preserves the irreducible representations up to sign.

0. INTRODUCTION

Soit $\mathbb{F}$ un corps local non archimédien et soit G le groupe des $\mathbb{F}$-points d'un groupe algébrique réductif connexe défini sur $\mathbb{F}$. Dans cet article, nous montrons que la formule analogue à la dualité de Curtis-Alvis pour les caractères des groupes réductifs finis (cf. [Cu]) définit une involution D_G du groupe de Grothendieck $\mathscr{R}(G)$ de la catégorie des représentations lisses de longueur finie de G (cf. déf. 2.5 et th. 2.7).

Dans un travail récent (cf. [K]), S.-I. Kato a étudié cette involution pour G déployé et pour des représentations irréductibles ayant un vecteur fixe sous un sous-groupe d'Iwahori. Il a montré que $\pm D_G$ est, au niveau des algèbres de Hecke-Iwahori, induite par une version tordue de l'involution d'Iwahori-Matsumoto, et donc, en particulier, préserve les représentations irréductibles.

Kato a mentionné la définition de D_G dans le cas général (cf. [K, Rem. p. 946]) et conjecturé que c'est bien une involution et qu'elle préserve les représentations irréductibles, à torsion par un signe près. En utilisant l'analogue pour les groupes réductifs p-adiques du complexe considéré par P. Deligne et G. Lusztig dans [DL] pour les groupes réductifs finis, nous définissons une application au niveau des modules qui préserve les représentations irréductibles et qui correspond dans le groupe de Grothendieck $\mathscr{R}(G)$ à $\pm D_G$.

Lorsque G est le groupe linéaire $\mathbf{GL}_n(\mathbb{F})$, on connaissait déjà une involution de $\mathscr{R}(G)$, celle construite par A.V. Zelevinski sur les segments (cf. [Z, §9.12]). Notre involution coïncide avec celle de Zelevinski, à torsion par un signe près (cf. th. 3.3).

Received by the editors January 10, 1994; originally communicated to the *Proceedings of the AMS* by Ronald M. Solomon.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 20G40, 22E50.

Key words and phrases. Reductive algebraic groups over finite and p-adic fields, Coxeter groups, representations.

A l'aide des équivalences de catégories obtenues par C. Bushnell et P. Kutzko (cf. [BK]), K. Procter (cf. [P]) a récemment démontré que l'involution de Zelevinski préserve les représentations irréductibles; nous retrouvons ici ce résultat.

J. Bernstein d'une part, P. Schneider et U. Stuhler d'autre part, ont annoncé la construction d'une involution sur les représentations lisses irréductibles d'un groupe réductif p-adique; leurs procédés de construction généralisent eux aussi l'involution de Zelevinski (séminaire "Groupes réductifs et formes automorphes" 1992). G. Lusztig a aussi considéré une telle involution (communication personnelle).

Je remercie vivement le referee pour ses nombreuses remarques et indications de preuves, qui m'ont permis d'améliorer et de compléter la version précédente de cet article.

1. Définition et propriétés de la dualité

Fixons un $\mathbb{F}$-sous-groupe parabolique minimal P_0 de G et un $\mathbb{F}$-tore maximalement déployé T_0 contenu dans P_0.

Soient $W := N_G(T_0)/T_0$ le groupe de Weyl de G et Φ l'ensemble de racines (réduites) de G relatifs à T_0. Le choix de P_0 détermine une base S de Φ ainsi qu'un ensemble de racines positives dans Φ. Si $I \subset S$, nous notons P_I le $\mathbb{F}$-sous-groupe parabolique standard de G déterminé par I et L_I le sous-groupe de Levi standard de P_I. Nous notons W_I le groupe $N_{L_I}(T_0)/T_0$.

Si $I \subset S$ et $w \in W$, nous posons ${}^wL_I := wL_Iw^{-1}$, $L_I^w := w^{-1}L_Iw$. Soit Φ^+ le sous-ensemble de Φ formé des racines positives. Si $I \subset S$, $J \subset S$ et $w \in W$, nous posons

$$\mathscr{D}(I, J) := \{w \in W \mid w^{-1}(I) \subset \Phi^+ \quad \text{et} \quad w(J) \subset \Phi^+\}.$$

Chaque double classe W_IwW_J contient un unique élément de $\mathscr{D}(I, J)$, et, si $w \in \mathscr{D}(I, J)$, alors w est l'unique élément de longueur minimale dans la classe W_IwW_J (cf. par exemple [Car, prop. 2.7.3]).

Pour $J \subset S$, notons w_J l'élément de plus grande longueur dans $\mathscr{D}(J, \varnothing)$. Il est caractérisé par les propriétés

$$w_J^{-1}(J) \subset \Phi^+ \quad \text{et} \quad w_J^{-1}(S - J) \subset -\Phi^+.$$

En fait, on a $w_J^{-1}(J) \subset S$, et nous posons $J' := w_J^{-1}(J)$.

Nous appelons G-module toute représentation lisse (π, E) du groupe G dans l'espace vectoriel complexe E. Soient $\mathscr{M}(G)$ la catégorie des G-modules, $\mathrm{Irr}(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence de G-modules irréductibles et $\mathscr{R}(G)$ le groupe de Grothendieck des G-modules de longueur finie; $\mathscr{R}(G)$ est un groupe abélien libre de base $\mathrm{Irr}(G)$.

Notons $c_G : \mathscr{R}(G) \longrightarrow \mathscr{R}(G)$ l'endomorphisme qui étend l'application $\pi \mapsto \tilde{\pi}$ (contragrédiente de π) pour toute $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$.

Soit $I \subset S$. Nous notons $\mathbf{i}_{L_I}^G$ et $\mathbf{r}_{L_I}^G$ les foncteurs d'induction et de restriction de Bernstein-Zelevinski (cf. [BZ, 2.3]). Ces foncteurs définissent des homomorphismes

$$\mathbf{i}_{L_I}^G : \mathscr{R}(L_I) \longrightarrow \mathscr{R}(G) \quad \text{et} \quad \mathbf{r}_{L_I}^G : \mathscr{R}(G) \longrightarrow \mathscr{R}(L_I),$$

qui satisfont aux propriétés suivantes :

(1.1) si $J \subset I$, on a $\mathbf{i}_{L_I}^G \circ \mathbf{i}_{L_J}^{L_I} = \mathbf{i}_{L_J}^G$ et $\mathbf{r}_{L_J}^{L_I} \circ \mathbf{r}_{L_I}^G = \mathbf{r}_{L_J}^G$ (cf. [BZ, prop. 2.3 (c)]);

(1.2) si $w \in W$ est tel que $w(I) \subset S$, on a $\mathbf{i}_{{}^wL_I}^G \circ \mathrm{Ad}(w) = \mathbf{i}_{L_I}^G$ (cf. [BDK, lem. 5.4 (iii)]);

(1.3) si $J \subset S$, on a

$$\mathbf{r}_{L_I}^G \circ \mathbf{i}_{L_J}^G = \sum_{w \in \mathscr{D}(I,J)} \mathbf{i}_{L_I \cap {}^wL_J}^{L_I} \circ \mathrm{Ad}(w) \circ \mathbf{r}_{L_J \cap L_I^w}^{L_J}$$

(les sous-groupes $L_I \cap {}^wL_J$ et $L_J \cap L_I^w$ sont des sous-groupes de Levi standard, cf. [BZ, lem. 2.11 (b)]);

(1.4) si $J \subset S$, on a $c_{L_J} \circ \mathbf{r}_{L_J}^G = \mathrm{Ad}(w_J) \circ \mathbf{r}_{L_{J'}}^G \circ c_G$ (c'est une simple reformulation de [Cas, cor. 4.2.5]).

Définition 1.5. Nous définissons un opérateur D_G dans le groupe de Grothendieck $\mathscr{R}(G)$ de la manière suivante:

$$D_G := \sum_{I \subset S} (-1)^{|I|}\, \mathbf{i}_{L_I}^G \circ \mathbf{r}_{L_I}^G.$$

Rappelons que $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$ est dite cuspidale si $\mathbf{r}_{L_I}^G(\pi) = 0$ pour tout $I \subsetneq S$ (cf. [BZ, §2.4]).

Notation 1.6. Si $I \subset S$, nous notons $\mathscr{E}(I)$ le sous-ensemble de $\mathrm{Irr}(G)$ formé des représentations de G qui sont sous-quotients de représentations induites $\mathbf{i}_{L_I}^G(\sigma)$, avec L_I sous-groupe de Levi standard de G et σ représentation irréductible cuspidale de L_I.

Les $\mathscr{E}(I)$, pour I parcourant l'ensemble des parties de S à W-conjugaison près, définissent une partition de $\mathrm{Irr}(G)$ (cf. [BZ, th. 2.5]).

Théorème 1.7. *L'opérateur D_G a les propriétés suivantes:*

(1) *on a $D_G \circ c_G = c_G \circ D_G$;*

(2) *pour tout $J \subset S$, on a*

$$D_G \circ \mathbf{i}_{L_J}^G = \mathbf{i}_{L_J}^G \circ D_{L_J} \quad et \quad \mathbf{r}_{L_J}^G \circ D_G = \mathrm{Ad}(w_J) \circ D_{L_{J'}} \circ \mathbf{r}_{L_{J'}}^G;$$

(3) *c'est une involution (i.e., $D_G^2 = \mathrm{Id}$);*

(4) *si π est irréductible cuspidale, alors $D_G(\pi) = (-1)^{|S|}\pi$.*

Remarque. La preuve de l'égalité $\mathbf{r}_{L_J}^G \circ D_G = \mathrm{Ad}(w_J) \circ D_{L_{J'}} \circ \mathbf{r}_{L_{J'}}^G$ m'a été indiquée par le referee. L'existence d'une telle formule m'avait été aussi signalée par Marko Tadic. Par ailleurs, dans le cas $J = \varnothing$, on la trouve déjà (avec une autre version de la dualité) dans [R, prop. 13].

Démonstration. L'assertion (1) est conséquence de (1.4) et l'assertion (4) résulte clairement de la définition de D_G. Montrons l'assertion (2).

- En utilisant (1.3), nous obtenons :

$$\begin{aligned} D_G \circ \mathbf{i}_{L_J}^G &= \sum_{I \subset S} (-1)^{|I|}\, \mathbf{i}_{L_I}^G \circ \left(\mathbf{r}_{L_I}^G \circ \mathbf{i}_{L_J}^G\right) \\ &= \sum_{I \subset S} (-1)^{|I|}\, \mathbf{i}_{L_I}^G \circ \Big(\sum_{w \in \mathscr{D}(I,J)} \mathbf{i}_{L_I \cap {}^wL_J}^{L_I} \circ \mathrm{Ad}(w) \circ \mathbf{r}_{L_J \cap L_I^w}^{L_J} \Big). \end{aligned}$$

D'après (1.1), on a :

$$D_G \circ \mathbf{i}^G_{L_J} = \sum_{I\subset S}(-1)^{|I|} \sum_{w\in\mathscr{D}(I,J)} \mathbf{i}^G_{L_I\cap {}^wL_J} \circ \mathrm{Ad}(w) \circ \mathbf{r}^{L_J}_{L_J\cap L_I^w}$$
$$= \sum_{I\subset S}(-1)^{|I|} \sum_{w\in\mathscr{D}(I,J)} \mathbf{i}^G_{L_J\cap L_I^w} \circ \mathbf{r}^{L_J}_{L_J\cap L_I^w},$$

en utilisant (1.2). Puisque $\mathbf{i}^G_{L_J\cap L_I^w} = \mathbf{i}^G_{L_J} \circ \mathbf{i}^{L_J}_{L_J\cap L_I^w}$ (d'après (1.1)), nous obtenons :

(1.8) $$D_G \circ \mathbf{i}^G_{L_J} = \mathbf{i}^G_{L_J} \circ \Big(\sum_{I\subset S}(-1)^{|I|} \sum_{w\in\mathscr{D}(I,J)} \mathbf{i}^{L_J}_{L_J\cap L_I^w} \circ \mathbf{r}^{L_J}_{L_J\cap L_I^w}\Big).$$

Si $K \subset J$, nous notons $a_{J,I,K}$ le cardinal de l'ensemble des $w \in \mathscr{D}(I, J)$ tels que $L_J \cap L_I^w = L_K$. L'égalité (1.8) s'écrit

$$D_G \circ \mathbf{i}^G_{L_J} = \mathbf{i}^G_{L_J} \circ \Big(\sum_{K\subset J}\big(\sum_{I\subset S}(-1)^{|I|} a_{J,I,K}\big)\, \mathbf{i}^{L_J}_{L_K} \circ \mathbf{r}^{L_J}_{L_K}\Big).$$

D'après un résultat de Solomon (cf. [Car, prop. 2.7.7]), on a

$$\sum_{I\subset S}(-1)^{|I|} a_{J,I,K} = (-1)^{|K|}\,;$$

nous en déduisons

$$D_G \circ \mathbf{i}^G_{L_J} = \mathbf{i}^G_{L_J} \circ \Big(\sum_{K\subset J}(-1)^{|K|}\, \mathbf{i}^{L_J}_{L_K} \circ \mathbf{r}^{L_J}_{L_K}\Big) = \mathbf{i}^G_{L_J} \circ D_{L_J}.$$

- Par transitivité du foncteur $\mathbf{r}^G_{L_J}$ (cf. (1.1)) et en utilisant (1.3), nous obtenons

$$\mathbf{r}^G_{L_J} \circ D_G = \sum_{\substack{I\subset S\\ w\in\mathscr{D}(J,I)}} (-1)^{|I|}\, \mathbf{i}^{L_J}_{L_J\cap {}^wL_I} \circ \mathrm{Ad}(w) \circ \mathbf{r}^G_{L_J^w\cap L_I}$$
$$= \sum_{\substack{I\subset S\\ w\in\mathscr{D}(J,I)}} (-1)^{|I|}\, \mathrm{Ad}(w) \circ \mathbf{i}^{L_J^w}_{L_J^w\cap L_I} \circ \mathbf{r}^G_{L_J^w\cap L_I},$$

en utilisant le fait que $w^{-1}J \subset \Phi^+$. Nous posons, pour $w \in \mathscr{D}(J, I)$,

$$S_w := \{\alpha \in S \mid w\alpha \in \Phi^+\}.$$

On a alors

(1.9) $$\mathbf{r}^G_{L_J} \circ D_G = \sum_{w\in\mathscr{D}(J,\varnothing)} \mathrm{Ad}(w) \circ \sum_{I\subset S_w} (-1)^{|I|}\, \mathbf{i}^{L_J^w}_{L_J^w\cap L_I} \circ \mathbf{r}^G_{L_J^w\cap L_I}.$$

Fixons w. Pour chaque $K \subset J$, le coefficient de $\mathbf{i}^{L_J^w}_{L_K^w} \circ \mathbf{r}^G_{L_K^w}$ dans la deuxième somme de (1.9) est égal à

$$\sum_{\substack{I\subset S_w\\ w(I)\cap J=K}} (-1)^{|I|} = (-1)^{|K|}$$

si $w(S_w) \subset J$, et est nul sinon. Mais, $w^{-1}(S-J) \subset -\Phi^+$, si $w(S_w) \subset J$: soit en effet $\alpha \in S-J$ tel que $w^{-1}\alpha \in \Phi^+$; écrivons $w^{-1}\alpha = x+y$ avec $x \in \mathbb{N}S_w$ et $y \in \mathbb{N}(S-S_w)$ (ici $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$); par hypothèse

$wx \in \mathbb{N}J$, $wy \in -\Phi^+$ et $wx + wy = \alpha \in S - J$, ce qui est impossible, d'où l'assertion.

Par conséquent, $w = w_J$ et $L_J^w = L_{J'}$ et nous obtenons

$$\mathbf{r}_{L_J}^G \circ D_G = \mathrm{Ad}(w_J) \circ \sum_{K \subset J} (-1)^{|K|} \mathbf{i}_K^{L_{J'}} \circ \mathbf{r}_K^G ,$$

puisque $L_J^w = L_{w_J^{-1}(J)} = L_{J'}$. Il ne reste alors plus qu'à utiliser la transitivité de $\mathbf{r}_{L_K}^G$ encore une fois.

Montrons maintenant l'assertion (3). On a

$$\begin{aligned} D_G^2 &= D_G \circ \Big(\sum_{I \subset S} (-1)^{|I|} \mathbf{i}_{L_I}^G \circ \mathbf{r}_{L_I}^G\Big) \\ &= \sum_{I \subset S} (-1)^{|I|} (D_G \circ \mathbf{i}_{L_I}^G) \circ \mathbf{r}_{L_I}^G \\ &= \sum_{I \subset S} (-1)^{|I|} \mathbf{i}_{L_I}^G \circ D_{L_I} \circ \mathbf{r}_{L_I}^G , \end{aligned}$$

en utilisant l'assertion (2). L'égalité ci-dessus s'écrit, par définition de D_{L_I} ,

$$\begin{aligned} D_G^2 &= \sum_{I \subset S} (-1)^{|I|} \Big(\sum_{K \subset I} (-1)^{|K|} \mathbf{i}_{L_K}^G \circ \mathbf{r}_{L_K}^G\Big) \\ &= \sum_{K \subset S} (-1)^{|K|} \big(\sum_{I \supset K} (-1)^{|I|}\big) \mathbf{i}_{L_K}^G \circ \mathbf{r}_{L_K}^G . \end{aligned}$$

Puisque $\sum_{I \supset K} (-1)^{|I|} = 0$ si $K \neq S$, on a bien $D_G^2 = \mathrm{Id}$. □

Corollaire 1.10. *Soient $J \subset S$ et $\sigma \in \mathrm{Irr}(L_J)$ cuspidal. Alors,*

(a) *si $\mathbf{i}_{L_J}^G(\sigma)$ est irréductible, on a $D_G(\mathbf{i}_{L_J}^G(\sigma)) = (-1)^{|J|} \mathbf{i}_{L_J}^G(\sigma)$;*

(b) *si $J = S - \{\alpha\}$, pour une racine simple α et $\mathbf{i}_{L_J}^G(\sigma)$ est réductible, on a $(-1)^{|J|} D_G(\rho_\pm) = \rho_\mp$, où ρ_- et ρ_+ désignent les deux composantes de la représentation induite $\mathbf{i}_{L_J}^G(\sigma)$.*

Démonstration. L'assertion (a) résulte immédiatement du théorème 1.7. Si $\mathbf{i}_{L_J}^G(\sigma)$ est réductible et $J = S - \{\alpha\}$, alors $\mathbf{i}_{L_J}^G(\sigma)$ est de longueur 2. Notons ρ_- et ρ_+ ses deux composantes de sorte que

$$\mathbf{r}_{L_J}^G(\rho_+) = \sigma \quad \text{et} \quad \mathbf{r}_{L_J}^G(\rho_-) = \mathrm{Ad}(w_J^{-1})(\sigma)$$

(cf. [Cas, 7.1]). De plus, on a $\mathbf{r}_{L_K}^G(\rho_\pm) = 0$ si $K \subsetneq S$, $K \neq J$. En utilisant (1.2), on obtient

$$(-1)^{|J|} D_G(\rho_\pm) = -\rho_\pm + \mathbf{i}_{L_J}^G(\sigma) = -\rho_\pm + \rho_+ + \rho_- = \rho_\mp .$$

□

2. Application à $\mathbf{GL}_n(\mathbb{F})$

Soient $G_n := \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ si $n > 0$ et $G_0 := \{e\}$. Soient $|\ \ |$ la valeur absolue usuelle du corps $\mathbb{F}$ et ν le caractère de G_n défini par $\nu(g) = |\det(g)|$. Soient

$\mathbf{T}_0$ et $\mathbf{P}_0$ égaux respectivement au tore diagonal et au sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures.

Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ est une partition de l'entier n et si π_i (pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$) est une représentation lisse du groupe G_{α_i}, nous notons G_α le sous-groupe $G_{\alpha_1} \times \cdots \times G_{\alpha_r}$ de G_n, considéré comme le sous-groupe de G_n des matrices diagonales par blocs et $\pi_1 \times \cdots \times \pi_r$ la représentation $\mathbf{i}_{G_\alpha}^{G_n}(\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r)$.

Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations cuspidales irréductibles de groupes G_n ($n = 1, 2, \dots$). Suivant la terminologie de Zelevinski (cf. [Z, §3]), nous appelons *segment de longueur* k un sous-ensemble Δ de $\mathscr{C}$ de la forme $\Delta = \{\rho, \nu\rho, \dots, \nu^{k-1}\rho\}$, où k est un entier strictement positif. Nous dirons que $\nu^{k-1}\rho$ est la *fin* de Δ et nous le noterons ρ'. Nous notons $\mathscr{S}$ l'ensemble des segments.

Nous appelons *multisegment* un ensemble (fini) "avec multiplicités" $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$ de segments $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ et nous notons $\mathscr{O}$ l'ensemble des multisegments. On appelle opération élémentaire sur $a \in \mathscr{O}$ toute opération consistant à remplacer une paire de segments connexes (Δ, Δ') de a par la paire $(\Delta \cup \Delta', \Delta \cap \Delta')$; si $a \in \mathscr{O}$ et $b \in \mathscr{O}$, nous écrirons $a \leq b$ si $a \in \mathscr{O}$ est obtenu à partir de b par une suite d'opérations élémentaires.

Si $\pi_1 \in \mathscr{R}(G_{\alpha_1})$ et $\pi_2 \in \mathscr{R}(G_{\alpha_2})$, nous identifions $\mathscr{R}(G_{\alpha_1+\alpha_2})$ à $\mathscr{R}(G_{\alpha_1}) \otimes \mathscr{R}(G_{\alpha_2})$ (cf. [Z, prop. 1.5]). Les foncteurs $\mathbf{i}_{G_\alpha}^{G_\beta}$ et $\mathbf{r}_{G_\alpha}^{G_\beta}$ induisent alors des homomorphismes

$$\mathbf{i}_{G_\alpha}^{G_\beta}: \mathscr{R}(G_\alpha) \longrightarrow \mathscr{R}(G_\beta) \text{ et } \mathbf{r}_{G_\alpha}^{G_\beta}: \mathscr{R}(G_\beta) \longrightarrow \mathscr{R}(G_\alpha).$$

Soit $\mathscr{R} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{R}(G_n)$. Zelevinski a défini une multiplication $m: \mathscr{R} \otimes \mathscr{R} \longrightarrow \mathscr{R}$ et une comultiplication $c: \mathscr{R} \longrightarrow \mathscr{R} \otimes \mathscr{R}$ par :

$$m(\pi_1 \otimes \pi_2) := \mathbf{i}_{G_{\alpha_1} \times G_{\alpha_2}}^{G_{\alpha_1+\alpha_2}}(\pi_1 \otimes \pi_2), \quad \pi_1 \in \mathscr{R}(G_{\alpha_1}), \ \pi_2 \in \mathscr{R}(G_{\alpha_2}),$$

$$c(\pi) = \sum_{0 \leq k \leq n} \mathbf{r}_{G_k \times G_{n-k}}^{G_n}(\pi) \quad \text{pour} \quad \pi \in \mathscr{R}(G_n).$$

A l'aide de m, on obtient une structure de $\mathbb{Z}$-algèbre sur $\mathscr{R}$ (en posant $\pi_1 \times \pi_2 = m(\pi_1 \otimes \pi_2)$); de manière analogue, la comultiplication c détermine une structure de coalgèbre sur $\mathscr{R}$. Muni de m et c, le groupe $\mathscr{R}$ devient une bialgèbre graduée sur $\mathbb{Z}$ (cf. [Z, prop. 1.7]). L'anneau $\mathscr{R}$ est commutatif (cf. [Z, th. 1.9]) mais n'est pas cocommutatif relativement à c (cf. [Z, rem. 1.12]).

Soient $\pi_1 \in \mathscr{R}(G_{\alpha_1})$ et $\pi_2 \in \mathscr{R}(G_{\alpha_2})$. Il résulte de l'assertion (1) du théorème 1.7 que $D_{G_{\alpha_1+\alpha_2}}(\pi_1 \times \pi_2) = \mathbf{i}_{G_{(\alpha_1, \alpha_2)}}^{G_{\alpha_1+\alpha_2}}(D_{G_\alpha}(\pi_1 \otimes \pi_2))$ et de la définition (cf. 1.5) que $D_{G_\alpha}(\pi_1 \otimes \pi_2) = D_{G_{\alpha_1}}(\pi_1) \otimes D_{G_{\alpha_2}}(\pi_2)$.

Définition 2.1. Soit D l'endomorphisme de $\mathscr{R}$ défini sur $\pi \in \operatorname{Irr}(G_n)$ par

$$D(\pi) = (-1)^{|I|} D_{G_n}(\pi),$$

si $\pi \in \mathscr{E}(I)$ (cf. notation 1.6).

Soit $\Delta = [\rho, \rho']$ un segment de longueur k. D'après [Z], la représentation $\rho \times \nu\rho \times \nu^2\rho \times \cdots \times \rho'$ a un unique sous-module irréductible; nous le notons $\langle\Delta\rangle$.

Remarque 2.2. On a en particulier $D(\langle\Delta\rangle) = (-1)^{n-k} D_{G_n}(\langle\Delta\rangle)$ pour tout segment $\Delta = [\rho, \rho']$ de longueur k. Soit $\langle\Delta\rangle^t$ l'unique sous-module irréductible de la représentation $\rho' \times \nu^{-1}\rho' \times \nu^{-2}\rho' \times \cdots \times \rho = \nu^{k-1}\rho \times \nu^{k-2}\rho \times \cdots \times \rho$; c'est aussi l'unique quotient irréductible de $\rho \times \nu\rho \times \nu^2\rho \times \cdots \times \rho'$. On a : $\langle\Delta\rangle^t = \langle\{\Delta\}^t\rangle$, où $\{\Delta\}^t = \{\{\rho\}, \{\nu\rho\}, \{\nu^2\rho\}, \ldots, \{\rho'\}\}$.

En [Z, 9.12], Zelevinski a construit un automorphisme involutif τ de $\mathscr{R}$ de la manière suivante: τ est l'unique endomorphisme de l'anneau $\mathscr{R}$ qui étend l'application

$$\langle\Delta\rangle \mapsto \langle\Delta\rangle^t.$$

Exemple. Si $\rho = \nu^{\frac{-(n-1)}{2}} \in \mathscr{R}(G_1)$ et $\rho' = \nu^{\frac{(n-1)}{2}} \in \mathscr{R}(G_1)$, alors $\langle\Delta\rangle$ est la représentation identité de G_n et $\langle\Delta\rangle^t$ la représentation de Steinberg.

Théorème 2.3. *L'involution D définie en* (2.1) *coïncide avec celle définie par Zelevinski.*

Démonstration. L'anneau $\mathscr{R}$ est un anneau de polynômes sur $\mathbb{Z}$ en les indéterminées $\langle\Delta\rangle$, pour $\Delta \in \mathscr{S}$ ([Z, cor. 7.5]); autrement dit les monômes $\langle\Delta_1\rangle \times \cdots \times \langle\Delta_r\rangle$, pour $\Delta_1 \in \mathscr{S}, \ldots, \Delta_r \in \mathscr{S}$, forment une $\mathbb{Z}$-base de $\mathscr{R}$. Il suffit donc de démontrer que D et τ coïncident sur les monômes.

Nous raisonnons par récurrence sur $|S|$. Puisque D et τ sont des endomorphismes de l'anneau $\mathscr{R}$, il suffit alors de vérifier qu'ils coïncident sur les termes de la forme $\langle\Delta\rangle$, où $\Delta = [\rho, \rho']$ est un segment.

Soit donc Δ un tel segment, avec $\rho \in \mathrm{Irr}(G_m)$, $\rho' = \nu^{k-1}\rho$ et $n = km$. Soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ une partition de n. On déduit facilement de [Z, prop. 3.4] que

(1) s'il existe $i \in \{1, \ldots, r\}$ tel que α_i n'est pas divisible par m, le terme $\mathbf{r}_{G_\alpha}^{G_n}(\langle\Delta\rangle)$ est nul;

(2) si $\alpha_i = m\beta_i$ pour $1 \leq i \leq r$, le terme $\mathbf{r}_{G_\alpha}^{G_n}(\langle\Delta\rangle)$ est égal à

$$\gamma_\beta = \langle[\rho, \nu^{\beta_1-1}\rho]\rangle \otimes \cdots \otimes \langle[\nu^{\beta_1+\cdots+\beta_{i-1}}\rho, \nu^{\beta_1+\cdots+\beta_i-1}\rho]\rangle \otimes \cdots \otimes \langle[\nu^{\beta_1+\cdots+\beta_{r-1}}\rho, \rho']\rangle.$$

Soit b_β le multisegment associé à γ_β.

On a $\mathbf{i}_{G_\alpha}^{G_n}(\gamma_\beta) = \sum_{a \leq b_\beta} \langle a\rangle$, d'après [Z, prop. 9.13]. Soit $\mathscr{P}_k$ l'ensemble des partitions ordonnées de k. Si $\alpha = m\beta$ avec $\beta \in \mathscr{P}_k$ comme ci-dessus, nous notons $r(\beta)$ le nombre de termes de β. A chaque $a \leq b_\beta$, on associe le sous-ensemble $I_a = \{a_1, a_2, \ldots\}$ de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, k\}$, où les fins de segments de a sont $\nu^{a_i-1}\rho$. Nous obtenons, en utilisant la définition 1.5,

$$\begin{aligned} D_{G_n}(\langle\Delta\rangle) &= (-1)^n \sum_{\beta \in \mathscr{P}_k} \Big(\sum_{a \leq b_\beta} (-1)^{r(\beta)} \langle a\rangle\Big) \\ &= (-1)^n \sum_{a} \Big(\sum_{\substack{\beta \in \mathscr{P}_k \\ a \leq b_\beta}} (-1)^{r(\beta)}\Big) \langle a\rangle. \end{aligned}$$

Pour que $a \leq b_\beta$ il faut et il suffit que $I_a \subset I_{b_\beta}$. Le coefficient de $\langle a\rangle$ dans $D_{G_n}(\langle\Delta\rangle)$ est $(-1)^n \sum_{J \supset I_a} (-1)^{|J|}$. Nous en déduisons que $D_{G_n}(\langle\Delta\rangle) = (-1)^{|I|}\langle\Delta\rangle^t$, i.e., que $D(\langle\Delta\rangle) = \tau(\langle\Delta\rangle)$. □

3. Dualité au niveau des modules

Si U est un sous-groupe fermé de G, g un élément du normalisateur $N_G(U)$ de U dans G et a_g l'automorphisme $u \mapsto gug^{-1}$, nous noterons mod_U le caractère de $N_G(U)$ défini par $\int_U f(a_g^{-1}u)\,\mathrm{d}\mu_U(u) = \mathrm{mod}_U(g)\int_U f(u)\,\mathrm{d}\mu_U(u)$, où μ_U est une mesure de Haar sur U.

Soit E un G-module. Pour $I \subset S$, nous notons $E(U_I)$ le sous-espace de E engendré par les éléments $ux - x$, où $x \in E$ et $u \in U_I$. Nous posons $E_{U_I} := E/E(U_I)$. Comme L_I normalise U_I, l'espace $E(U_I)$ est stable par L_I et donc L_I agit sur E_{U_I}. On définit une représentation d'espace E_{U_I} de L_I (appelée module de Jacquet normalisé) par $l.\big(\xi+E(U_I)\big) = \mathrm{mod}_{U_I}^{-\frac{1}{2}}\big(l.\xi+E(U_I)\big)$, pour $l \in L_I$ et $\xi \in E$. On a $E_{U_I} = \mathbf{r}_{L_I}^G(E)$ (par définition du foncteur $\mathbf{r}_{L_I}^G$, cf. [BZ, 1.8 (b)]).

Soit E_I l'ensemble des fonctions f localement constantes sur G à valeurs dans E_{U_I}, qui vérifient $f(pg) = \mathrm{mod}_U^{\frac{1}{2}}(l)\; l.\big(f(g)\big)$ pour tout $p = lu$ dans $P_I = L_I U_I$ et tout g dans G. On a (par définition du foncteur $\mathbf{i}_{L_I}^G$, cf. [BZ, 1.8 (a)])

$$E_I = \big(\mathbf{i}_{L_I}^G \circ \mathbf{r}_{L_I}^G\big)(E).$$

Soient $I \subset J \subset S$. Le groupe $P_I \cap L_J$ est le sous-groupe parabolique standard de L_J correspondant au sous-ensemble I de J, son sous-groupe de Levi standard est L_I et son radical unipotent est $U_I \cap L_J$ (cf. [Car, prop. 2.6.6 et prop. 2.6.7]). Par transitivité du foncteur $\mathbf{r}_{L_I}^G$, on a $\mathbf{r}_{L_I}^G = \mathbf{r}_{L_I}^{L_J} \circ \mathbf{r}_{L_J}^G$, et donc

$$E_{U_I} = E_{U_J}/E_{U_J}(U_I \cap L_J).$$

Notons π_I^J la surjection canonique de E_{U_J} sur E_{U_I}. Soit φ_I^J l'application qui à toute fonction $f_J \in E_J$ associe la fonction f_I sur G, à valeur dans E_{U_I}, définie par $f_I(g) = \pi_I^J\big(f_J(g)\big)$. Puisque $E_{U_J}(U_I \cap L_J)$ est stable par action de L_I, on a

$$f_I(pg) = f_J(pg) + E_{U_J}(U_I \cap L_J) = l.f_J(pg) + E_{U_J}(U_I \cap L_J) = l.f_I(g),$$

pour tout $p \in P_I$, autrement dit $f_I \in E_I$. On a ainsi défini une application

$$\varphi_I^J : E_J \longrightarrow E_I.$$

Si $I \subset J \subset K \subset S$, par transitivité du foncteur $\mathbf{r}_{L_I}^G$, on a

$$\varphi_I^K = \varphi_I^J \circ \varphi_J^K. \tag{3.1}$$

Pour $J \subset S$, nous noterons $S - J$ le complémentaire de J dans S.

Proposition 3.2. *Soient $J \subset S$ et $\alpha \in S - J$. On a alors, pour tout $K \subset S - (J \cup \{\alpha\})$,*

$$\Big(\sum_{\beta\in K} \varphi_J^{J\cup\{\beta\}}(E_{J\cup\{\beta\}})\Big) \cap \varphi_J^{J\cup\{\alpha\}}(E_{J\cup\{\alpha\}}) = \sum_{\beta\in K} \varphi_J^{J\cup\{\alpha,\beta\}}(E_{J\cup\{\alpha,\beta\}}). \tag{3.3}$$

Démonstration. D'après (3.1), l'inclusion du membre de droite de (3.3) dans le membre de gauche est claire. Montrons l'inclusion opposée. Soient $f_\alpha \in E_{J\cup\{\alpha\}}$ et $f_\beta \in E_{J\cup\{\beta\}}$ pour $\beta \in K$. On relève f_β en $\widetilde{f}_\beta$ de la manière suivante: on choisit un sous-groupe ouvert compact Γ de G, on note s_1, $\dots$, s_r des représentants des doubles classes $P_{J\cup\{\alpha,\beta\}}\backslash G/\Gamma$, on choisit alors $e_1, \dots, e_r$ dans $E_{J\cup\{\alpha,\beta\}}$ relevant respectivement $f_\beta(s_1), \dots, f_\beta(s_r)$ et l'on pose $\widetilde{f}_\beta(ps_i\gamma) := l\,e_i$, pour $i \in \{1, \dots, r\}$, pour $p \in P_{J\cup\{\alpha,\beta\}}$ de composante de Levi l et pour $\gamma \in \Gamma$. Pour tout $g \in G$, nous posons

$$f_{\alpha,\beta}(g) := \int_{P_{J\cup\{\beta\}}\backslash P_{J\cup\{\alpha,\beta\}}} l^{-1}.\widetilde{f}_\beta(pg)\,d\mu_{\alpha,\beta}(p),$$

où $d\mu_{\alpha,\beta}$ désigne une mesure de Haar sur $P_{J\cup\{\beta\}}\backslash P_{J\cup\{\alpha,\beta\}}$, normalisée de sorte que le volume de $P_{J\cup\{\beta\}}\backslash P_{J\cup\{\alpha,\beta\}}$ soit un. Puisque $P_{J\cup\{\beta\}}\backslash P_{J\cup\{\alpha,\beta\}} \simeq P_J\backslash P_{J\cup\{\alpha\}}$, on a

$$f_{\alpha,\beta}(g) = \int_{P_J\backslash P_{J\cup\{\alpha\}}} l^{-1}\,.\,\widetilde{f}_\beta(pg)\,d\mu_\alpha(p) \tag{3.4}$$

où $d\mu_\alpha$ désigne une mesure de Haar sur $P_J\backslash P_{J\cup\{\alpha\}}$, normalisée de sorte que le volume de $P_J\backslash P_{J\cup\{\alpha\}}$ soit un. Nous remarquons que $f_{\alpha,\beta}$ appartient à $\varphi_{J\cup\{\beta\}}^{J\cup\{\alpha,\beta\}}(E_{J\cup\{\alpha,\beta\}})$.

Nous posons

$$\overline{f}_\alpha := \varphi_J^{J\cup\{\alpha\}}(f_\alpha),\quad \overline{f}_\beta := \varphi_J^{J\cup\{\beta\}}(f_\beta) \quad \text{et} \quad \overline{f}_{\alpha,\beta} := \varphi_J^{J\cup\{\beta\}}(f_{\alpha,\beta}).$$

Nous déduisons de (3.4) que

$$\sum_{\beta\in K} \overline{f}_{\alpha,\beta}(g) = \int_{P_J\backslash P_{J\cup\{\alpha\}}} l^{-1}\,.\Big(\sum_{\beta\in K} \overline{f}_\beta(pg)\Big)\,d\mu_\alpha(p).$$

Si $\overline{f}_\alpha = \sum_{\beta\in K}\overline{f}_\beta$, nous obtenons donc

$$\begin{aligned}\overline{f}_\alpha(g) &= \int_{P_J\backslash P_{J\cup\{\alpha\}}} l^{-1}\,.\,\overline{f}_\alpha(pg)\,d\mu_\alpha(p)\\ &= \sum_{\beta\in K}\overline{f}_{\alpha,\beta}(g),\end{aligned}$$

et $\overline{f}_{\alpha,\beta} \in \varphi_J^{J\cup\{\alpha,\beta\}}(E_{J\cup\{\alpha,\beta\}})$ d'après (3.1). □

Soit $J \subset S$. Nous considérons $\Lambda^{|S-J|}(\mathbb{C}^{S-J})$ comme un élément de $\mathscr{M}(G)$, le groupe G opérant par l'action triviale. Soit $\alpha \in S - J$; l'application $\omega \mapsto \omega\wedge\alpha$ définit une application naturelle

$$\varepsilon_{J-\{\alpha\}}^J : \Lambda^{|S-J|}(\mathbb{C}^{S-J}) \longrightarrow \Lambda^{|S-J-\{\alpha\}|}(\mathbb{C}^{S-J-\{\alpha\}}).$$

Si $I \subset J \subset S$ et $|J| = |I| + 1$, nous posons

$$\widetilde{E}_J := E_J \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda^{|S-J|}(\mathbb{C}^{S-J}) \quad \text{et} \quad \widetilde{\varphi}_I^J := \varphi_I^J \otimes_{\mathbb{C}} \varepsilon_I^J.$$

Nous considérons, dans $\mathscr{M}(G)$, la suite

$$0 \longrightarrow \widetilde{E}_S \xrightarrow{d_{|S|}} \bigoplus_{|J|=|S|-1} \widetilde{E}_J \xrightarrow{d_{|S|-1}} \bigoplus_{|J|=|S|-2} \widetilde{E}_J \xrightarrow{d_{|S|-2}} \dots \xrightarrow{d_1} \widetilde{E}_\varnothing \longrightarrow 0. \tag{3.5}$$

En utilisant (3.1), on voit que (3.5) est un complexe.

Remarquons que si E est un élément de $\mathscr{E}(I)$ (cf. not. 1.6), alors $|I|$ est le plus petit entier i tel que $\bigoplus_{|J|=i}\widetilde{E}_J \neq 0$.

Théorème 3.6. *Soient $I \subset S$ et $E \in \mathscr{E}(I)$. Alors la suite*

$$0 \longrightarrow \widetilde{E}_S \xrightarrow{d_{|S|}} \bigoplus_{|J|=|S|-1} \widetilde{E}_J \xrightarrow{d_{|S|-1}} \bigoplus_{|J|=|S|-2} \widetilde{E}_J \xrightarrow{d_{|S|-2}} \dots \xrightarrow{d_{|I|}} \bigoplus_{|J|=|I|} \widetilde{E}_J \tag{3.7}$$

est exacte.

En particulier, l'homologie du complexe (3.5) *est concentrée en un degré.*

Démonstration. Si $I = S$, il n'y a rien à démontrer. Si $|I| = |S| - 1$, la suite

$$0 \longrightarrow \widetilde{E}_S \xrightarrow{d_{|S|}} \bigoplus_{|J|=|S|-1} \widetilde{E}_J$$

est exacte, puisque l'application $d_{|S|}$ est injective (on le vérifie par un raisonnement analogue à celui de [BDKV, p. 20]).

Nous supposons dorénavant $|I| \leq |S| - 2$. Il suffit de voir que, pour tout $J \supset I$ tel que $|J| \leq |S| - 2$, la suite

$$\text{(3.8)} \qquad \bigoplus_{\substack{\alpha_k, \alpha_l \in S-J \\ k \neq l}} E_{J\cup\{\alpha_k, \alpha_l\}} \xrightarrow{d_{\alpha_k, \alpha_l}} \bigoplus_{\alpha_k \in S-J} E_{J\cup\{\alpha_k\}} \xrightarrow{d_{\alpha_k}} \bigoplus E_J,$$

où $S - J = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j\}$,

$$d_{\alpha_k, \alpha_l} := \bigoplus_{l \in \{1, \dots, \widehat{k}, \dots, j\}} (-1)^l \varphi_{J\cup\{\alpha_k\}}^{J\cup\{\alpha_k, \alpha_l\}} \quad \text{et} \quad d_{\alpha_k} := \bigoplus_{k \in \{1, \dots, j\}} (-1)^k \varphi_J^{J\cup\{\alpha_k\}},$$

est exacte.

Soit $(f_{\alpha_k})_k \in \ker(d_{\alpha_k})$ avec $f_{\alpha_k} \in E_{J\cup\{\alpha_k\}}$. Nous posons

$$\overline{f}_{\alpha_k} := \varphi_J^{J\cup\{\alpha_k\}}(f_{\alpha_k}).$$

On a donc

$$\sum_{k \in \{1, \dots, j\}} (-1)^k \overline{f}_{\alpha_k} = 0.$$

D'après la proposition 3.2 appliquée à $\alpha = \alpha_1$ et $K = \{\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_j\}$, il existe $f_{\alpha_1, \alpha_i} \in E_{J\cup\{\alpha_1, \alpha_i\}}$ pour $i \in \{2, \dots, j\}$ tels que

$$\overline{f}_{\alpha_1, \alpha_i} := \varphi_J^{J\cup\{\alpha_1, \alpha_i\}}(f_{\alpha_1, \alpha_i}) \quad \text{et} \quad \overline{f}_{\alpha_1} = \sum_{i \in \{2, \dots, j\}} (-1)^i \overline{f}_{\alpha_1, \alpha_i}.$$

Remarquons maintenant que

$$(\overline{f}_{\alpha_1, \alpha_2} - \overline{f}_{\alpha_2}) \in \Big(\sum_{i \in \{3, \dots, j\}} \varphi_J^{J\cup\{\alpha_i\}}(E_{J\cup\{\alpha_i\}})\Big) \cap \varphi_J^{J\cup\{\alpha_2\}}(E_{J\cup\{\alpha_2\}}).$$

D'après la proposition 3.2 appliquée à $(\overline{f}_{\alpha_1, \alpha_2} - \overline{f}_{\alpha_2})$, avec $K = \{\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_j\}$, il existe $f_{\alpha_2, \alpha_i} \in E_{J\cup\{\alpha_2, \alpha_i\}}$ pour $i \in \{3, \dots, j\}$ tels que $\overline{f}_{\alpha_2, \alpha_i} := \varphi_J^{J\cup\{\alpha_2, \alpha_i\}}(f_{\alpha_2, \alpha_i})$ et

$$\overline{f}_{\alpha_2} = \overline{f}_{\alpha_1, \alpha_2} + \sum_{i \in \{3, \dots, j\}} (-1)^i \overline{f}_{\alpha_2, \alpha_i}.$$

On applique ensuite la proposition 3.2 à $(\overline{f}_{\alpha_1, \alpha_3} - \overline{f}_{\alpha_2, \alpha_3} + \overline{f}_{\alpha_3})$ qui appartient à

$$\Big(\sum_{i \in \{4, \dots, j\}} \varphi_J^{J\cup\{\alpha_i\}}(E_{J\cup\{\alpha_i\}})\Big) \cap \varphi_J^{J\cup\{\alpha_3\}}(E_{J\cup\{\alpha_3\}}).$$

On continue ainsi de proche en proche et l'injectivité des applications $\varphi_{J\cup\{\alpha_k\}}^{J\cup\{\alpha_k, \alpha_l\}}$, pour tout $k \in \{1, \dots, j\}$ et tout $l \in \{1, \dots, j\}$ tel que $l \neq k$ (cf. [BDKV]), montre que la suite (3.8) est bien exacte. □

Pour tout G-module E, nous notons $[E]$ son image dans le groupe de Grothendieck $\mathscr{R}(G)$.

Corollaire 3.9. *Soient $I \subset S$ et E un élément de $\mathscr{E}(I)$ (cf. not. (1.6)). Soit $E^\#$ le conoyau de l'application $d_{|I|}$ dans* (3.7). *Alors*

(a) *on a* $(-1)^{|I|}[E^\#] = D_G([E])$ *dans le groupe de Grothendieck* $\mathscr{R}(G)$;
(b) *si E est irréductible, $E^\#$ est aussi un G-module irréductible*;
(c) $(E^\#)^\#$ *est isomorphe à E comme G-module.*

Démonstration. L'assertion (a) est claire. Soit $I \subset S$ tel que $E \in \mathscr{E}(I)$. Soit donc $\sigma \in \operatorname{Irr}(L_I)$ telle que E est sous-quotient de la représentation induite $\mathbf{i}_{L_I}^G(\sigma)$. En utilisant l'assertion (a) et les assertions (2) et (4) du théorème 1.7, nous obtenons

$$[(\mathbf{i}_{L_I}^G(\sigma))^\#] = (-1)^{|I|} D_G([\mathbf{i}_{L_I}^G(\sigma)]) = [\mathbf{i}_{L_I}^G(\sigma)]. \tag{3.10}$$

Soient $[E_1], \ldots, [E_n]$ les composantes irréductibles de $[\mathbf{i}_{L_I}^G(\sigma)]$, i.e.,

$$[\mathbf{i}_{L_I}^G(\sigma)] = [E_1] \oplus \cdots \oplus [E_n].$$

On a alors

$$[(\mathbf{i}_{L_I}^G(\sigma))^\#] = [E_1^\#] \oplus \cdots \oplus [E_n^\#].$$

S'il existait $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $[E_i^\#]$ ne soit pas irréductible, alors $(\mathbf{i}_{L_I}^G(\sigma))^\#$ aurait plus de composantes irréductibles que $\mathbf{i}_{L_I}^G(\sigma)$, ce qui contredirait (3.10).

L'assertion (c) résulte du fait que D_G est une involution (cf. th. 1.7, assertion (3)). □

RÉFÉRENCES

[BDK] J.N. Bernstein, P. Deligne et D. Kazhdan, *Trace Paley-Wiener theorem for reductive p-adic groups*, J. Analyse Math. **47** (1986), 180–192.

[BDKV] J.N. Bernstein, P. Deligne, D. Kazhdan et M.-F. Vignéras, *Représentations des groupes réductifs sur un corps local*, Travaux en cours, Hermann, Paris, 1984.

[BZ] J.N. Bernstein et A. Zelevinski, *Induced representations of reductive p-adic groups* I, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **10** (1977), 441–472.

[BK] C.J. Bushnell and P.C. Kutzko, *The admissible dual of* $\mathbf{GL}(n)$ *via compact open subgroups*, Ann. of Math. Stud., no. 129, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.

[Car] R. Carter, *Finite groups of Lie type: conjugacy classes and complex characters*, Wiley-Interscience, 1985.

[Cas] W. Casselman, *Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups*, preprint.

[Cu] C. W. Curtis, *Truncation and duality in the character ring of a finite group of Lie type*, J. Algebra **62** (1980), 320–332.

[DL] P. Deligne and G. Lusztig, *Duality for representations of a reductive group over a finite field*, J. Algebra **74** (1982), 284–291.

[K] S. Kato, *Duality for representations of a Hecke algebra*, Proc. Amer. Math. Soc. **119** (1993), 951–946.

[P] K. Procter, *The Zelevinski duality conjecture for* $\mathbf{GL}_n$, Thesis, King's College, London, 1994.

[R] F. Rodier, *Sur les représentations non ramifiées des groupes réductifs p-adiques: l'exemple de* $\mathbf{GSp}(4)$, Bull. Math. Soc. France **116** (1988).

[Z] A. Zelevinski, *Induced representations of reductive p-adic groups* II, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **13** (1980), 154–210.

U.R.A. 762 (L.M.E.N.S.), Ecole Normale Supérieure, L.M.E.N.S.–D.M.I. (C.N.R.S. U.R.A. 762), 45 rue d'Ulm, F-75005 Paris, France

E-mail address: `aubert@dmi.ens.fr`