

COUPLES CONTACTO-SYMPLECTIQUES

GIANLUCA BANDE

ABSTRACT. We introduce a new geometric structure on differentiable manifolds. A *contact-symplectic pair* on a manifold M is a pair (α, η) where α is a Pfaffian form of constant class $2k + 1$ and η a 2-form of constant class $2h$ such that $\alpha \wedge d\alpha^k \wedge \eta^h$ is a volume form. Each form has a characteristic foliation whose leaves are symplectic and contact manifolds respectively. These foliations are transverse and complementary. Some other differential objects are associated to it. We give a local model and several existence theorems on nilpotent Lie groups, nilmanifolds and principal torus bundles. As a deep application of this theory, we give a negative answer to the famous Reeb's problem which asks if every vector field without closed 1-codimensional transversal on a manifold having contact forms is the Reeb vector field of a contact form.

INTRODUCTION

Ce travail a pour objectif d'introduire une nouvelle structure géométrique appelée *Couple contacto-symplectique*, et de s'en servir pour donner une réponse négative à une question posée en 1952 par Georges Reeb ([15]):

Dans une variété de contact (X, ω) , le champ de vecteurs "de Reeb" de ω est sans singularités et sans transversale fermée de codimension 1. Un champ de vecteurs sur une variété (sur laquelle il existe des formes de contact) vérifiant ces deux propriétés est-il le champ de Reeb d'une forme de contact?

La première partie concerne l'étude de certaines formes différentielles de classe constante au sens d'Elie Cartan ([4], [5]). Les problèmes globaux qui lui sont liés ont été peu abordés, sauf pour la classe constante maximale: formes de contact, formes symplectiques et formes de contact généralisé ([1]). Plus précisément, on appelle *couple contacto-symplectique (CCS)* de type (h, k) sur une variété M de dimension $2h + 2k + 1$, un couple (α, η) où α est une forme de Pfaff et η une 2-forme sur M telles que:

$$\alpha \wedge d\alpha^h \wedge \eta^k \text{ est une forme volume sur } M \\ d\eta = 0, \quad d\alpha^{h+1} = 0, \quad \eta^{k+1} = 0.$$

Les formes α et η sont alors nécessairement de classes constantes $2h + 1$ et $2k$. Pour $k = 0$, on retrouve les formes de contact, et pour $h = 0$ les structures cosymplectiques ([12]). C'est pourquoi, pour les problèmes d'existence, on s'intéressera plus particulièrement aux cas $h \geq 1$ et $k \geq 1$.

Received by the editors May 3, 2002 and, in revised form, September 26, 2002.

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 53D10, Secondary 57R17.

Key words and phrases. Contact-Symplectic Pair, Reeb field, foliations, contact geometry, symplectic geometry.

©2002 American Mathematical Society

À un tel couple sont naturellement associés divers objets différentiels. Les feuilletages caractéristiques \mathcal{F} (de α) et \mathcal{G} (de η) sont transverses et supplémentaires. Les feuilles de \mathcal{F} (resp. \mathcal{G}) sont munies de la forme symplectique induite par η (resp. de contact induite par α). Des notions plus générales de champ de Reeb, courbes de Legendre et crochets de Lie et de Poisson apparaissent. Nous verrons que les couples contacto-symplectiques d'un même type (h, k) admettent un modèle local, comme pour les formes de contact et les formes symplectiques.

Ce foisonnement de structures entremêlées pose avec acuité la question de l'existence de couples contacto-symplectiques. On donne des théorèmes d'existence sur des groupes de Lie nilpotents, sur des nilvariétés ainsi que sur les fibrés principaux en tores (M^5, B_2, T^3) , qui ont montré leur fécondité en géométrie de contact et symplectique (cf. [13], [14], [8], [9], [1]). Sur de tels fibrés où les variétés M^5 et B_2 sont supposées fermées, orientables de dimensions 5 et 2, on construit des couples contacto-symplectiques T^3 -invariants de types $(1, 1)$.

La dernière partie de cet article est consacrée au problème de Reeb. On montre le théorème suivant qui concerne les champs de Reeb des couples contacto-symplectiques:

Soient p, h deux entiers tels que $p \geq 2$ et $1 \leq h \leq p$, (M^{2p+1}, B_{2p}, S^1) un fibré principal en cercles d'espace total et de base fermés, connexes, orientables, muni d'un couple contacto-symplectique S^1 -invariant (α, η) de type $(h, p-h)$. Si le champ de Reeb X du couple est le champ qui engendre l'action de S^1 du fibré, alors X n'est le champ de Reeb d'aucun couple contacto-symplectique de type $(h', p-h')$ différent de $(h, p-h)$.

Sous ces mêmes hypothèses avec $h < p$, le champ X étant le champ de Reeb d'un couple contacto-symplectique est sans singularité et sans transversale fermée (i.e., compacte sans bord). Il n'est donc le champ de Reeb d'aucune forme de contact sur M^{2p+1} puisqu'une forme de contact correspond à un couple de type $(p, 0)$ qui est différent de $(h, p-h)$. Il existe bien entendu des exemples d'un tel fibré (portant des formes de contact); ce qui répond par la négative au problème de Reeb.

Une structure parente, celle de *couple de contact*, est développée dans [2] et [3].

Tous les objets différentiels dont il est question sont supposée C^∞ .

Je tiens à remercier M. Goze, A. Hadjar et R. Lutz pour leurs remarques et suggestions qui ont été très précieuses, N. A'Campo et Y. Eliashberg pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

1. COUPLES CONTACTO-SYMPLECTIQUES (CCS)

Soient M une variété de dimension $2k+2h+1$, α et η respectivement une 1-forme et une 2-forme sur M .

Définition 1.1. Le couple (α, η) est dit *contacto-symplectique* (en abrégé CCS) de type (h, k) si les conditions suivantes sont vérifiées:

$$\begin{aligned} \alpha \wedge d\alpha^h \wedge \eta^k &\text{ est une forme volume sur } M, \\ d\eta = 0, \quad d\alpha^{h+1} = 0, \quad \eta^{k+1} = 0. \end{aligned}$$

Les formes α et η sont alors de classes constantes respectivement égales à $2h+1$ et $2k$. Il est évident que *l'existence d'un tel couple implique que M est orientable*.

Par convention, pour $k=0$ une telle structure est réduite à la donnée d'une forme de contact. Si $k \geq 1$ et $h=0$, on retrouve les structures cosymplectiques ([12]). Dans la suite, on supposera donc toujours $k \geq 1, h \geq 1$.

L'exemple le plus simple de couple de contact est le suivant:

CCS "de Darboux": Si $y_1, \dots, y_{2h}, z, x_1, \dots, x_{2k}$ sont les fonctions coordonnées sur $R^{2h+2k+1}$, les formes

$$\alpha = dz + \sum_{i=1}^h y_{2i-1} dy_{2i} \quad \text{et} \quad \eta = \sum_{i=1}^k dx_{2i-1} \wedge dx_{2i}$$

déterminent un couple contacto-symplectique de type (h, k) sur $R^{2h+2k+1}$.

Cet exemple représente le modèle local des CCS de type (h, k) (voir §2).

1.1. Feuilletage caractéristique de α et de η . Soit (α, η) un CCS de type (h, k) sur M . À une telle structure sont naturellement associées deux distributions: celle des vecteurs qui annulent à la fois α et $d\alpha$, et celle des vecteurs qui annulent η . Ces distributions sont complètement intégrables car les formes α et η sont de classes constantes $2h + 1$ et $2k$. Elles déterminent les feuilletages caractéristiques de α et η , qu'on notera \mathcal{F} et \mathcal{G} .

Le feuilletage caractéristique de η est de codimension $2k$ et ses feuilles sont des variétés de contact car α induit une forme de contact sur chacune d'elles. Le feuilletage caractéristique de α est de codimension $2h + 1$ et ses feuilles sont des variétés symplectiques car η y induit une forme symplectique. Ce qui a motivé le choix du vocable "contacto-symplectique".

Les feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{G} sont évidemment transverses et supplémentaires.

1.2. Champ de Reeb d'un couple contacto-symplectique. Ce paragraphe concerne une généralisation naturelle du champ de Reeb classiquement associé aux formes de contact.

Théorème 1.2. Soit (α, η) un CCS de type (h, k) sur $M^{2h+2k+1}$. Alors il existe un unique champ de vecteurs Z sur M tel que:

$$\alpha(Z) = 1 \quad \text{et} \quad i(Z)(d\alpha^h \wedge \eta^k) = 0.$$

Le champ de Reeb du CCS de Darboux est $\partial/\partial z$. Pour $k = 0$, on retrouve le champ de Reeb d'une forme de contact au sens classique.

Preuve. Pour l'unicité, supposons qu'il existe deux champs Z, Y vérifiant

$$\alpha(Z) = \alpha(Y) = 1 \quad \text{et} \quad i(Z)(d\alpha^h \wedge \eta^k) = i(Y)(d\alpha^h \wedge \eta^k) = 0.$$

Le champ $Z - Y$ annule à la fois α et $d\alpha^h \wedge \eta^k$ et donc la forme volume $\alpha \wedge d\alpha^h \wedge \eta^k$, ce qui implique $Z = Y$.

Pour l'existence, considérons $\Omega = d\alpha^h \wedge \eta^k$. La dimension de son espace caractéristique est égale à 1 en tout point, car il s'agit d'une $(2k + 2h)$ -forme sans singularités sur une variété de dimension $2k + 2h + 1$. Soit $u_p \neq 0$ un vecteur tangent en un point p tel que $i(u_p)\Omega_p = 0$. En posant $Z_p = u_p/\alpha_p(u_p)$, on vérifie facilement que le champ de vecteurs Z ainsi construit est bien défini et vérifie $\alpha(Z) = 1$ et $i(Z)(d\alpha^h \wedge \eta^k) = 0$. □

Par un simple calcul, on démontre la proposition suivante, qui exprime une propriété remarquable du champ de Reeb des CCS.

Proposition 1.3. Le champ de Reeb Z vérifie les conditions suivantes:

$$\alpha(Z) = 1, \quad i(Z)d\alpha = 0, \quad i(Z)\eta = 0.$$

Il est donc tangent au feuilletage caractéristique de η et il est sur chaque feuille de ce feuilletage le champ de Reeb (au sens classique) de la forme de contact induite par α sur cette feuille.

Corollaire 1.4. *Un couple contacto-symplectique est invariant par le flot de son champ de Reeb.*

Le théorème suivant montre que le champ de Reeb d'un CCS a des propriétés similaires à celles du champ de Reeb d'une forme de contact (cf. [15]):

Théorème 1.5. *Le champ de Reeb Z d'un couple contacto-symplectique (α, η) de type (h, k) sur $M^{2h+2k+1}$ n'admet pas de transversale fermée (i.e., compacte sans bord) de codimension 1.*

Preuve. Puisque $h \geq 1$, on peut écrire $d\alpha^h \wedge \eta^k = d(\alpha \wedge d\alpha^{h-1} \wedge \eta^k)$. S'il existait une sous-variété F fermée, de codimension 1 et partout transverse au champ Z , la forme $d\alpha^h \wedge \eta^k = i(Z)\alpha \wedge d\alpha^h \wedge \eta^k$ serait une forme volume exacte sur F , ce qui contredirait la formule de Stokes. \square

D'après [5], les formes $d\alpha$ et η sont des invariants intégraux absolus pour le champ de Reeb Z (i.e., $i_Z(d\alpha) = 0, L_Z(d\alpha) = 0$ et $i_Z(\eta) = 0, L_Z(\eta) = 0$) tandis que la forme α est un invariant intégral relatif (i.e., $i_Z(d\alpha) = 0$).

1.3. Exemples de CCS.

- (1) Soient (M_1^{2h+1}, α) et (M_2^{2k}, η) une variété de contact et une variété symplectique respectivement. Le couple (α, η) est alors un CCS de type (h, k) sur $M_1^{2h+1} \times M_2^{2k}$ qui sera appelé "CCS produit".

Sur le tore T^5 , si $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \phi_1, \phi_2$ désignent les 5 coordonnées de R^5 , le couple (α, η) où $\alpha = \sin \phi_1 d\theta_1 - \cos \phi_1 d\theta_2$ et $\eta = d\phi_2 \wedge d\theta_3$ est un CCS produit dont le champ de Reeb est $Z = \sin \phi_1 \partial/\partial\theta_1 - \cos \phi_1 \partial/\partial\theta_2$.

- (2) Soient (M_2^{2h}, η) une variété symplectique et $(M_1^{2k+2n+1}, (\alpha, \beta))$ une variété munie d'un CCS de type (k, n) . Le couple $(\alpha, \beta + \eta)$ est alors un CCS de type $(k, n + h)$ sur la variété $M_1^{2k+2n+1} \times M_2^{2h}$.

2. MODÈLE LOCAL DES CCS

Pour construire un modèle local des CCS, on utilise l'existence des deux feuilletages supplémentaires décrits ci-dessus. On montre aisément le théorème suivant ([2]):

Théorème 2.1. *Soit (α, η) un couple contacto-symplectique de type (h, k) sur une variété M . En tout point p de M , il existe un voisinage ouvert V de p et un système de coordonnées sur V tels que le couple (α, η) sur V s'écrive*

$$\alpha_V = dx_{2h+1} + \sum_{i=1}^h x_{2i-1} dx_{2i}, \quad \eta_V = \sum_{i=1}^k dy_{2i-1} \wedge dy_{2i}.$$

L'ouvert V sera appelé *ouvert de Darboux*. Tout CCS est localement un CCS produit. Le champ de Reeb du modèle local est $\partial/\partial x_{2h+1}$.

3. AUTRES OBJETS DIFFÉRENTIELS ASSOCIÉS À UN CCS

Soit (α, η) un CCS de type (h, k) sur une variété M , \mathcal{F} (resp. \mathcal{G}) le feuilletage caractéristique de α (resp. η). À une telle structure sont naturellement associées les objets suivants:

3.1. Feuilletage caractéristique de $d\alpha$. La distribution des vecteurs qui annulent $d\alpha$ est aussi intégrable car $d\alpha$ est de classe constante $2h$. Elle détermine le *feuilletage caractéristique de $d\alpha$* , qui est de codimension $2h$.

Il est clair que sur chaque feuille du feuilletage caractéristique de $d\alpha$ la forme $\alpha \wedge \eta^k$ est une forme volume et donc le couple (α, η) restreint à chaque feuille détermine une structure cosymplectique. De plus, ces feuilles sont réunions de feuilles de \mathcal{F} .

Ce feuilletage a la propriété remarquable suivante:

Proposition 3.1. *Si le feuilletage caractéristique de $d\alpha$ a une feuille fermée F , alors toutes les feuilles de \mathcal{F} contenues dans F sont difféomorphes. De plus la feuille F se fibre sur le cercle.*

Preuve. Il suffit de remarquer que α restreinte à F est une forme de Pfaff fermée sans singularités et donc les feuilles de son feuilletage caractéristique sur F sont difféomorphes. Mais les feuilles du feuilletage caractéristique de α sur F sont exactement les feuilles de \mathcal{F} contenues dans F . L'existence d'une telle forme de Pfaff sur F qui est fermée implique que F se fibre sur le cercle ([16]). \square

3.2. Crochets de Lie et de Poisson d'un CCS. En utilisant la forme de contact induite par α sur chaque feuille du feuilletage caractéristique de η , on peut munir une variété contacto-symplectique d'un crochet de Lie. Plus précisément, à toute fonction f sur M , on peut associer un champ de vecteurs de la manière suivante:

Sur chaque feuille G du feuilletage \mathcal{G} , il existe un unique champ de vecteurs X tangent à la feuille et vérifiant les conditions (cf. [11], [12])

$$\alpha_G(X) = f|_G \quad \text{et} \quad L_X \alpha_G \wedge \alpha_G = 0,$$

où α_G désigne la forme induite par α sur la feuille G .

Le champ de vecteurs obtenu sur M est bien défini, C^∞ et sera noté $X_{f,\alpha}$.

On peut maintenant définir le crochet par rapport à α de la manière suivante:

Définition 3.2. On appelle crochet de $f, g \in C^\infty(M)$ par rapport à α , la fonction

$$\{f, g\}_\alpha = \alpha([X_{f,\alpha}, X_{g,\alpha}]).$$

On vérifie facilement les propriétés usuelles du crochet de Lie.

D'une manière similaire on construit un crochet de Poisson $\{f, g\}_\eta$ sur les feuilles symplectiques du feuilletage caractéristique de α .

3.3. Courbes de Legendre. Elles sont définies ainsi:

Définition 3.3. Une courbe de Legendre du CCS (α, η) est une courbe γ dans M , dérivable par morceaux et telle que

$$\alpha(\dot{\gamma}) = 0 \quad \text{et} \quad i(\dot{\gamma})\eta \neq 0.$$

Ainsi la courbe doit être tangente au noyau de α , mais transverse au feuilles de contact. Ces courbes permettent de relier les points comme dans le cas des structures de contact:

Proposition 3.4. *Deux points quelconques d'une variété connexe $M^{2h+2k+1}$ munie d'un CCS (α, η) de type (h, k) , peuvent être joints par une courbe de Legendre.*

Preuve. Par connexité, il suffit de montrer que l'on peut relier deux points quelconques d'un ouvert de Darboux par une telle courbe. En effet, soient $(x_1^0, \dots, x_{2h}^0, z^0, y_1^0, \dots, y_{2k}^0)$ et $(x_1^1, \dots, x_{2h}^1, z^1, y_1^1, \dots, y_{2k}^1)$ deux points de $R^{2h+2k+1}$ muni du CCS,

$$\alpha = dz + \sum_{i=1}^h x_{2i-1} dx_{2i} \quad \text{et} \quad \eta = \sum_{i=1}^k dy_{2i-1} \wedge dy_{2i}.$$

Si $(y_1^0, \dots, y_{2k}^0) \neq (y_1^1, \dots, y_{2k}^1)$, il suffit de considérer la courbe

$$\gamma(t) = (\xi(t), (y_1^0, \dots, y_{2k}^0) + t(y_1^1 - y_1^0, \dots, y_{2k}^1 - y_{2k}^0)),$$

où $\xi(t)$ est une courbe de Legendre pour la forme de contact induite par α sur R^{2h+1} et reliant le point $(x_1^0, \dots, x_{2h}^0, z^0)$ à $(x_1^1, \dots, x_{2h}^1, z^1)$.

Si $(y_1^0, \dots, y_{2k}^0) = (y_1^1, \dots, y_{2k}^1)$, on relie chacun de ces deux points, comme précédemment, à un troisième point $(x_1^2, \dots, x_{2h}^2, z^2, y_1^2, \dots, y_{2k}^2)$ vérifiant bien entendu $(y_1^2, \dots, y_{2k}^2) \neq (y_1^1, \dots, y_{2k}^1)$ et $(y_1^2, \dots, y_{2k}^2) \neq (y_1^0, \dots, y_{2k}^0)$. □

3.4. Presque structure de contact. Rappelons qu'une presque structure de contact sur une variété de dimension $2n + 1$ est la donnée d'un couple (ω, Φ) où ω est une forme de Pfaff et Φ une 2-forme telles que $\omega \wedge \Phi^n$ soit une forme volume.

Si (α, η) est un CCS de type (h, k) sur M , le couple $(\alpha, d\alpha + \eta)$ est une presque structure de contact sur M car:

$$\alpha \wedge (d\alpha + \eta)^{h+k} = C_{h+k}^h \alpha \wedge d\alpha^h \wedge \eta^k \neq 0.$$

4. QUELQUES OBSTRUCTIONS TOPOLOGIQUES

Soit (α, η) un CCS de type (h, k) sur une variété $M^{2h+2k+1}$, avec $h \geq 1$ et $k \geq 1$. D'après [7], comme il existe une presque structure de contact sur M , alors:

Proposition 4.1. *Le groupe structural du fibré tangent à $M^{2h+2k+1}$ est réduit à $\{1\} \times U(h+k)$, et sa 3ème classe de Stiefel-Whitney est nulle.*

Proposition 4.2. *Si M est fermée, alors on a $H^{2h+1}(M, R) \neq 0$ et, pour tout $l \leq k$, $H^{2l}(M, R) \neq 0$.*

Preuve. L'une des conditions $H^{2k+1}(M, R) = 0$ ou $H^{2l}(N, R) = 0$ pour un certain $l \leq k$ impliquerait que la forme volume $\alpha \wedge d\alpha^h \wedge \eta^k$ est exacte, ce qui est impossible si M est fermée. □

Notons \mathcal{F} et \mathcal{G} les feuilletages caractéristiques de α et η respectivement. Alors:

Proposition 4.3. *Si N est une feuille fermée de \mathcal{F} , alors $H^{2l}(N, R) \neq 0$ pour tout $l \leq k$.*

Preuve. Soit N une feuille fermée de \mathcal{F} . La forme η y induit une forme symplectique, d'où le résultat. □

Rappelons que sur toute sphère S^{2h+1} il existe une forme de contact (i.e., un CCS de type $(h, 0)$). Par ailleurs, d'après la proposition 4.2,

Corollaire 4.4. *Aucune sphère ne porte un CCS de type (h, k) avec $k \geq 1$.*

5. EXEMPLES DE GROUPES DE LIE NILPOTENTS ET DE NILVARIÉTÉS MUNIS D'UN CCS

Les groupes de Lie nilpotents et les nilvariétés nous fournissent des exemples intéressants de CCS. On présente ci-dessous quelques exemples de construction en dimension 5 et 7 qui peuvent éventuellement s'étendre en dimension supérieure. Pour cela, on utilise une classification en dimensions 5 et 7 des algèbres de Lie nilpotentes ([6]).

5.1. CCS sur les groupes de Lie. Pour décrire l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie, on écrira les crochets des champs fondamentaux. Les crochets non écrits sont sous entendus nuls. Les champs fondamentaux seront notés X_i et leurs formes duales ω^i .

Exemple 5.1. Considérons l'algèbre de Lie n_5^6 de dimension 5. Ses crochets non nuls sont les suivants:

$$[X_1, X_5] = X_4 \quad \text{et} \quad [X_1, X_3] = X_2.$$

Le couple (α, η) , où $\eta = \omega^4 \wedge \omega^5$ et $\alpha = \omega^2$, induit un CCS invariant de type (1, 1) sur le groupe de Lie correspondant.

Exemple 5.2. Sur l'algèbre de Lie $n_7^{5,1}$ de dimension 7, dont les crochets non nuls sont

$$\begin{aligned} [X_5, X_7] = X_3, \quad [X_4, X_5] = X_2, \quad [X_5, X_6] = [X_6, X_7] = X_2, \\ [X_1, X_j] = X_{j-1} \quad \text{pour} \quad j = 3, 4, 5, 7, \end{aligned}$$

les formes $\eta = \omega^6 \wedge \omega^7$ et $\alpha = \omega^2$ déterminent un CCS invariant de type (2, 1) sur le groupe de Lie correspondant.

Exemple 5.3. Soit $n_7^{8,4}$ l'algèbre de Lie de dimension 7, dont les crochets non nuls sont les suivants

$$[X_1, X_j] = X_{j-1} \quad \text{pour} \quad j = 3, 4, 5, 7.$$

Les formes $\eta = \omega^4 \wedge \omega^5 + \omega^6 \wedge \omega^7$ et $\alpha = \omega^2$ déterminent un CCS invariant de type (1, 2) sur le groupe de Lie correspondant.

5.2. CCS sur les nilvariétés. Les algèbres de Lie ci-dessus sont toutes rationnelles. L'unique groupe de Lie connexe et simplement connexe correspondant à chacune admet des *sous-groupes discrets cocompacts*. Les nilvariétés obtenues (quotient de ces groupes par ces sous-groupes) donnent des *exemples de variétés fermées* munies de CCS.

6. THÉORÈMES D'EXISTENCE DE CCS INVARIANTS SUR LES FIBRÉS PRINCIPAUX (M^5, B_2, T^3)

Comme pour les formes de contact ([13], [14], [8], [9]) ainsi que les formes de contact généralisé ([1]), on restreint la recherche en utilisant l'invariance sur les fibrés en tores pour donner des théorèmes d'existence de CCS de type (1, 1), les autres cas en dimension 5 se réduisant aux formes de contact et aux structures cosymplectiques.

Considérons un fibré principal en tores (M^5, B_2, T^3) d'espace total et base connexes, fermés, orientables, de projection π .

Soit $\theta = \sum_{i=1}^3 \theta^i \otimes e_i$ une forme de connexion de courbure $\Omega = \sum_{i=1}^3 \Omega^i \otimes e_i$ et X_1, X_2, X_3 les champs de vecteurs fondamentaux engendrés par e_1, e_2, e_3 .

Soient α, η une forme de Pfaff et une 2-forme sur M^5 respectivement. Elles sont invariantes si et seulement si elles s'écrivent de la manière suivante:

$$\begin{aligned}\alpha &= \pi^*(\beta) + \pi^*(f_1)\theta^1 + \pi^*(f_2)\theta^2 + \pi^*(f_3)\theta^3, \\ \eta &= \pi^*(\gamma) + \pi^*(\varepsilon_1)\theta^1 + \pi^*(\varepsilon_2)\theta^2 + \pi^*(\varepsilon_3)\theta^2 + \pi^*(g_1)\theta^2 \wedge \theta^3 \\ &\quad + \pi^*(g_2)\theta^1 \wedge \theta^3 + \pi^*(g_3)\theta^1 \wedge \theta^2,\end{aligned}$$

où γ est une 2-forme, β, ε_i , des formes de Pfaff et f_i, g_i des fonctions sur B_2 .

Le couple (α, η) est un CCS de type $(1, 1)$ si et seulement si les quatre conditions suivantes (sur la base) sont vérifiées:

Condition 6.1.

$$\begin{aligned}\beta \wedge (g_1 df_1 - g_2 df_2 + g_3 df_3) + (g_1 f_1 - g_2 f_2 + g_3 f_3) (d\beta + f_1 \Omega^1 + f_2 \Omega^2 + f_3 \Omega^3) \\ + \varepsilon_1 \wedge (f_2 df_3 - f_3 df_2) + \varepsilon_2 \wedge (f_3 df_1 - f_1 df_3) + \varepsilon_3 \wedge (f_1 df_2 - f_2 df_1) \neq 0 \quad \text{partout.}\end{aligned}$$

Condition 6.2.

$$df_1 \wedge df_2 = df_1 \wedge df_3 = df_2 \wedge df_3 = 0.$$

Condition 6.3.

$$\begin{aligned}dg_1 = dg_2 = dg_3 = 0 \quad (\text{les } g_i \text{ sont des constantes}), \\ d\varepsilon_1 - g_2 \Omega^3 - g_3 \Omega^2 = 0, \\ d\varepsilon_2 - g_1 \Omega^3 + g_3 \Omega^1 = 0, \\ d\varepsilon_3 + g_1 \Omega^2 + g_2 \Omega^1 = 0.\end{aligned}$$

Condition 6.4.

$$\begin{aligned}g_1 \gamma - \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3 = g_2 \gamma - \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_3 = g_3 \gamma - \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 = 0, \\ g_1 \varepsilon_1 - g_2 \varepsilon_2 + g_3 \varepsilon_3 = 0.\end{aligned}$$

On appelle ensemble singulier du couple (α, η) l'ensemble des zéros de la fonction

$$(\alpha \wedge \eta)(X_1, X_2, X_3) = \pi^*(g_1 f_1 - g_2 f_2 + g_3 f_3),$$

c'est-à-dire $\pi^{-1}(\Sigma)$ où Σ est l'ensemble sur lequel s'annule $h = g_1 f_1 - g_2 f_2 + g_3 f_3$.

Géométriquement, c'est l'ensemble des point p de M^5 sur lesquels la forme induite par $\alpha \wedge \eta$ sur la fibre contenant p n'est plus une forme volume.

6.1. Nature de Σ . Si Σ n'est pas vide et ne coïncide pas avec la base, alors l'une au moins des constantes g_i doit être non nulle. On suppose alors $g_2 \neq 0$ et à partir de la condition 6.4 on trouve: $f_2 = (g_1 f_1 + g_3 f_3 - h)/g_2$, $\varepsilon_2 = (g_1 \varepsilon_1 + g_3 \varepsilon_3)/g_2$. La condition 6.1 devient

$$\begin{aligned}g_2 \beta \wedge dh + h (g_2 d\beta + g_2 f_1 \Omega^1 + (g_1 f_1 + g_3 f_3 + h) \Omega^2 + g_2 f_3 \Omega^3) \\ - \varepsilon_1 \wedge (h df_3 - f_3 dh) + \varepsilon_3 \wedge (h df_1 - f_1 dh) \neq 0.\end{aligned}$$

Sur Σ , on aura $(g_2 \beta - f_3 \varepsilon_1 - f_1 \varepsilon_3)_\Sigma \wedge dh_\Sigma \neq 0$.

Ceci implique que l'ensemble Σ (si $\Sigma \neq \emptyset$ et $\Sigma \neq B_2$) est une sous-variété fermée, orientable de codimension 1, et donc une réunion finie de cercles.

La fonction h change de signe quand on traverse Σ , et donc l'ensemble Σ vérifie la propriété évidente suivante:

Condition 6.5. Chaque composante connexe de $B_2 - \Sigma$ peut être munie d'un signe + ou - (le signe de la fonction h), de façon que deux composantes adjacentes aient des signes opposés.

Pour l'ensemble singulier S (de projection Σ sur B_2) d'un CCS invariant on est nécessairement dans l'un des trois cas suivants:

- (1) Σ coïncide avec B_2 ,
- (2) Σ est vide,
- (3) Σ est une sous-variété régulière fermée, orientable de codimension 1 de B_2 vérifiant la condition 6.5.

On verra dans la suite que tous ces trois cas sont effectivement possibles.

6.2. Théorèmes d'existence. La donnée d'un ensemble Σ vérifiant l'un de trois cas précédents, permet de construire des CCS invariants ayant $\pi^{-1}(\Sigma)$ comme ensemble singulier.

6.2.1. *Cas où $\Sigma = B_2$.* La base B_2 est nécessairement le tore T^2 , comme le montre le théorème suivant:

Théorème 6.6. *Soit (M^5, B_2, T^3) un fibré principal d'espace total et base connexes, fermés, orientables. Il existe un CCS invariant (α, η) de type $(1, 1)$ dont l'ensemble singulier coïncide avec B_2 , si et seulement si B_2 est le tore T^2 .*

Preuve. Il s'agit d'avoir des f_i et ε_i vérifiant les cinq conditions 6.1, 6.2, 6.3, 6.4 et $h \equiv 0$. On a nécessairement $g_1 = g_2 = g_3 = 0$, et les conditions deviennent:

- (1) $\varepsilon_1 \wedge (f_2 df_3 - f_3 df_2) + \varepsilon_2 \wedge (f_3 df_1 - f_1 df_3) + \varepsilon_3 \wedge (f_1 df_2 - f_2 df_1) \neq 0$,
- (2) $df_1 \wedge df_2 = df_1 \wedge df_3 = df_2 \wedge df_3 = 0$,
- (3) $d\varepsilon_1 = d\varepsilon_2 = d\varepsilon_3 = 0$,
- (4) $\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3 = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_3 = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 = 0$.

Puisque la première condition implique que les formes $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et ε_3 ne peuvent pas s'annuler simultanément, et la quatrième condition implique qu'elles sont colinéaires, l'intersection de leurs noyaux est de dimension 1. Ce noyau détermine sur B_2 un champ de directions, et donc un feuilletage de dimension 1. Mais l'existence d'un tel feuilletage, B_2 étant connexe et fermée, implique que B_2 est un tore.

Réciproquement, si la base du fibré est un tore, on choisit $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = d\theta^1$, $f_1 = \sin \theta^2$, $f_2 = \cos \theta^2$ et $f_3 = 0$. □

6.2.2. *Cas où Σ est vide.* On a une contrainte sur le fibré:

Théorème 6.7. *Soit (M^5, B_2, T^3) un fibré principal d'espace total et base connexes, fermés, orientables. Il existe un CCS invariant (α, η) de type $(1, 1)$ d'ensemble singulier vide si et seulement si les classes caractéristiques du fibré ne sont pas toutes nulles.*

Il n'y a donc pas de telles CCS sur des fibrés triviaux $B_2 \times T^3$.

Preuve. Supposons d'abord qu'il existe un couple contacto-symplectique invariant (α, η) de type $(1, 1)$ dont l'ensemble singulier soit vide. Dans ce cas, au moins l'une des constantes g_1, g_2, g_3 est non nulle. Si $g_2 \neq 0$, on aura

$$f_2 = (g_1 f_1 + g_3 f_3 + h) / g_2 \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = (g_1 \varepsilon_1 + g_3 \varepsilon_3) / g_2.$$

La condition 6.1 peut donc s'écrire ainsi:

$$g_2 h^2 d(\beta/h) + h (g_2 f_1 \Omega^1 + (g_1 f_1 + g_3 f_3 + h) \Omega^2 + g_2 f_3 \Omega^3) - \varepsilon_1 \wedge (h df_3 - f_3 dh) + \varepsilon_3 \wedge (h df_1 - f_1 dh) \neq 0 \quad \text{partout,}$$

or

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 \wedge (hdf_3 - f_3dh) &= -h^2d\left(\frac{f_3}{h}\varepsilon_1\right) + hf_3d\varepsilon_1, \\ \varepsilon_3 \wedge (hdf_1 - f_1dh) &= -h^2d\left(\frac{f_1}{h}\varepsilon_1\right) + hf_1d\varepsilon_3.\end{aligned}$$

De la condition 6.3 on obtient

$$g\left[d\left(\frac{\beta}{h}\right) - d\left(\frac{f_3}{h}\varepsilon_1\right) - d\left(\frac{f_1}{h}\varepsilon_1\right)\right] + \Omega^2 \neq 0.$$

Ainsi $\int \Omega^2 \neq 0$, d'où $[\Omega^2] \neq 0$.

Réciproquement, supposons qu'au moins l'une des classes caractéristiques est non nulle (celle de Ω^1 par exemple). Considérons les formes

$$\begin{aligned}\alpha &= \pi^*(\beta) + \pi^*(g_1)\theta^1 + \pi^*(-g_2)\theta^2 + \pi^*(g_3)\theta^3, \\ \eta &= \pi^*(\varepsilon_1)\theta^1 + \pi^*(\varepsilon_2)\theta^2 + \pi^*(\varepsilon_3)\theta^2 + \pi^*(g_1)\theta^2 \wedge \theta^3 \\ &\quad + \pi^*(g_2)\theta^1 \wedge \theta^3 + \pi^*(g_3)\theta^1 \wedge \theta^2,\end{aligned}$$

où g_i sont des constantes et β, ε_i des formes de Pfaff sur B_2 .

Alors (α, η) est un CCS si et seulement si on a

$$\begin{aligned}(g_1^2 + g_2^2 + g_3^2) \cdot (d\beta + g_1\Omega^1 - g_2\Omega^2 + g_3\Omega^3) &\neq 0, \\ d\varepsilon_1 - g_2\Omega^3 - g_3\Omega^2 &= 0, \\ d\varepsilon_2 - g_1\Omega^3 + g_3\Omega^1 &= 0, \\ d\varepsilon_3 + g_1\Omega^2 + g_2\Omega^1 &= 0, \\ \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3 = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_3 = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 &= 0, \\ g_1\varepsilon_1 - g_2\varepsilon_2 + g_3\varepsilon_3 &= 0.\end{aligned}$$

On peut supposer $\Omega^3 = 0$, quitte à faire le changement de connexion suivant:

$$\tilde{\theta}^1 = \theta^1, \tilde{\theta}^2 = \theta^2, \tilde{\theta}^3 = \pi^*(\nu) + \pi^*(a)\theta^1 + \theta^3,$$

où $a = -(\int \Omega^3)/\int \Omega^1$ et ν une primitive de la forme exacte $-(a\Omega^1 + \Omega^3)$.

En posant $g_3 = 0$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ les conditions deviennent:

$$\begin{aligned}d\varepsilon_3 + g_1\Omega^2 + g_2\Omega^1 &= 0, \\ (g_1^2 + g_2^2) \cdot (d\beta + g_1\Omega^1 - g_2\Omega^2) &\neq 0.\end{aligned}$$

Soit l un réel non nul. Puisque $\int \Omega^1 \neq 0$, il existe un unique couple $(g_1, g_2) \neq (0, 0)$ de sorte que

$$g_1 \int \Omega^2 + g_2 \int \Omega^1 = 0 \quad \text{et} \quad g_1 \int \Omega^1 - g_2 \int \Omega^2 = l.$$

Soient ε_3 telle que $d\varepsilon_3 + g_1\Omega^2 + g_2\Omega^1 = 0$, et Φ une forme volume d'intégrale égale à 1. On a

$$\int l\Phi = \int (g_1\Omega^1 - g_2\Omega^2).$$

Ceci implique l'existence d'un β vérifiant $d\beta + g_1\Omega^1 - g_2\Omega^2 \neq 0$. □

6.2.3. *Cas où Σ est une sous-variété de codimension 1 de B_2 .* Dans ce cas il n’y a aucune contrainte sur le fibré et on a le

Théorème 6.8. *Soit (M^5, B_2, T^3) un fibré principal en tores d’espace total et base connexes, fermés, orientables. Soit Σ une sous-variété régulière fermée orientable de codimension 1 de B_2 vérifiant la propriété 6.5. Alors il existe sur M^5 un CCS invariant (α, η) de type $(1, 1)$ dont l’ensemble singulier est $\pi^{-1}(\Sigma)$.*

Pour la démonstration, on a besoin du lemme suivant ([2] et [13]).

Lemme 6.9. *Soit B une variété fermée orientable de dimension 2 et Σ une sous-variété régulière fermée, orientable de codimension 1 vérifiant la condition 6.5. Il existe alors une fonction h et une forme de Pfaff β telles que $\Sigma = h^{-1}(0)$ et la forme $h \cdot d\beta + \beta \wedge dh$ est une forme volume sur B .*

Preuve. (du Théorème) Il sera démontré en plusieurs étapes. Il s’agit de trouver $f_i, g_i, \varepsilon_i, \beta, \gamma$ de sorte que les conditions 6.1, 6.2, 6.3 et 6.4 soient satisfaites ainsi que $h^{-1}(0) = \Sigma$.

Première étape: D’après le lemme 6.9, il existe β_0 et h tels que

$$h^{-1}(0) = \Sigma \quad \text{et} \quad \beta_0 \wedge dh + h d\beta_0 \neq 0.$$

Deuxième étape: On construit les fonctions f_i . On pose $f = h / (g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)$, $f_1 = g_1 f$, $f_2 = -g_2 f$ et $f_3 = g_3 f$, où les g_i sont des constantes non toutes nulles. Ainsi la condition 6.2 sera satisfaite.

Troisième étape: Construisons les constantes g_i et les formes $\gamma, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Si les classes caractéristiques du fibré sont toutes nulles, posons $\Omega^i = d\xi^i$ et choisissons g_3 non nulle. Soient

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= g_2 \xi^3 + g_3 \xi^2, & \varepsilon_2 &= g_1 \xi^3 - g_3 \xi^1, \\ \varepsilon_3 &= (g_2 \varepsilon_2 - g_1 \varepsilon_1) / g_3 & \text{et} & \quad \gamma = (1/g_3) \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2. \end{aligned}$$

Les conditions 6.1, 6.2, 6.3 et 6.4 sont satisfaites. Si l’une des classes caractéristiques (celle Ω^1 par exemple) n’est pas nulle, on peut supposer $\Omega^3 = 0$ via un changement de connexion comme au paragraphe précédent.

Les conditions 6.3 et 6.4 deviennent alors

$$\begin{aligned} d\varepsilon_1 - g_3 \Omega^2 &= 0, & d\varepsilon_2 + g_3 \Omega^1 &= 0, & d\varepsilon_3 + g_1 \Omega^2 + g_2 \Omega^1 &= 0, \\ g_1 \gamma - \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3 &= g_2 \gamma - \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_3 = g_3 \gamma - \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 &= 0, \\ g_1 \varepsilon_1 - g_2 \varepsilon_2 + g_3 \varepsilon_3 &= 0. \end{aligned}$$

On pose

$$g_3 = 0, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0, \quad \gamma = 0 \quad \text{et} \quad g_2 = -g_1 \left(\int \Omega^2 \right) / \left(\int \Omega^1 \right).$$

La dernière condition implique que les formes $g_1 \Omega^2$ et $g_2 \Omega^1$ sont cohomologues, d’où l’existence de ε_3 telle que $d\varepsilon_3 + g_1 \Omega^2 + g_2 \Omega^1 = 0$.

Pour terminer, on pose $\beta = r\beta_0$ où le réel r est choisi suffisamment grand pour que la condition 6.1 soit satisfaite. □

7. PROBLÈME DE REEB

Dans ce paragraphe on utilise la théorie des CCS pour répondre à un célèbre problème posé par G. Reeb ([15]):

On sait que le champ de Reeb d'une forme de contact est sans singularité et n'admet pas de transversale fermée de codimension 1. Sur une variété, ayant des formes de contact, un champ de vecteur sans singularités et n'admettant pas de transversale fermée de codimension 1 est-il le champ de Reeb d'une forme de contact?

Les théorèmes suivants donnent en particulier une réponse négative à cette question.

Théorème 7.1. *Soient $p \geq 2$, $1 \leq k \leq p$, (M^{2p+1}, B_{2p}, S^1) un fibré principal en cercles d'espace total fermé, connexe, orientable et (α, η) un couple contacto-symplectique invariant de type $(k, p - k)$. Si le champ de Reeb du couple est le champ X qui engendre l'action, alors X n'est le champ de Reeb d'aucun couple contacto-symplectique de type différent de $(k, p - k)$.*

Remarque 7.2. Comme cas particulier, avec $k < p$, le champ X n'est le champ de Reeb d'aucune forme de contact, puisqu'une forme de contact est un CCS de type $(p, 0)$.

Preuve. Soient π la projection du fibré et θ une forme de connexion de courbure Ω . Alors le couple va s'écrire de la manière suivante:

$$\alpha = \pi^*(\beta) + \pi^*(f)\theta \quad \text{et} \quad \eta = \pi^*(\mu) + \pi^*(\varepsilon) \wedge \theta$$

où f est une fonction, β et ε des formes de Pfaff et μ une 2-forme sur B_{2p} . Puisque X est le champ de Reeb du couple (α, η) , on aura

$$\alpha(X) = \theta(X) = 1 \quad \text{et} \quad i(X)d\alpha = i(X)\eta = i(X)d\theta = 0$$

d'où $f = 1$ et $\varepsilon = 0$. Avec un changement de connexion on peut se ramener au cas où $\alpha \equiv \theta$. Puisque (α, η) est un CCS, on a les conditions suivantes sur la base:

$$\mu^{p-k+1} = 0, \quad d\mu = 0, \quad \Omega^{k+1} = 0, \quad \Omega^k \wedge \mu^{p-k} \neq 0.$$

Supposons maintenant par l'absurde que X soit le champ de Reeb d'un couple contacto-symplectique (γ, σ) de type $(h, p - h)$, avec $h \neq k$. Le couple (γ, σ) est invariant par le flot de son champ de Reeb X , donc invariant par l'action du fibré. Ceci implique qu'il est de la forme:

$$\gamma = \pi^*(\xi) + \theta \quad \text{et} \quad \sigma = \pi^*(\sigma_0).$$

Or (γ, σ) est un CCS de type $(h, p - h)$, d'où:

$$(d\xi + \Omega)^h \wedge (\sigma_0)^{p-h} \neq 0, \\ (d\xi + \Omega)^{h+1} = 0, \quad (\sigma_0)^{p-h+1} = 0 \quad \text{et} \quad d\sigma_0 = 0.$$

Premier cas: Si $h \geq k + 1$, la forme $(d\xi + \Omega)^h$ est exacte car $\Omega^h = 0$. Ainsi la forme $(d\xi + \Omega)^h \wedge (\sigma_0)^{p-h}$ serait exacte aussi car σ_0 est fermée. Ce qui est impossible puisqu'il s'agit d'une forme volume sur la base qui est fermée.

Deuxième cas: Si $h \leq k - 1$, la condition $(d\xi + \Omega)^{h+1} = 0$ impliquerait l'exactitude de Ω^{h+1} . En utilisant $\Omega^k \wedge \mu^{p-k} \neq 0$, on aurait encore une contradiction. \square

Une conséquence immédiate est le

Théorème 7.3. *Il existe une variété (munie d'une forme de contact) ayant un champ de vecteurs sans singularité, n'admettant aucune transversale fermée de codimension 1 et qui n'est le champ de Reeb d'aucune forme de contact.*

Preuve. Il suffit, par exemple, de considérer la fibration de Hopf de la sphère de dimension 3 sur celle de dimension 2 et d'ajouter un facteur S^2 . On aura alors le fibré principal $(S^3 \times S^2, S^2 \times S^2, S^1)$. Soit α une forme de connexion et de contact sur le fibré de Hopf (S^3, S^2, S^1) ; il en existe d'après [13] puisque la classe caractéristique du fibré est non nulle. Soit μ une forme volume sur S^2 . Le couple (α, μ) est un CCS invariant de type $(1, 1)$ sur le fibré $(S^3 \times S^2, S^2 \times S^2, S^1)$, dont le champ de Reeb engendre l'action de S^1 du fibré. Il est donc sans singularités, sans transversale fermée et d'après la remarque 7.2, il n'est le champ de Reeb d'aucune forme de contact sur $S^3 \times S^2$.

Par ailleurs on sait bien que sur $S^3 \times S^2$ il existe des formes de contact car il peut être vu comme le fibré cotangent unitaire de S^3 . \square

RÉFÉRENCES

- [1] Bande G., *On generalized contact forms*, Differential Geom. Appl., 11, 257-263, 1999. MR **2001g**:53135
- [2] Bande G., *Formes de contact généralisé, couples de contact et couples contacto-symplectiques*, Thèse de Doctorat, Université de Haute Alsace, 2000.
- [3] Bande G. et Hadjar A., *Couples de contact*, à paraître.
- [4] Cartan E., *Les systèmes différentiels et leurs applications géométriques*, Hermann et Cie., Paris, 1945. MR **7**:520d
- [5] Cartan E., *Leçons sur les invariants intégraux*, Hermann, Paris, 1922.
- [6] Goze M. and Khakimdjano Y., *Nilpotent Lie Algebras, Mathematics and its Applications 361*, Kluwer Academic Publisher Group, Dordrecht, 1996. MR **97e**:17017
- [7] Gray J.W., *Some global properties of contact structures*, Ann. of Math., 69, 421-450, 1959. MR **22**:3016
- [8] Hadjar A., *Sur un problème d'existence relatif de formes de contact invariantes en dimension trois*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 42, 891-904, 1992.
- [9] Hadjar A., *Sur les structure de contact régulières en dimension trois*, Trans. Amer. Math. Soc., 347, 2473-2480, 1995. MR **95k**:57030
- [10] Kobayashi S., *Principal fibre bundles with the 1-dimensional toroidal group*, Tohoku Math. J., 8, 29-45, 1956. MR **18**:328a
- [11] Libermann P. et Marle C.M., *Géométrie symplectique, bases théoriques de la mécanique*, I, II, III, IV, Publications Mathématiques de l'Université Paris VII, 1987. MR **88g**:58049a; MR **88g**:58049b; MR **88g**:58049c; MR **88g**:58049d
- [12] Libermann P., *Sur les automorphismes infinitésimaux des structures symplectiques et des structures de contact*, Colloque Géom. Diff. Globale, Bruxelles, 37-59, 1959. MR **22**:9919
- [13] Lutz R., *Structures de contact sur les fibrés principaux en cercles en dimension trois*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 27, 1-15, 1977. MR **57**:17668
- [14] Lutz R., *Sur la géométrie des structures de contact invariantes*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 29, 283-306, 1979. MR **82j**:53067
- [15] Reeb G., *Sur certaines propriétés topologiques des trajectoires des systèmes dynamiques*, Acad. Roy. Belgique Cl. Sci. Mèm. Coll. in 8^o, 27, 1952. MR **15**:336b
- [16] Tischler D., *On fibering certain foliated manifolds over S^1* , Topology, 9, 153-154, 1970. MR **41**:1069

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI, DIP. MAT., VIA OSPEDALE 72, 09129 CAGLIARI, ITALY
E-mail address: gbande@unica.it