PROPRIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES AFFINES DES RÉSEAUX

PAVEL DRĂGILĂ

1. Introduction. Les réseaux conjugués ont été étudié d'abord dans l'espace S_3 au point de vue projectif. Ainsi Dupin, au commencement du XIX-me siècle, a introduit la notion de tangentes conjugués d'une surface quelconque de notre espace et puis il a étudié aussi les lignes conjuguées des surfaces. Environ dans la même époque Monge a commencé l'étude des congruences des droites. Un peu plus tard Weingarten, Ribaucour et Darboux ont étudié les propriétés géométriques projectives des diverses classes des réseaux, dans l'espace S_3 , et puis aussi dans l'espace S_n . L'étude des propriétés projectives des réseaux a atteint l'apogé, au commencement du XX-me siècle, par les travaux de Wilczynski, Bianchi, Bompiani et surtout de Tzitzeica. Un petit nombre de géomètres, parmi lesquels nous citons Guichard et Bianchi, ont étudié les réseaux et les congruences encor au point de vue métrique.

L'étude des propriétés différentielles affines des réseaux est résté jusqu'à présent peu développé, dans quelques travaux sporadiques, ou interviennent les considérations affines à coté des celles projectives et métriques.

Dans les livres devenus classiques de Tzitzeica, Fubini-Cech, Lane ne se fait aucune mention sur la possibilité d'étudier les réseaux au point de vue affine; ni dans le livre bien connu de Blaschke ne mentionne rien de propriétés affines des réseaux.

Malgré ce scepticisme général, nous montrerons dans ce qui suit, qu'il est possible et même très nécessaire d'étudier systématiquement les propriétés différentielles affines des réseaux.

D'abord il est évident que la connaissance des propriétés affines des réseaux nous donne la possibilité de découvrir des nouvelles propriétés projectives et aussi de sésiser des nombreuses fautes faites par plusieurs géomètres. En second lieu nous verrons encor que la connaissance des propriétés différentielles affines des réseaux nous conduit tout naturellement à des nouveaux problèmes de nature projective.

Nous commencerons notre étude par l'énumération des quelques définitions affines anciennes, qui semblent être déjà oubliées.

2. Anciennes définitions. La première définition purement affine des réseaux, dans l'espace S_3 fut donné par Peterson, qui a étudié la

Received by the editors January 14, 1957.

correspondance des deux surfaces $S, \bar{S}$ par parallélisme de leurs plans tangents aux points homologues. Il a montré qu'on peut choisir le même système de coordonnées curvilignes sur les deux surfaces $S, \bar{S}$ de manière que les paramètres directeurs des tangentes aux courbes u et v vérifient les relations

$$\frac{\bar{x}_u}{x_u} = \frac{\bar{y}_u}{y_u} = \frac{\bar{z}_u}{z_u} ; \quad \frac{\bar{x}_v}{x_v} = \frac{\bar{y}_v}{y_v} = \frac{\bar{z}_v}{z_v} .$$

Il a énoncé ensuite, dans son travail [2, p. 24] le théorème suivant : „Si deux surfaces x, y, z et X, Y, Z se trouvent dans une relation telle que les normales aux points correspondants soient parallèles, alors par chaque point d'une surface passent deux directions qui sont parallèles (ou deux courbes dont les tangentes sont parallèles) aux directions correspondantes sur l'autre surface. Ces deux directions, sur chaque surface, sont conjuguées et par conséquent, constituent sur les deux surfaces les réseaux auxquels nous avons donné le nom de base de la relation.”

Ce résultat fut publié par Peterson d'abord en langue russe [1] et seulement plus tard son mémoire fut traduit en français [2].

Sous cette forme général le théorème de Peterson est fausse, ce que nous démontrerons en détail dans un prochain travail.

Nous nous bornerons actuellement de remarquer que, en dehors du cas étudié par Peterson, il y a encor des couples de deux surfaces $S, \bar{S}$ dont les plans tangents aux points homologues sont parallèles et pour lesquelles les paramètres directeurs des tangentes aux courbes u , respectivement v des deux surfaces $S, \bar{S}$ vérifient le système d'équations

$$\frac{\bar{x}_u}{x_v} = \frac{\bar{y}_u}{y_v} = \frac{\bar{z}_u}{z_v} ; \quad \frac{\bar{x}_v}{x_u} = \frac{\bar{y}_v}{y_u} = \frac{\bar{z}_v}{z_u} .$$

Il faut donc modifier l'énoncé du théorème de Peterson de la manière suivante: S'il est possible d'établir une correspondance ponctuelle entre les deux surfaces $S, \bar{S}$ de manière que les tangentes aux courbes u , respectivement v de la première surface soient parallèles avec les tangentes aux courbes u , respectivement v de la deuxième surface, alors les lignes u, v forment sur les deux surfaces des réseaux conjugués.

3. C'est Guichard qui a donné pour la première fois une caractérisation affine des réseaux dans l'espace S_n . Nous citons d'après [4, pp. 5-6]:

„Soient $x_1, x_2, \dots, x_n, x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ $2n$ fonctions de deux vari-

ables définissant les coordonnées de deux points M, M' . On dit que les deux points décrivent des systèmes parallèles si l'on a les relations

$$\frac{\partial x'_i}{\partial u} = \alpha \frac{\partial x_i}{\partial u}, \quad \frac{\partial x_i}{\partial v} = \beta \frac{\partial x_i}{\partial v}.$$

La condition de compatibilité montre que les quantités x sont solutions de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = - \frac{\frac{\partial \alpha}{\partial v}}{\alpha - \beta} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\frac{\partial \beta}{\partial u}}{\alpha - \beta} \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Il résulte de là que les réseaux sont les seuls systèmes qui admettent des parallèles."

La conclusion tirée par Guichard est fausse aussi bien que le théorème de Peterson. Il faut donc modifier la définition des réseaux dans l'espace S_n de la même manière que nous l'avons déjà fait pour les réseaux dans S_3 .

4. Une autre caractérisation affine, un peu plus moderne, des réseaux fut donné par Ms. A. Myller, en généralisant le transport parallèle de Levi-Civita dans notre espace habituel. On considère à cet effet la famille des plans tangents à une surface, le long d'une courbe de transport u , et puis les tangentes au deuxième système des courbes v de la même surface, menées aux points de rencontre de ces courbes avec la courbe u . En imposant la condition que la tangente à la courbe v , dans le point $M(u + \Delta u, v)$, soit parallèle au plan tangent à la surface, au point infiniment voisin $M(u, v)$, on obtient

$$\begin{vmatrix} r_u \\ r_v \end{vmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial v} r(u + \Delta u, v) = 0,$$

dans laquelle nous désignons par

$$\begin{vmatrix} r_u \\ r_v \end{vmatrix}$$

le vecteur normal à la surface et par

$$\frac{\partial}{\partial v} r(u + \Delta u, v)$$

le vecteur tangent à la courbe v de la surface. En effectuant les substitutions et les calculs nécessaires, nous trouvons la relation

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} (z_v + z_{uv}\Delta u) + \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} (x_v + x_{uv}\Delta u) + \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} (y_v + y_{uv}\Delta u) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \end{vmatrix} = 0,$$

qui caractérise les lignes conjuguées.

Cette définition est correcte et nous voyons que parmi les anciennes définitions c'est la seule qui reste valable.

5. Les transformations tangentielles. Nous commençons l'étude des propriétés affines des réseaux dans l'espace habituel S_3 . Considérons à cet effet une surface quelconque S , rapporté à un système complètement arbitraire des coordonnées curvilignes u, v . Il est manifeste que, quelque soit la surface considéré, on peut toujours former un système d'équations

$$\begin{aligned} r_{uv} &= ar_u + br_v + cr, \\ r_{uu} &= a_1r_u + b_1r_v + c_1r, \\ r_{vv} &= a_2r_u + b_2r_v + c_2r \end{aligned} \quad (1)$$

de manière que les coordonnées de la surface vérifient ce système.

Considérons un point M variable sur la surface S et ses deux transformations tangentielles $M_1(r^1)$, $M_2(r^2)$ suivant les courbes u et v ,

$$(2) \quad r^1 = r + pr_u, \quad r^2 = r + qr_v,$$

p et q étant fonctions arbitraires mais continues et dérivables de u et v . Il est aisé de voir quand M se déplace sur la surface S , les deux points M_1, M_2 décrivent en général des nouvelles surfaces S_1, S_2 , rapportées au même système des coordonnées curvilignes u, v .

Il peut se présenter aussi des cas de dégénérescence quand l'un des deux points M_1, M_2 décrit une ligne où même il reste fixe.

Nous allons voir que ces transformations tangentielles joueront un rôle d'importance capital dans nos recherches suivantes.

6. Nouvelles définitions des réseaux et de quelques classes de réseaux. Considérons de nouveau le point M variable sur S et sa transformée tangentielle M_1

$$r^1 = r + pr_u$$

et calculons ensuite la dérivée de r^1 par rapport à v ,

$$r_v^1 = r_v + p_v r_u + p r_{uv}.$$

En tenant compte d'équations (1) on obtient

$$r_v^1 = (ap + p_v)r_u + (1 + bp)r_v + cpr.$$

Posons maintenant la condition que le vecteur r_v^1 , qui représente la tangente à la courbe v sur la surface S_1 , soit parallèle au plan tangent de la surface S au point correspondant M . Nous obtenons

$$cp = 0,$$

c'est-à-dire

$$c = 0,$$

ce qui signifie que le point M décrit un réseau sur S .

Il est aisé de vérifier, dans ce cas, que le vecteur r_u^2 , défini par

$$r_u^2 = (1 + aq)r_u + (bq + q_u)r_v,$$

qui représente la tangente à la courbe u de l'autre transformée tangentielle, la surface S_2 , est parallèle aussi au même plan tangent de la surface S . Nous avons ainsi trouvé une nouvelle caractérisation affine et découvert une propriété remarquable des réseaux.

7. Considérons ensuite le point M , qui décrit un réseaux sur S , et ses deux transformées tangentielles plus particulières

$$r^1 = r + pr_u, \quad r^2 = r + pr_v.$$

Calculons les dérivées partielles

$$r_v^1 = (ap + p_v)r_u + (1 + bp)r_v, \quad r_u^2 = (ap + 1)r_u + (bp + p_u)r_v,$$

et puis posons la condition que le vecteur r_v^1 soit parallèle au vecteur r_v et en même temps le vecteur r_u^2 soit parallèle au vecteur r_u .

On aura alors

$$a + \frac{p_v}{p} = 0, \quad b + \frac{p_u}{p} = 0,$$

d'où il résulte

$$a_u = b_v.$$

Nous avons ainsi défini les réseaux aux invariants égaux.

8. Considérons en fin le point M qui décrit un réseau sur S , la

transformée tangentielle du première ordre M_1

$$r^1 = r + pr_u,$$

dont le vecteur r_v^1 est parallèle au vecteur r_v , et ensuite la transformée tangentielle du deuxième ordre M_{12} , défini par la relation

$$r^{12} = r^1 + pr_v^1.$$

En faisant les substitutions et les réductions nécessaires on obtient

$$r^{12} = r + pr_u + p(1 + bp)r_v.$$

Posons ensuite la condition que la droite MM_{12} soit parallèle avec la droite M_1M_2 . Nous obtenons ainsi la relation

$$1 + bp = -1$$

d'où il résulte

$$p = -2/b.$$

En tenant encore compte de la relation initiale

$$ap + p_v = 0$$

nous trouvons

$$2 \frac{b_v}{b^2} - 2 \frac{a}{b} = 0,$$

c'est-à-dire

$$ab - b_v = 0.$$

Nous avons ainsi donné une nouvelle définition des réseaux à un invariant nul.

9. En posant encore la deuxième condition que la droite MM_{21} , définie par l'autre transformée tangentielle du deuxième ordre

$$r^{21} = r + pr_v + p(1 + ap)r_u$$

soit aussi parallèle avec la droite M_1M_2 , nous trouverons les réseaux dont tous les deux invariants sont nuls.

10. Nouveaux problèmes de nature projective. Après avoir connu les propriétés caractéristiques affines des réseaux et des diverses classes de réseaux, nous pouvons donner des définitions correspondantes projectives et ensuite de poser des nouveaux problèmes de nature projective sur les réseaux.

Nous nous occuperons, dans ce qui suit, en spécial des problèmes de nature projective sur les réseaux, qui sont correspondants des ceux de nature affine, que nous avons déjà étudié. Considérons pour cela sur une surface quelconque S , rapportée à un système arbitraire de coordonnées curvilignes u, v , un point variable M et ses deux transformées tangentielles M_1, M_2 , définies par les mêmes relations bien connues (2). Au lieu des vecteurs parallèles à un plan ou parallèles entre eux, nous considérons actuellement des vecteurs qui percent le plan, respectivement des couples de vecteurs qui s'intersectent. Désignons par P, Q les deux points dans lesquels les deux vecteurs r_v^1, r_u^2 percent le plan tangent à la surface S et cherchons ensuite quels sont les plus généraux systèmes des lignes u, v sur cette surface, pour lesquels l'un des deux points P, Q reste dans un plan ou sur une surface développable, et trouver alors la surface sur laquelle se déplace le second point.

Supposant que le vecteur r_v^1 est concurant avec le vecteur r_v , on peut poser le problème de chercher si les lignes u, v sur la surface forment toujours un réseau conjugué, ou bien il y a encor d'autres systèmes de réseaux qui satisfont les mêmes conditions.

Un autre problème, qu'on peut poser, est de chercher si le vecteur r_u^2 est concurant avec le vecteur r_u dans tous les cas quand les deux vecteurs r_v^1, r_v sont concurants.

Supposant que les deux vecteurs r_v, r_v^1 s'intersectent dans le point K et les deux vecteurs r_u, r_u^2 dans le point L , considérons les familles des droites KL et puis MK et ML ; cherchons s'il est possible d'établir une liaison entre les propriétés géométriques de ces familles de droites et les propriétés des lignes u, v de la surface.

Il est évident qu'on peut chercher de résoudre des problèmes semblables aussi pour le cas des transformées tangentielles du deuxième ordre et même d'ordre supérieur.

BIBLIOGRAPHIE

1. K. M. Peterson, *Ob otnocheniah i srodstvah mejdou krivemi poverhmostimi*, Mat. Sbornik, 1866.
2. ———, *Sur les relations et les affinités entre les surfaces courbes*, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, 1905.
3. C. Guichard, *Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques*, Ann. École Norm., 1897–1903.
4. ———, *Théorie des réseaux*, Memorial des Sciences Mathématiques.
5. A. Myller, *Le parallélisme au sens de Levi-Civita dans un système de plans*, Annales Scientifiques de l'Université de Jassy vol. 13 (1924).