SUR UN SYSTÈME DE COUPLES DE RÉSEAUX PARALLÈLES

PAVEL DRĂGILĂ

1. Dans la note précédente [2] nous avons étudié les couples de deux surfaces $S(x, y, z)$, $\bar{S}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, rapportées au même système de coordonnées curvilignes u, v , qui sont définies par les équations de parallélisme linéaire

$$(1) \quad \begin{aligned} \bar{r}_u &= \lambda r_u, \\ \bar{r}_v &= \mu r_v, \end{aligned}$$

de manière qu'il existe des systèmes de lignes s, t , dont les tangentes $r_s, r_t, \bar{r}_s, \bar{r}_t$ soient liées par les relations de parallélisme ponctuel

$$(2) \quad \begin{aligned} \bar{r}_s &= \lambda^x r_t, \\ \bar{r}_t &= \mu^x r_s. \end{aligned}$$

Effectuant les calculs nous avons établi que ces surfaces sont caractérisées par la relation

$$\lambda + \mu = 0,$$

et encore que, sur chacune des deux surfaces, il existe une infinité de systèmes de courbes s, t , pour lesquelles sont satisfaites les relations (2), ce qui signifie que dans ce cas il y a correspondance par des faisceaux de tangentes parallèles.

Posant la condition d'intégrabilité pour le système

$$(3) \quad \begin{aligned} \bar{r}_u &= \lambda r_u, \\ \bar{r}_v &= -\lambda r_v, \end{aligned}$$

respectivement pour le système invers

$$\begin{aligned} r_u &= \frac{1}{\lambda} \bar{r}_u, \\ r_v &= -\frac{1}{\lambda} \bar{r}_v, \end{aligned}$$

nous obtenons les deux équations de Laplace

$$r_{uv} + \frac{\lambda_v}{2\lambda} r_u + \frac{\lambda_u}{2\lambda} r_v = 0,$$

$$\bar{r}_{uv} = \frac{\lambda_v}{2\lambda} \bar{r}_u - \frac{\lambda_u}{2\lambda} \bar{r}_v = 0.$$

Il s'ensuit que les courbes u, v forment sur les deux surfaces $S, \bar{S}$ des réseaux à invariants égaux.

2. Les réseaux (3) jouissent encore d'autres propriétés remarquables, qui leur sont caractéristiques. Ils peuvent être définis aussi d'une autre manière, posant la condition que les foyers F_1, F_2 du rayon $M\bar{M}$ de la congruence rectiligne, déterminée par les points courants homologues des deux surfaces (1), séparent harmoniquement le couple de points $M, \bar{M}$.

Si nous désignons les foyers du rayon $M\bar{M}$ par

$$r^x = \frac{\bar{r} + kr}{1 + k},$$

on aura

$$(\lambda + k)(\mu + k) = 0,$$

c'est-à-dire

$$k_1 = -\lambda, \quad k_2 = -\mu.$$

Posant ensuite la condition d'harmonicité

$$\frac{\frac{\bar{r} - \lambda r}{1 - \lambda} - \bar{r}}{\frac{\bar{r} - \lambda r}{1 - \lambda} - r} : \frac{\frac{\bar{r} - \mu r}{1 - \mu} - \bar{r}}{\frac{\bar{r} - \mu r}{1 - \mu} - r} = -1.$$

il en résulte

$$\lambda = -\mu.$$

D'ici on voit que les réseaux à invariants égaux parallèles (3) sont en même temps en relation de correspondance de Koenigs.

3. Recemment nous avons observé que les couples de réseaux (3) furent rencontrés déjà et étudiés à un point de vue différent par M. Vincensini [1].

Il s'est proposé d'étudier les relations existant entre les congruences de Ribaucour et les réseaux conjugués à invariants égaux. On sait que les congruences de Ribaucour sont celles dont les développables

déterminent sur la surface moyenne S (lieu des milieux des segments focaux F_1F_2) un réseau conjugué, lequel est nécessairement à invariants égaux.

M. Vincensini cherche en premier lieu d'établir *comment, à partir des réseaux à invariants égaux de S , on pourra construire les congruences de Ribaucour de surface moyenne S* . A cet effet il considère sur S un réseau à invariants égaux (R) , auquel il associe un réseau parallèle convenablement choisi (R') et un point fix arbitraire I de l'espace. Il désigne les points courants homologues des deux réseaux par m et m' . La droite D menée parallèlement à Im' engendre une congruence de Ribaucour, admettant (R) pour réseaux moyen, si

$$F_2m = -F_1m.$$

Effectuant les calculs nécessaires il trouve que *les coordonnées (x', y', z') du réseau (R') sont liées aux coordonnées (x, y, z) de (R) par les formules*

$$(3') \quad \begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial u} &= h \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial x'}{\partial v} &= -h \frac{\partial x}{\partial v}, \end{aligned}$$

et deux analogues en (y, y') et (z, z') , h étant une certaine fonction de u et v , représentant d'ailleurs le rapport (algébrique) des segments parallèles Im' et F_1m

$$\left(h = \frac{Im'}{F_1m} \right).$$

Il observe encore qu'il résulte des relations (3') que x', y', z' vérifient l'équation de Laplace à invariants égaux

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \log \left(\frac{1}{h} \right) \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \log \left(\frac{1}{h} \right) \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0,$$

qui se déduit d'ailleurs, comme le montrent les relations (3'), de l'équation de Laplace du réseau (R)

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \frac{1}{2} \frac{\partial (\log h)}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial (\log h)}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0,$$

en y remplaçant h par $1/h$.

Après cela, il conclut, que le réseau (R') parallèle à (R) , qu'il convient d'associer à (R) pour que la construction envisagée fournisse une congruence de Ribaucour, admettant (R) pour réseau moyen, est néces-

sairement à invariants égaux, comme (R).

Il est visible maintenant que les couples de réseaux à invariants égaux (3'), que nous appellerons couples de Ribaucour-Vincensini, coïncident avec les couples (3) étudiés par nous, par conséquent ils peuvent être caractérisés par leurs propriétés remarquables mentionnées plus haut.

Il y a lieu de souligner encore que la relation établie par M. Vincensini entre les deux réseaux (R) et (R') est symétrique. Ceci signifie que, partant de (R'), on peut obtenir, par la même construction, à l'aide du réseau (R), la congruence de Ribaucour admettant (R') pour réseau moyen.

4. M. Vincensini considère ensuite le cas *des congruences de Ribaucour à surface moyenne isothermique, dont les développables découpent sur cette surface moyenne le réseau de ses lignes de courbure. Si S' est la surface support du réseau (R') parallèle à (R), associée à (R) dans la construction de la congruence envisagée, les relations (3') montrent que la correspondance (par plans tangents parallèles), que les points homologues m et m' des réseaux (R) et (R') déterminent sur S et S' une correspondance conforme inverse.* Il observe que dans ce cas les deux surfaces sont transformées de Christoffel l'une de l'autre. Nous pouvons ajouter encore que toutes les surfaces transformables au sens de Christoffel sont comprises dans les couples de surfaces de Ribaucour-Vincensini.

5. Nous nous proposons actuellement de signaler encore quelques propriétés intéressantes de ces couples de surfaces et finalement d'étudier les couples de congruences parallèles, engendrées par les tangentes aux réseaux (R) et (R'), dans le cas spécial quand les congruences d'un réseau sont des réseaux W.

Les asymptotiques des deux surfaces S et $\bar{S}$ sont données par l'équations

$$\begin{aligned} |r_u, r_v, r_{uu}| du^2 + |r_u, r_v, r_{vv}| dv^2 &= 0, \\ -\lambda^3 |r_u, r_v, r_{uu}| du^2 + \lambda^3 |r_u, r_v, r_{vv}| dv^2 &= 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} du^2 - w dv^2 &= 0, \\ du^2 + w dv^2 &= 0. \end{aligned}$$

Il est aisé de voir que, si les asymptotiques sur la première surface sont réelles, sur la deuxième elles sont nécessairement imaginaires, et réciproquement. Il s'ensuit alors que les deux surfaces associées ont leurs courbures de signe contraire.

Dans le cas spécial quand les lignes asymptotiques sur une surface sont définies par l'équation

$$du^2 - dv^2 = 0,$$

ce qui signifie que le réseau (u, v) est isotherme-conjugué, sur l'autre surface elles seront données par l'équation

$$du^2 + dv^2 = 0.$$

Nous dirons que dans le premier cas le réseau correspondant est isotherme-conjugué de première espèce, et dans le second cas il est isotherme-conjugué de deuxième espèce.

Nous pouvons tirer encore quelques conséquences intéressantes dans le cas des couples de surfaces isothermiques. Ces surfaces se partagent aussi en deux catégories, d'après le signe de leur courbure totale, à chaque surface de la première catégorie étant associée par parallélisme une surface de l'autre catégorie (à une homothétie près).

6. Considérons actuellement le cas où les congruences, engendrées par les tangentes aux lignes du réseau (R) , sont des congruences W , c'est-à-dire où le réseau envisagé est un réseau R (de Tzitzeica-Demoulin). Ces réseaux sont étudiés systématiquement, au point de vue projectif, dans le manuel de Tzitzeica [3]. Nous adoptons dans la suite ses notations et sa méthode avec des légères modifications. Dans les calculs Tzitzeica utilise, pour représenter les invariants de l'équation de Laplace et de ses transformées, les notations $h, k, h_1, k_1, h_{-1}, k_{-1}, \dots$, et il désigne les transformées ponctuelles par

$$\begin{aligned} x_1 &= x_v + ax, & x_{-1} &= x_u + bx, \\ x_2 &= x_{1v} + a_1x_1, & x_{-2} &= x_{-1u} + b_{-1}x_{-1}. \end{aligned}$$

D'après Tzitzeica un réseau R peut être défini projectivement par un système de la forme

$$(4) \quad \begin{aligned} x_{uv} + ax_u + bx_v + cx &= 0, \\ x_{uu} + mx_{vv} + px_u + qx_v + rx &= 0. \end{aligned}$$

Dans notre cas plus particulier l'équation de Laplace (4) doit avoir évidemment les invariants égaux. En second lieu, le problème que nous nous proposons d'examiner étant de nature affine, nous allons introduire encore quelques modifications. Considérons pour cela une solution particulière

$$x_0 = \theta(u, v)$$

du système (4) et faisons ensuite la transformation

$$x = \theta \bar{x}.$$

Après calculs et réductions nous obtenons un nouveau système

$$(5) \quad \begin{aligned} \bar{x}_{uv} + \left(a + \frac{\theta_v}{\theta}\right) \bar{x}_u + \left(b + \frac{\theta_u}{\theta}\right) \bar{x}_v &= 0, \\ \bar{x}_{uu} + m\bar{x}_{vv} + \left(p + \frac{2\theta_u}{\theta}\right) \bar{x}_u + \left(q + \frac{2m\theta_v}{\theta}\right) \bar{x}_v &= 0 \end{aligned}$$

qui nous définit actuellement, au point de vue affine, le même réseau R .

Le système (5) peut être interprété encore d'une autre façon, définissant d'une manière particulière le réseau R dans l'espace projectif, l'une des quatre coordonnées homogènes étant une constante. Ce qui est important pour nous, c'est le fait que la méthode de Tzitzeica est applicable aussi dans ce cas.

La seconde équation (5) peut s'écrire sous la forme de Tzitzeica

$$(6) \quad x_{-2} + mx_2 + \alpha x_{-1} + \beta x_1 + \gamma x = 0.$$

Nous pouvons maintenant déterminer les lignes asymptotiques de la surface (x) , définie par le système (5). Le long d'une courbe quelconque de la surface u et v sont des fonctions d'un nouveau paramètre t , et alors

$$x' = x_u u' + x_v v', \quad x'' = x_{uu} u'^2 + 2x_{uv} u'v' + x_{vv} v'^2 + x_u \cdot u'' + x_v \cdot v''$$

ou

$$x'' = (v'^2 - mu'^2)x_{vv} + \dots$$

Posant ensuite la condition que le plan osculateur de la courbe, déterminée par x, x', x'' soit confondu avec le plan tangent à la surface, on aura

$$v'^2 - mu'^2 = 0,$$

ou

$$(7) \quad dv^2 - mdu^2 = 0,$$

qui est l'équation différentielle des lignes asymptotiques.

Il s'agit maintenant d'écrire qu'il y a correspondance des lignes asymptotiques sur les trois surfaces x, x_1 et x_{-1} . A cette fin posons d'abord

$$\xi = x_1$$

pour le premier transformé de Laplace de (x) dans le sens des courbes v . On a

$$\xi_1 = x_2, \quad \xi_2 = x_3, \quad \xi_{-1} = hx, \quad \xi_{-2} = hx_{-1}.$$

Après cela dérivons l'équation (6) par rapport à v . Nous obtenons ainsi

$$-ax_{-2} + k_{-1}x_{-1} + m_v x_2 + m(x_3 - a_2 x_2) + \alpha_v x_{-1} \\ + \alpha(-ax_{-1} + kx) + \beta(x_2 - a_1 x_1) + \beta_v x_1 + \gamma(x_1 - ax) + \gamma_v x = 0,$$

ou, en tenant compte de (6)

$$(\alpha_v + k_{-1})x_{-1} + mx_3 + ()x + ()x_2 + ()x_1 = 0,$$

et enfin

$$\frac{a_v + k_{-1}}{h} \xi_{-2} + m\xi_2 + ()\xi_{-1} + ()\xi_1 + ()\xi = 0.$$

Les asymptotiques de la surface (x_1) seront données par

$$(\alpha_v + k_{-1})dv^2 - hmdv^2 = 0,$$

et elles correspondent à celles de la première surface (x) si cette équation est identique à (7), donc si nous avons

$$(8) \quad \alpha_v = h - k_{-1}.$$

Posons ensuite

$$\eta = x_{-1}$$

pour le premier transformé de Laplace dans le sens des lignes u . On a alors

$$(9) \quad \eta_1 = x_{-2}, \quad \eta_2 = x_{-3}, \quad \eta_{-1} = kx, \quad \eta_{-2} = kx_1.$$

Dérivant maintenant l'équation (6) par rapport à u nous obtenons la relation

$$x_{-2u} + m_u x_2 + mx_{2u} + \alpha_u x_{-1} + \alpha x_{-1u} + \beta_u x_1 + \beta x_{1u} + \gamma_u x + \gamma x_u = 0$$

que nous pouvons écrire encore

$$(x_{-3} - b_{-2}x_{-2}) + m_u \left(-\frac{x_{-2} + \alpha x_{-1} + \beta x_1 + \gamma x}{m} \right) + mx_{2u} + \alpha_u x_{-1} \\ + \alpha x_{-1u} + \beta_u x_1 + \beta x_{1u} + \gamma_u x + \gamma x_u = 0,$$

et ensuite

$$x_{-3} + \left(-\frac{\beta m_u}{m} + \beta_u \right) x_1 + mx_{2u} + \alpha_u x_{-1} + \alpha x_{-1u} + \dots = 0.$$

Tenant compte maintenant des relations (9) et encore des formules de transformations de Laplace nous trouvons finalement

$$k\eta_2 + \left(mh_1 + \beta_u - \frac{\beta m_u}{m}\right)\eta_{-2} + \dots = 0.$$

Les asymptotiques sur la surface x_{-1} sont déterminées par l'équation

$$kdv^2 - \left(mh_1 + \frac{m\beta_u - \beta m_u}{m}\right)du^2 = 0,$$

et elles correspondent à celles de la première surface x s'il est satisfaite la condition

$$(10) \quad k = h_1 + \left(\frac{\beta}{m}\right)_u.$$

Nous allons considérer actuellement avec Tzitzeica les conditions d'intégrabilité du système formé par les équations (3) et (6). Dérivons pour cela l'équation (6) par rapport à v et puis éliminons x_{-2} . Nous obtenons ainsi

$$mx_3 + (m_v + \beta + am - a_2m)x_2 + (\alpha_v + k_{-1})x_{-1} + (a\beta - a_1\beta + \gamma)x_1 + (\gamma_2 + \alpha k)x = 0.$$

Si nous dérivons ensuite cette dernière relation par rapport à u et nous éliminons x_3 nous devons retrouver l'équation (6). Effectuant les calculs il vient

$$(\alpha_v + k_{-1})x_{-2} + \left[mh_2 + (m_v + \beta + am - a_2m)_u - \frac{m_u}{m}(m_v + \beta + am - a_2m)\right]x_2 + ()x_{-1} + ()x_1 + ()x = 0.$$

Il faut donc avoir

$$\alpha_v + k_{-1} = h_2 + \frac{(m_v + \beta + am - a_2m)_u}{m} - \frac{m_u}{m^2}(m_v + \beta + am - a_2m),$$

ou

$$(11) \quad \alpha_v + k_{-1} = h_2 + (\log m)_{uv} + \left(\frac{\beta}{m}\right)_u + (a - a_2)_u.$$

Or, de (8) et (10) on a

$$\alpha_v + k_{-1} = h, \\ \left(\frac{\beta}{m}\right)_u = k - h_1.$$

D'autre part nous avons encore les relations

$$\begin{aligned}h_1 &= 2h - k - (\log h)_{uv}, & k_1 &= h, \\h_2 &= 2h_1 - k_1 - (\log h_1)_{uv}, \\a_1 &= a - (\log h)v, & a_2 &= a_1 - (\log h_1)v.\end{aligned}$$

En tenant compte de tous ces résultats, la relation (11) devient

$$(\log m)_{uv} = 0,$$

d'où

$$m = UV,$$

U étant une fonction de u et V une fonction de v .

Tzitzeica affirme ensuite qu'on peut toujours choisir les variables indépendantes, sans changer les courbes du réseau (x) , de manière que l'on ait $m=1$. Nous verrons plus loin que cela n'est pas exact.

Les lignes asymptotiques de (x) et de toutes les surfaces sur lesquelles sont tracés les réseaux de la suite (x) sont

$$u + v = \text{const.}, \quad u - v = \text{const.}$$

Si nous faisons la transformation

$$\begin{aligned}\bar{x}_u &= \lambda x_u^{x'}, \\ \bar{x}_v &= -\lambda x_v^{x'},\end{aligned}$$

nous obtiendrons un nouveau système de la même forme que (5)

$$(12) \quad \begin{aligned}x_{uv}^{x'} + ()x_u^{x'} + ()x_v^{x'} &= 0, \\ x_{uu}^{x'} - mx_{vv}^{x'} + ()x_u^{x'} + ()x_v^{x'} &= 0,\end{aligned}$$

le signe du coefficient m (le seul d'ailleurs qui présente de l'intérêt) étant échangé. Il est visible alors que la méthode de Tzitzeica est applicable aussi dans ce cas. Mais les conclusions, auxquelles nous sommes arrivés, diffèrent un peu de celles tirées par Tzitzeica. En effet, les réseaux définis par un système de la forme (5), (12) se partagent en deux catégories distinctes: les uns pour lesquels on peut prendre, après un changement convenable des variables,

$$m = 1,$$

et les autres, pour lesquels on a

$$m = -1.$$

Les réseaux de la première catégorie sont les réseaux R , dont les

surfaces support (nommées surfaces R) sont à courbure totale négative; les réseaux de la deuxième catégorie, que nous les appellerons réseaux $\bar{R}$, sont situés sur les surfaces $\bar{R}$ à courbure positive. Les congruences, engendrées par les tangentes aux lignes d'un réseau R , sont les congruences W . Les congruences correspondantes, engendrées par les tangentes aux lignes d'un réseau $\bar{R}$, nous les désignerons congruence $\bar{W}$.

Il y a lieu de souligner le parallélisme remarquable qui existe entre les propriétés des réseaux R et des réseaux $\bar{R}$. Ainsi que dans le cas des réseaux R les lignes asymptotiques de la surface support ($\bar{x}$) d'un réseau $\bar{R}$ et de toutes les surfaces sur lesquelles sont situés les réseaux de la suite ($\bar{x}$) sont

$$u + iv = \text{const.}, \quad u - iv = \text{const.},$$

ce qui signifie que le réseau initial, ainsi que tous les réseaux transformés, sont isothermes conjugués de la seconde espèce.

7. Pour mieux illustrer les résultats, auxquels nous sommes arrivés, nous allons donner un exemple simple de couple de réseaux de Ribaucour-Vincensini. Le réseau périodique, à période 4

$$\begin{aligned} x &= e^{2(u+v)}, \\ y &= e^{u+v} \cos(u-v), \\ z &= e^{u+v} \sin(u-v), \end{aligned}$$

qui est un réseau $\bar{R}$ particulier, étudié pour la première fois, au point de vue projectif, par Tzitzeica [3, p. 181], correspond par parallélisme au réseau

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 2(u-v), \\ \bar{y} &= e^{-u-v} \sin(u-v), \\ \bar{z} &= -e^{-u-v} \cos(u-v), \end{aligned}$$

qui est aussi un réseau périodique, à période 4. Il est intéressant de mentionner que les transformées successives homologues se correspondent aussi par parallélisme.

BIBLIOGRAPHIE

1. P. Vincensini, *Sur quelques types spéciaux de réseaux et de congruences conjugués*, Ann. École Norm. Sup. (3) vol. 62 (1945) pp. 269–300.
2. P. Drăgilă, *Correspondance entre deux surfaces par des faisceaux de tangentes parallèles*, Proc. Amer. Math. Soc. vol. 10 (1959) pp. 366–368.
3. G. Tițeica, *Geometrie diferențială proiectivă a rețelelor*, București, Editura Academiei Republicii Populare Romîne, 1956.