EXTENSION D'UN THÉORÈME DE LOUIS ANTOINE

NIKIAS STAVROULAKIS

ABSTRACT. Let $f: [0, 1] \times S \rightarrow R^3$ be a map subject to the conditions: (1) $f|_{[0, 1] \times S}$ is $(1, 1)$ into; (2) $f|_{\{0\} \times S}$ is not $(1, 1)$ into; (3) The image $\Gamma_0 = f(\{0\} \times S)$ is a Jordan curve; (4) $f(\{0\} \times S) \cap f([0, 1] \times S) = \emptyset$.

Let μ be the linking number of each of the curves $\Gamma_t = f(\{t\} \times S)$, $t \in]0, 1[$, with Γ_0 . Let ν be the degree of the mapping $h: S \rightarrow \Gamma_0$ defined by $h(u) = f(0, u)$. We prove that, if Γ_0 is tame, the integers μ and ν are relatively prime. The question is open in case that Γ_0 is wild.

1. Position du problème. Soit S le quotient de R par la relation d'équivalence $u \equiv v \pmod{1}$. Sur un tore plongé dans R^3 moyennant les équations

$$\begin{aligned} (1) \quad & x_1 = (a_1 + a \cos 2\pi\varphi_1) \cos 2\pi\varphi_2, \\ & x_2 = (a_1 + a \cos 2\pi\varphi_1) \sin 2\pi\varphi_2, \\ & x_3 = a \sin 2\pi\varphi_1 \quad (a_1 > a \geq 1, \varphi_1 \in S, \varphi_2 \in S), \end{aligned}$$

on considère une courbe de Jordan Γ ainsi que ses nombres d'enlacement μ et ν , considérés non négatifs, avec $\Gamma_0: (x_1^2 + x_2^2 = a_1^2, x_3 = 0)$ et avec l'axe des x_3 . *L. Antoine a démontré [1] que, si $\mu > 1$ et $\nu > 1$, ces deux entiers sont premiers entre eux.* Ce théorème exprime une propriété indépendante du plongement, parce que μ et ν sont respectivement les degrés des projections canoniques de Γ dans un méridien et dans un parallèle du tore. Mais la considération du plongement conduit à un nouveau problème. En effet, Γ est définie par des fonctions continues $\varphi_1(u)$ et $\varphi_2(u)$ de $u \in S$, donc remplaçant dans (1) et faisant varier $a = t$ sur $[0, 1]$, on obtient une application continue $g: [0, 1] \times S \rightarrow R^3$ telle que $g|_{[0, 1] \times S}$ soit injective et que, d'une part μ soit le nombre d'enlacement de toute courbe $g(\{t\} \times S)$, $t \in]0, 1[$, avec Γ_0 , d'autre part ν soit le degré de l'application $\xi: S \rightarrow \Gamma_0$ définie par $\xi(u) = g(0, u)$. Les entiers μ et ν se déterminent ainsi par l'application g qui donne lieu à une figure relativement simple dans le cas envisagé. Il est donc naturel de chercher à généraliser la situation en introduisant partout des figures sauvages de R^3 comme suit.

Received by the editors May 19, 1972.

AMS (MOS) subject classifications (1970). Primary 55A25, 55A30; Secondary 54F20, 55A20.

© American Mathematical Society 1973

Soit $f: [0, 1] \times S \rightarrow R^3$ une application continue jouissant des propriétés suivantes: (1) La restriction de f à $]0, 1[\times S$ est injective. (2) La restriction de f à $\{0\} \times S$ n'est pas injective mais l'image $\Gamma_0 = f(\{0\} \times S)$ est une courbe de Jordan dans R^3 . (3) $f(\{0\} \times S) \cap f(]0, 1[\times S) = \emptyset$. Toutes les courbes de Jordan $\Gamma_t = f(\{t\} \times S)$, $t \in]0, 1[$, ont alors avec Γ_0 un même nombre d'enlacement qui sera noté μ . Soit ν le degré de l'application $h: S \rightarrow \Gamma_0$ définie par $h(u) = f(0, u)$.

Question. Si $\mu > 1$ et $\nu > 1$, est-ce que ces deux entiers sont premiers entre eux?

Si f est telle que la réponse soit affirmative, on obtient une généralisation du théorème d'Antoine. Le Corollaire 3.3 dit qu'il en est ainsi lorsque Γ_0 est une ligne polygonale, donc aussi lorsque Γ_0 est non sauvage. La Proposition 3.3 concerne le cas général. Les Propositions 3.1 et 3.2 peuvent aussi être considérées comme généralisations du théorème d'Antoine.

2. Propositions auxiliaires. Par *cycle polygonal* nous entendons une courbe de Jordan formée d'un nombre fini de segments rectilignes. Par contre un 1-cycle; considéré comme chaîne, ne sera pas dépourvu en général de points multiples. Deux courbes de Jordan disjointes dans R^3 seront dites *simplement enlacées* si leur nombre d'enlacement est 1.

PROPOSITION 2.1. *f étant définie comme précédemment, soit L un cycle polygonal simplement enlacé avec Γ_0 , ce qui entraîne que toutes les courbes Γ_t pour $0 < t \leq \varepsilon \leq 1$, ε convenable, ont un même nombre d'enlacement avec L . Ce nombre est égal à ν .*

DÉMONSTRATION. Soient $\theta > 0$ suffisamment petit et $z_1 = \sum (a_i a_{i+1})$ un 1-cycle situé dans un θ -voisinage de Γ_0 et défini par des points $a_1, a_2, \dots, a_n$ de Γ_0 pris dans un ordre cyclique. Soit $z_2 = \sum s_k$ une 2-chaîne ayant pour bord L et en position canonique relativement à z_1 . Pour chaque 2-simplexe s_k de z_2 ayant une intersection non vide avec z_1 , on considère les 1-simplexes $l_{k_i} = a_{k_i} a_{k_i+1}$ de z_1 rencontrant s_k , ce qui donne $s_k \otimes l_{k_i} = \varepsilon_{k_i} = \pm 1$ et $\sum_k \sum_i \varepsilon_{k_i} = 1$, le signe du nombre d'intersection ε_{k_i} dépendant des orientations respectives des s_k et l_{k_i} .

Le paramètre r parcourant une copie S' de S , il existe une injection continue $S' \rightarrow R^3$ ayant pour image la courbe Γ_0 . Par conséquent h induit une application continue $\varphi: S \rightarrow S'$ telle que $r = \varphi(u) = \pm \nu u + \psi(u)$, $\psi(u)$ étant périodique de période 1. Changeant au besoin le signe de r , on a toujours $r = \nu u + \psi(u)$.

Soient $r_1, r_2, \dots, r_n$ les valeurs de r définissant les points $a_1, a_2, \dots, a_n$, et choisissons, pour chaque r_i , une valeur u'_i de u telle que $\varphi(u'_i) = r_i$. Les points $u'_i \in S$, pris dans l'ordre cyclique convenable, définissent un 1-cycle qui peut être subdivisé de façon que, sur le 1-cycle qui en résulte

$(u_1 u_2 \cdots u_p u_1)$, φ admette une approximation simpliciale φ_σ . Les restrictions des φ et φ_σ à l'ensemble des sommets u_j sont identiques.

Prenant un réel positif $t < \varepsilon$ et les points $b_j = f(t, u_j)$ ($j=1, 2, \dots, p$) de Γ_t , on obtient un 1-cycle $z_{1t} = \sum (b_j b_{j+1})$ dans R^3 et une application simpliciale $\varphi_{\sigma t}$, induite par φ_σ , de z_{1t} sur z_1 . Si $\varphi_\sigma(u_j) = r_i$, on a $\varphi_{\sigma t}(b_j) = a_i = f(0, u_j)$, donc les distances $|b_j - a_i|$ tendent uniformément vers zéro avec t . Par conséquent il existe un réel positif $t < \varepsilon$ donnant lieu aux propriétés suivantes: (1) Le cycle z_{1t} ne rencontre pas L . (2) Un 1-simplexe fermé de z_{1t} qui ne s'applique pas par $\varphi_{\sigma t}$ sur un 1-simplexe l_{k_i} ne rencontre pas le support fermé de $z_2 = \sum s_k$. (3) Si un 1-simplexe $l_{k_{ij}}$ de z_{1t} s'applique par $\varphi_{\sigma t}$ sur un simplexe l_{k_i} de z_1 , les intérieurs des $l_{k_{ij}}$ et s_k ont un seul point commun. Soit m_{k_i} (resp. m'_{k_i}) le nombre des simplexes $l_{k_{ij}}$ qui sont orientés comme l_{k_i} (resp. comme $-l_{k_i}$) par rapport à s_k . Comme $m_{k_i} - m'_{k_i} = \nu$, le nombre d'enlacement de z_{1t} avec L est $\sum_k \sum_i (m_{k_i} - m'_{k_i}) \varepsilon_{k_i} = \nu$.

DÉFINITION. On appelle *surface simpliciale* de R^3 un polyèdre triangulé de R^3 qui est l'image d'une surface compacte connexe, avec ou sans bord, par une injection continue. Les 2-simplexes (faces triangulaires) de ce polyèdre seront toujours considérés fermés.

DÉFINITION. Deux surfaces simpliciales A_1 et A_2 de R^3 se trouvent en position *relative canonique* si (1) aucun sommet de A_1 (resp. de A_2) n'appartient à A_2 (resp. à A_1), (2) aucune face de A_1 (resp. de A_2) ne contient un segment appartenant à une arête de A_2 (resp. de A_1), (3) l'intérieur d'une arête quelconque de A_1 ne rencontre l'intérieur d'aucune arête de A_2 .

Les surfaces simpliciales A_1 et A_2 étant en position relative canonique, si la face $a_1 b_1 c_1$ de A_1 rencontre la face $a_2 b_2 c_2$ de A_2 , alors les plans de ces deux faces sont distincts et l'intersection $(a_1 b_1 c_1) \cap (a_2 b_2 c_2)$ est un segment dont chacune des extrémités est intérieure à l'une des deux faces et aussi intérieure à une arête de l'autre face.

PROPOSITION 2.2. Soient A_1 et A_2 deux surfaces simpliciales de R^3 en position relative canonique. Si l'intersection $A_1 \cap A_2$ n'est pas vide et ne

contient aucun point des bords des A_1 et A_2 , elle est constituée par un nombre fini de cycles polygonaux deux à deux disjoints.

En effet, une composante connexe de $A_1 \cap A_2$ est la réunion d'un nombre fini de segments $l_1, l_2, \dots, l_n$ dont chacun est l'intersection d'une face de A_1 et d'une face de A_2 . Si $l_i \cap l_j \neq \emptyset$, $l_i \cap l_j$ se réduit à un point qui est extrémité de chacun des segments l_i et l_j , d'après la propriété signalée ci-dessus. La même propriété montre que si a est extrémité d'un segment l_i , il sera aussi extrémité d'un autre segment unique l_j , d'où le résultat.

LEMME 2.1. Soient ab et cd deux segments rectilignes de R^3 sans points communs. L'ensemble E des points $e \in R^3$ pour lesquels les triangles fermés eab et ecd sont non dégénérés et ont pour intersection le sommet e , est un ouvert non vide de R^3 .

DÉMONSTRATION. Soient $l(ab)$ et $l(cd)$ les droites définies par ab et cd . Les triangles eab et ecd étant non dégénérés, on a $l(ab) \subset R^3 - E$ et $l(cd) \subset R^3 - E$.

Supposons premièrement que ab et cd soient non coplanaires. Si $e' \in R^3 - (l(ab) \cup l(cd))$ et si l'intersection $(e'ab) \cap (e'cd)$ ne se réduit pas au point e' , elle sera un segment définissant une droite $l(a_1d_1)$ rencontrant ab et cd . Soient $a_1 = (ab) \cap l(a_1d_1)$ et $d_1 = (cd) \cap l(a_1d_1)$. Comme e' ne peut pas être intérieur au segment a_1d_1 , considérant les polyèdres fermés $P(ab) = a''_\infty a'_\infty abb''_\infty b''_\infty$ et $P(cd) = c''_\infty c'_\infty cdd'_\infty d''_\infty$, comme l'indique la figure, on voit que $E = R^3 - (l(ab) \cup l(cd) \cup P(ab) \cup P(cd))$ est un ouvert non vide de R^3 .

Supposant deuxièmement que ab et cd appartiennent à un plan π , on a $l(ab) \subset R^3 - E$, $l(cd) \subset R^3 - E$, et aussi comme l'indiquent les figures,

$\pi(ab) \subset R^3 - E$, $\pi(cd) \subset R^3 - E$, donc $E = R^3 - (l(ab) \cup l(cd) \cup \pi(ab) \cup \pi(cd))$ est un ouvert non vide de R^3 .

PROPOSITION 2.3. *Soient A_1 et A_2 deux surfaces simpliciales de R^3 , A_2 étant sans bord, et supposons que $A_1 \cap A_2$ soit non vide et ne contienne aucun point du bord ∂A_1 . Moyennant une suite finie d'isomorphismes simpliciaux n'affectant pas ∂A_1 , on peut transformer A_1 en une surface simpliciale isomorphe à A_1 et se trouvant en position relative canonique avec A_2 .*

DÉMONSTRATION. Dans la suite $B_a(\theta)$ désigne une boule ouverte de centre a et de rayon θ .

(I) Supposons qu'un sommet a de A_1 soit aussi un sommet de A_2 . Soient, prises dans un ordre cyclique, $aa_1a_2, aa_2a_3, \dots, aa_ma_1$ les faces de A_1 autour de a .

Soit $\varepsilon_i > 0$ tel que, pour tout $a' \in B_a(\varepsilon_i)$, $a'a_{i+1}$ n'ait aucun point commun avec le complémentaire du disque fermé $(aa_1a_2) \cup (aa_2a_3) \cup \dots \cup (aa_ma_1)$ dans A_1 [$i=1, 2, \dots, m; m+1=1 \pmod{m}$].

Déterminons, moyennant le Lemme 2.1, $\varepsilon' > 0$ tel que, pour tout $a' \in B_a(\varepsilon')$, tous les triangles $a'a_{i+1}$ soient non dégénérés et que $(a'a_{i+1}) \cap (a'a_{j+1}) = a'$ toutes les fois où les arêtes $a_i a_{i+1}$ et $a_j a_{j+1}$ n'ont pas d'extrémité commune.

Pour tout sommet $b_k \neq a$ de A_2 n'appartenant pas au disque $(aa_1a_2) \cup \dots \cup (aa_ma_1)$, soit $\theta_k > 0$ tel que $b_k \notin (a'a_1a_2) \cup \dots \cup (a'a_ma_1)$ quel que soit $a' \in B_a(\theta_k)$.

Si $\varepsilon = \inf\{\{\varepsilon_i\}, \varepsilon', \{\theta_k\}\}$, nous choisissons un point $a' \in B_a(\varepsilon)$ n'appartenant ni à A_2 ni à aucun des plans des triangles non dégénérés $a_i a_{i+1} a_{i+2}$, ni à aucune droite définie par un triangle dégénéré $a_i a_{i+1} a_{i+2}$. Cela implique $(a'a_{i+1}) \cap (a'a_{i+2}) = a' a_{i+1}$ ($i=1, 2, \dots, m$).

On substitue maintenant aux faces $aa_i a_{i+1}$ les triangles $a' a_i a_{i+1}$, ce qui remplace A_1 par une nouvelle surface simpliciale, et l'on continue de la sorte jusqu'à ce qu'on obtienne une surface simpliciale, notée encore A_1 , dont aucun sommet ne coïncide avec un sommet de A_2 . Si un sommet de A_1 est intérieur à une arête ou à une face de A_2 , on peut appliquer la même construction, qui, répétée un nombre fini de fois, donne une surface simpliciale, notée toujours A_1 , dont aucun sommet n'appartient à A_2 .

(II) Supposons qu'un sommet b de A_2 soit intérieur à une arête aa_1 de A_1 . Comme $b \notin \partial A_1$, on peut supposer $a \notin \partial A_1$. Considérant le disque $(aa_1a_2) \cup \dots \cup (aa_ma_1)$ des faces de A_1 autour de a , on détermine $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $a' \in B_a(\varepsilon)$, les conditions suivantes soient remplies: (1) Le compact $(a'a_1a_2) \cup \dots \cup (a'a_ma_1)$ n'a aucun point commun avec le complémentaire du disque fermé $(aa_1a_2) \cup \dots \cup (aa_ma_1)$ dans A_1 . (2)

Tous les triangles $a'a_{i+1}$ sont non dégénérés et l'on a $(a'a_{i+1}) \cap (a'a_{j+1}) = a'$ toutes les fois où $(a_i a_{i+1}) \cap (a_j a_{j+1}) = \emptyset$. (3) Si un sommet $b' \neq b$ de A_2 n'appartient pas à $(aa_1 a_2) \cup \dots \cup (aa_m a_1)$, il n'appartient pas non plus à $(a'a_1 a_2) \cup \dots \cup (a'a_m a_1)$.

Soit $a' \in B_a(\varepsilon)$ un point n'appartenant ni à A_2 , ni à la droite définie par aa_1 , ni à aucun des plans des triangles non dégénérés $a_i a_{i+1} a_{i+2}$ ni à aucune des droites des triangles dégénérés $a_i a_{i+1} a_{i+2}$. On remplace les faces $aa_i a_{i+1}$ par les triangles $a' a_i a_{i+1}$ ($i=1, 2, \dots, m$) et l'on répète ensuite la même construction autant de fois qu'il est nécessaire.

Si un sommet b de A_2 est encore intérieur à une face $aa_1 a_2$ de A_1 , on peut supposer $a \notin \partial A_1$ et procéder de la même manière. On obtient finalement une surface simpliciale A_1 telle qu'aucun de ses sommets n'appartienne à A_2 et qu'aucun sommet de A_2 n'appartienne à A_1 .

(III) Soit maintenant une face $aa_1 a_2$ de A_1 contenant un segment d'une arête bb_1 de A_2 . On peut supposer $a \notin \partial A_1$ et considérer le disque $(aa_1 a_2) \cup \dots \cup (aa_m a_1)$ des faces de A_1 autour de a . Soit $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $a' \in B_a(\varepsilon)$, les conditions ci-dessous soient satisfaites: (1) Le compact $(a'a_1 a_2) \cup \dots \cup (a'a_m a_1)$ n'a aucun point commun avec le complémentaire de $(aa_1 a_2) \cup \dots \cup (aa_m a_1)$ dans A_1 . (2) Tous les triangles $a' a_i a_{i+1}$ sont non dégénérés et l'on a $(a' a_i a_{i+1}) \cap (a' a_j a_{j+1}) = a'$ lorsque $(a_i a_{i+1}) \cap (a_j a_{j+1}) = \emptyset$. (3) Il n'existe pas de sommets de A_2 sur $(a'a_1 a_2) \cup \dots \cup (a'a_m a_1)$. (4) Si une arête de A_2 ne contient pas un segment appartenant à une face $aa_i a_{i+1}$, elle ne possède pas non plus un segment appartenant à $a' a_i a_{i+1}$ ($i=1, 2, \dots, m$).

On choisit un point $a' \in B_a(\varepsilon)$ n'appartenant ni à A_2 ni au plan de $aa_1 a_2$, ni à aucun des plans des triangles non dégénérés $a_i a_{i+1} a_{i+2}$, ni à aucune des droites des triangles dégénérés $a_i a_{i+1} a_{i+2}$, et on remplace les faces $aa_i a_{i+1}$ de A_1 par les triangles $a' a_i a_{i+1}$ ($i=1, 2, \dots, m$). Cette construction, répétée successivement, conduit à une surface simpliciale A_1 dont aucune face ne contient des segments d'arêtes de A_2 .

(IV) Soit maintenant $bb_1 b_2$ une face de A_2 contenant un segment d'une arête aa_1 de A_1 . Supposant $a \notin \partial A_1$, ce qui est loisible, et considérant le disque $(aa_1 a_2) \cup \dots \cup (aa_m a_1)$ des faces de A_1 autour de a , on détermine un réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $a' \in B_a(\varepsilon)$, les conditions suivantes soient satisfaites: (1) Le compact $(a'a_1 a_2) \cup \dots \cup (a'a_m a_1)$ n'a aucun point commun avec le complémentaire de $(aa_1 a_2) \cup \dots \cup (aa_m a_1)$ dans A_1 . (2) Les triangles $a' a_1 a_2, \dots, a' a_m a_1$ sont non dégénérés et l'on a $(a' a_i a_{i+1}) \cap (a' a_j a_{j+1}) = a'$ toutes les fois où $(a_i a_{i+1}) \cap (a_j a_{j+1}) = \emptyset$. (3) Il n'existe pas des sommets de A_2 sur $(a'a_1 a_2) \cup \dots \cup (a'a_m a_1)$. (4) Aucun des triangles $a' a_1 a_2, \dots, a' a_m a_1$ ne contient des segments d'arêtes de A_2 . (5) Si une face de A_2 ne contient pas de segment appartenant à une arête

aa_i , elle ne possède pas non plus de segment appartenant à $a'a_i$ ($i=1, 2, \dots, m$).

On choisit un point $a' \in B_a(\varepsilon)$ n'appartenant ni à A_2 ni au plan de bb_1b_2 , ni à aucun des plans des triangles non dégénérés $a_i a_{i+1} a_{i+2}$, ni à aucune des droites des triangles dégénérés $a_i a_{i+1} a_{i+2}$, et on remplace les faces $aa_i a_{i+1}$ de A_1 par les triangles $a' a_i a_{i+1}$ ($i=1, 2, \dots, m$).

Par répétition de cette opération un nombre fini de fois, on obtient une surface simpliciale A_1 telle que le couple (A_1, A_2) satisfasse aux deux premières conditions de la définition de la position relative canonique.

(V) Il reste à considérer le cas où l'intérieur d'une arête aa_1 de A_1 et l'intérieur d'une arête bb_1 de A_2 ont un point commun. Supposant $a \notin \partial A_1$ et considérant le disque des faces $aa_i a_{i+1}$ ($i=1, 2, \dots, m$) de A_1 autour de a , on détermine un réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $a' \in B_a(\varepsilon)$, les conditions (1), (2), (3), (4) de (IV) et en outre les deux conditions ci-après soient vérifiées. (5) Aucune des arêtes $a'a_1, \dots, a'a_m$ ne contient des segments appartenant à des faces de A_2 . (6) Si l'intérieur d'une arête de A_2 ne rencontre pas l'intérieur d'une arête aa_i , il ne rencontre pas non plus l'intérieur de $a'a_i$ ($i=1, 2, \dots, m$).

On choisit un point $a' \in B_a(\varepsilon)$ n'appartenant ni à A_2 , ni au plan des aa_1 et bb_1 , ni à aucun des plans des triangles non dégénérés $a_i a_{i+1} a_{i+2}$, ni à aucune des droites des triangles dégénérés $a_i a_{i+1} a_{i+2}$, et on remplace les faces $aa_1 a_2, \dots, aa_m a_1$ de A_1 par les triangles $a' a_1 a_2, \dots, a' a_m a_1$. Ce genre de déformation, répété un nombre fini de fois, conduit à une surface simpliciale ayant même bord que la surface de départ A_1 et se trouvant en position canonique relativement à A_2 .

La Proposition 2.3 est ainsi établie.

Si l'on remarque que tous les homéomorphismes effectués déplacent les points de A_1 à des distances aussi petites que l'on veut, on peut énoncer la

PROPOSITION 2.4. *Soient A_1 et A_2 deux surfaces simpliciales de R^3 telles que $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Si A_2 est sans bord et si $A_1 \cap A_2$ ne rencontre pas ∂A_1 , on peut, quel que soit $\varepsilon > 0$, déterminer un isomorphisme simplicial ξ de A_1 sur une surface simpliciale A'_1 de R^3 de façon que (1) $|\xi(x) - x| < \varepsilon$ pour tout $x \in A_1$, (2) $\xi(x) = x$ pour tout $x \in \partial A_1$, (3) $A'_1 = \xi(A_1)$ et A_2 se trouvent en position relative canonique.*

Lorsque A_2 possède aussi un bord, le résultat reste évidemment valable toutes les fois où $A_1 \cap A_2$ ne rencontre pas $\partial A_1 \cup \partial A_2$. En cas contraire, on peut construire l'homéomorphisme ξ de façon que la première et la troisième des conditions ci-dessus soient satisfaites, mais pas la deuxième.

3. Généralisation du théorème d'Antoine. Soient C un cylindre ordinaire, b et b' ses bases, l son axe. Un polyèdre homéomorphe à ce

cylindre sera noté $C(b, b'; l)$ toutes les fois où il sera muni d'une triangulation dans laquelle les images des b et b' sont des disques simpliciaux et l'image de l est une réunion de 1-simplexes.

Un polyèdre triangulé de R^3 sera dit un *tore solide simplicial d'âme* Λ , s'il est un tore solide formé d'une réunion finie de polyèdres $C_i(b_i, b'_i; l_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$) tels que

$$(1) C_i(b_i, b'_i; l_i) \cap C_{i+1}(b_{i+1}, b'_{i+1}; l_{i+1}) = b'_i = b_{i+1} \text{ pour } i=1, 2, \dots, n-1,$$

$$(2) C_n(b_n, b'_n; l_n) \cap C_1(b_1, b'_1; l_1) = b'_n = b_1,$$

$$(3) C_i(b_i, b'_i; l_i) \cap C_j(b_j, b'_j; l_j) = \emptyset \text{ si } i \text{ et } j \text{ ne sont pas consécutifs mod } n,$$

$$(4) \Lambda = \bigcup_1^n l_i \text{ soit un cycle polygonal.}$$

L'image de $\{(x_1, x_2) \in R^2 \mid 1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 2\}$ dans R^3 par une injection continue sera appelée un *fermé annulaire topologique* de R^3 . Un fermé annulaire topologique sera appelé un *fermé annulaire simplicial* s'il est une surface simpliciale.

PROPOSITION 3.1. *Considérons dans R^3 deux cycles polygonaux Λ et L simplement enlacés. Soit A un fermé annulaire simplicial de R^3 limité par les cycles polygonaux Γ_1 et Γ_2 et tel que $A \cap \Lambda = \emptyset$ et $A \cap L = \emptyset$. Soient μ et ν , considérés non négatifs, les nombres d'enlacement de Γ_1 avec Λ et L respectivement. S'il existe un tore solide simplicial d'âme Λ contenant Γ_1 à son intérieur et laissant Γ_2 et L à son extérieur, et si $\mu > 1$ et $\nu > 1$, ces deux entiers sont premiers entre eux.*

DÉMONSTRATION. Soit F la frontière du tore solide. D'après la Proposition 2.4, il existe un fermé annulaire simplicial A' en position canonique relativement à F , limité par Γ_1 et Γ_2 , et tel que $A' \cap \Lambda = \emptyset$ et $A' \cap L = \emptyset$. D'après la Proposition 2.2, $A' \cap F$ est formé d'un nombre fini de cycles polygonaux deux à deux disjoints. Soient $z_1, z_2, \dots, z_n$ les cycles polygonaux de $A' \cap F$ qui sont homologues à zéro dans A' et qui jouissent de la propriété suivante: Pour tout z_i ($i=1, 2, \dots, n$), il n'existe aucun autre cycle polygonal de $A' \cap F$ homologue à zéro dans A' et limitant (dans A') un disque contenant z_i . Nous traçons dans A' des cycles polygonaux $z'_1, z'_2, \dots, z'_n$ deux à deux disjoints, ne rencontrant ni $A' \cap F$ ni $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ et tels que, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, z'_i limite dans A' un disque D'_i contenant à son intérieur le seul cycle z_i parmi les cycles $z_1, z_2, \dots, z_n$. Supprimant de A' les intérieurs des D'_i dans A' , on obtient un fermé connexe A'' qui ne contient aucun cycle polygonal de $A' \cap F$ homologue à zéro dans A' . Comme Γ_1 et Γ_2 font partie de $\partial A''$, l'intersection $A'' \cap F$ n'est pas vide. Elle ne comprend d'ailleurs que des cycles de $A' \cap F$. Il existe donc dans $A' \cap F$ un cycle polygonal y qui n'est pas homologue à zéro dans A' . Mais alors $y \sim \Gamma_1$ dans A' , donc aussi dans $R^3 - \Lambda$ et dans

$R^3 - L$, et cela prouve que les nombres d'enlacement de y avec Λ et L sont respectivement μ et ν . Comme $y \subset F$, le théorème d'Antoine est applicable. Les entiers μ et ν sont bien premiers entre eux.

PROPOSITION 3.2. *Soient, dans R^3 , Λ et L deux cycles polygonaux simplement enlacés. Soit A un fermé annulaire topologique de R^3 limité par les courbes de Jordan Γ_1 et Γ_2 et tel que $A \cap \Lambda = \emptyset$ et $A \cap L = \emptyset$. Soient μ et ν , considérés non négatifs, les nombres d'enlacement de Γ_1 avec Λ et L respectivement. S'il existe un tore solide simplicial d'âme Λ contenant Γ_1 à son intérieur et laissant Γ_2 et L à son extérieur, et si $\mu > 1$ et $\nu > 1$, ces deux entiers sont premiers entre eux.*

DÉMONSTRATION. Soient ε_1 la distance entre A et Λ , ε_2 la distance entre A et L , ε_3 la distance entre Γ_1 et la frontière F du tore solide, ε_4 la distance entre Γ_2 et F . Soit $\varepsilon = \inf\{\varepsilon_1/2, \varepsilon_2/2, \varepsilon_3/2, \varepsilon_4/2\}$. D'après le théorème d'approximation [2] de Bing, il existe un homéomorphisme ξ appliquant A sur un fermé annulaire simplicial A' et tel que $|\xi(x) - x| < \varepsilon$ pour tout $x \in A$. A' est limité par deux cycles polygonaux Γ'_1 et Γ'_2 tels que $\Gamma_1 \sim \Gamma'_1$ et $\Gamma_2 \sim \Gamma'_2$ dans $R^3 - (\Lambda \cup L)$. Il s'ensuit que les nombres d'enlacement de Γ'_1 (et de Γ'_2) avec Λ et L sont respectivement μ et ν . Comme Γ'_1 et Γ'_2 se trouvent respectivement à l'intérieur et à l'extérieur du tore solide, la Proposition 3.1 donne le résultat.

Soit ε un réel positif. Etant donné une courbe de Jordan Γ dans R^3 , on peut déterminer un cycle polygonal $\Lambda \subset R^3$ et un homéomorphisme $\xi: \Gamma \rightarrow \Lambda$ tel que $|\xi(x) - x| < \varepsilon$ pour tout $x \in \Gamma$. Nous appellerons Λ une *approximation polygonale canonique* de Γ .

PROPOSITION 3.3. *Soit $f: [0, 1] \times S \rightarrow R^3$ l'application déjà définie (§1). Soient L un cycle polygonal simplement enlacé avec Γ_0 et $t_2 \in]0, 1]$ une valeur telle que $L \cap f([0, t_2] \times S) = \emptyset$. Supposons qu'il existe une approximation polygonale canonique Λ de Γ_0 donnant lieu aux propriétés suivantes:*

(1) *Il existe un tore solide simplicial T d'âme Λ contenant Γ_0 à son intérieur et laissant à son extérieur la courbe Γ_{t_2} et le cycle L .*

(2) *Il existe une valeur positive $t_1 < t_2$ telle que Γ_{t_1} se trouve à l'intérieur de T et que le fermé annulaire topologique $f([t_1, t_2] \times S)$ n'ait aucun point commun avec Λ .*

Dans ces conditions, si $\mu > 1$ et $\nu > 1$, ces deux entiers sont premiers entre eux.

En effet, d'après la Proposition 2.1, le nombre d'enlacement des courbes Γ_t , $0 < t \leq t_2$, avec L est ν . Il en est ainsi en particulier des courbes Γ_{t_1} et Γ_{t_2} , qui constituent le bord du fermé annulaire topologique $f([t_1, t_2] \times S)$. Le résultat est donc une conséquence immédiate de la Proposition 3.2.

COROLLAIRE 3.3. *f étant toujours l'application définie dans §1, si Γ_0 est un cycle polygonal et si $\mu > 1$ et $\nu > 1$, ces deux entiers sont premiers entre eux.*

DÉMONSTRATION. Soient L un cycle polygonal simplement enlacé avec Γ_0 et $t_2 \in]0, 1]$ une valeur pour laquelle $L \cap f([0, t_2] \times S) = \emptyset$. Soit T un tore solide simplicial d'âme Γ_0 laissant à son extérieur la courbe Γ_{t_2} et le cycle L . Il suffit alors de choisir une valeur positive $t_1 < t_2$ pour laquelle la courbe Γ_{t_1} soit à l'intérieur de T .

RÉFÉRENCES

1. L. Antoine, *Sur l'homéomorphie de deux figures et de leurs voisinages*, J. Math. Pures Appl. (8) **4** (1921), 221–325.
2. R. H. Bing, *Approximating surfaces with polyhedral ones*, Ann. of Math. (2) **65** (1957), 456–483. MR **19**, 300.

99, RUE DE SÈVRES, 92 BOULOGNE, FRANCE