3-VARIÉTÉS QUI NE SONT PAS DES REVÊTEMENTS CYCLIQUES RAMIFIÉS SUR S^3

JOSÉ M. MONTESINOS

ABSTRACT. It is shown that if F_g is a compact, orientable surface of genus g , then $S^1 \times F_g$ is not a cyclic branched covering of S^3 .

Soit F_g une surface fermée du genre $g \geq 1$. J. S. Birman et H. M. Hilden ont manifesté en [1] leur intérêt pour le suivant problème: Est-ce que toute variété admet une représentation comme un revêtement cyclique ramifié à p feuillets sur S^3 ? Dans cet article, nous voulons prouver que *les variétés $S^1 \times F_g$ ne peuvent pas être représentées de cette façon*. On a montré en [2] et [4] que $S^1 \times F_g$ n'est pas un revêtement cyclique ramifié à deux feuillets sur S^3 , et en conséquence, la conclusion de cet article est une généralisation.

Supposons que $M = S^1 \times F_g$ est un revêtement cyclique ramifié à p feuillets sur S^3 . Alors, il y a un autohoméomorphisme t en M de période $n > 1$ dont l'espace orbite est S^3 . Soient t' et t'' les automorphismes induits respectivement par t en $H_1(M)$ et $H_2(M)$. R. H. Fox [2, Théorème 1] a prouvé que, pour tout $z \in H_1(M)$ et tout $f \in H_2(M)$, on a:

$$(1) \quad z + t'z + (t')^2z + \dots + (t')^{n-1}z = 0,$$

$$(2) \quad f + t''f + (t'')^2f + \dots + (t'')^{n-1}f = 0.$$

En ce qui concerne la démonstration, nous distinguerons entre le cas $S^1 \times S^1 \times S^1$ et le cas $S^1 \times F_g$, avec $g > 1$, parce que les démonstrations sont fondés sur principes différents.

Le cas spécial $M = S^1 \times S^1 \times S^1$. 1. Soit $\{z_1, z_2, z_3\}$ une base de $H_1(M) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. De (1) on déduit que la matrice T de t' relatif à $\{z_1, z_2, z_3\}$ vérifie:

Received by the editors September 17, 1973 and, in revised form, January 18, 1974.

AMS (MOS) subject classifications (1970). Primary 55A10; Secondary 55F05, 15A21, 15A36.

Key words and phrases. Cyclic branched covering spaces, three manifolds, three-sphere, two manifolds.

$$(3) \quad E + T + T^2 + \dots + T^{n-1} = 0$$

où E est la matrice unité et 0 est la matrice qui a tous ses éléments égaux à zéro.

2. Soient $s_1(T)$, $s_2(T)$ et $s_3(T)$ les facteurs invariants de T . Alors $s_1(T)$ divise $s_2(T)$, $s_2(T)$ divise $s_3(T)$ et le degré de $s_3(T)$ est ≤ 3 . En outre, de (3) on déduit que $s_3(T)$ est un diviseur du polynôme $1 + X + \dots + X^{n-1}$.

En rapport avec la détermination des facteurs invariants de T , nous allons trouver les polynômes de degré ≤ 3 qui sont diviseurs de $1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1}$ et qui sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$, le corps des nombres rationnels.

Soit $\Phi_d(X)$ l'équation qui a comme racines les racines primitives d^e de l'unité, chacune d'elles comptée une seule fois. L'équation $\Phi_d(X)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ et on a que (cfr. [7, p. 113]):

$$1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1} = \prod_{d \neq 1; d|n} \Phi_d(X).$$

Le degré de $\Phi_d(X)$ coïncide avec le nombre de racines primitives d^e de l'unité et il n'est pas autre que $\phi(d)$, ϕ étant la fonction d'Euler. Si p est premier $\phi(p) = p - 1$ et $\phi(p^i) > \phi(p^j)$ quand $i > j$; si p et q sont premiers entre eux $\phi(pq) = \phi(p)\phi(q)$. De tout cela, il est facile de déduire que les valeurs de $d \neq 1$ tels que $\phi(d) \leq 3$ sont $d = 2, 3, 4, 6$. Les polynômes Φ_d qui correspondent à ces valeurs sont:

$$\Phi_2(X) = X + 1, \quad \Phi_3(X) = X^2 + X + 1,$$

$$\Phi_4(X) = X^2 + 1, \quad \Phi_6(X) = X^2 - X + 1.$$

Il résulte que les facteurs invariants de la matrice T peuvent être d'un des types suivants:

- (i) $s_1(T) = s_2(T) = 1$, $s_3(T) = (X + 1)(X^2 - X + 1)$,
- (ii) $s_1(T) = s_2(T) = 1$, $s_3(T) = (X + 1)(X^2 + 1)$,
- (iii) $s_1(T) = s_2(T) = 1$, $s_3(T) = (X + 1)(X^2 + X + 1)$,
- (iv) $s_1(T) = s_2(T) = s_3(T) = X + 1$.

En conséquence T est semblable sur $\mathbb{Q}$ à une des matrices suivantes:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et c'est pourquoi, on a toujours, $\det T = -1$.

3. Si la matrice T a ses facteurs invariants du type (iv), T est égal à la matrice

$$U_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Supposons donc que les facteurs invariants de T soient d'un des trois types (i), (ii), (iii). Dans ces cas, T admet la valeur propre $-1 \in \mathbb{Z}$, et ainsi [5, p. 54, problème 1] T est semblable, sur $\mathbb{Z}$, à une des matrices:

$$A_i = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & a'_i & b'_i \\ \hline 0 & & \\ 0 & & C_i \end{array} \right), \quad 1 \leq i \leq 3,$$

où C_i est une matrice telle que:

(a) $\det C_i = 1$, $1 \leq i \leq 3$.

(b) $C_1^2 - C_1 + E = 0$, $C_2^2 + E = 0$, $C_3^2 + C_3 + E = 0$.

A partir de ces propriétés et de [5, pp. 54 et 55, Problèmes 4, 5 et 9], on déduit que C_1, C_2, C_3 sont semblables sur $\mathbb{Z}$, respectivement à

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

En conséquence la matrice A_i est semblable sur $\mathbb{Z}$ à la matrice

$$B_i = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & a_i & b_i \\ \hline 0 & & \\ 0 & & D_i \end{array} \right)$$

pour $1 \leq i \leq 3$.

4. Soit la similitude (cfr. [5, pp. 54-55, Problème 6]):

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & m & n \\ \hline 0 & & \\ 0 & & E \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|cc} -1 & a_i & b_i \\ \hline 0 & & \\ 0 & & D_i \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & -m & -n \\ \hline 0 & & \\ 0 & & E \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & p & q \\ \hline 0 & & \\ 0 & & D_i \end{array} \right).$$

$i = 1$. Dans ce cas, on a $p = m - n + a_1$, $q = m + 2n + b_1$ et alors $q - p = 3n + b_1 - a_1$, $q + 2p = 3m + b_1 + 2a_1$. Nous pouvons distinguer trois cas:

(α) $b_1 - a_1 \equiv 0 \pmod{3}$. Alors $b_1 + 2a_1 \equiv 0 \pmod{3}$ et m et n sont tels que $p = q = 0$.

(β) $b_1 - a_1 \equiv 1 \pmod{3}$. Alors $b_1 + 2a_1 \equiv 1 \pmod{3}$ et m et n sont tels que $p = 0, q = 1$.

(γ) $b_1 - a_1 \equiv -1 \pmod{3}$. Alors $b_1 + 2a_1 \equiv -1 \pmod{3}$ et m et n sont tels que $p = 0, q = -1$.

Donc, B_1 est semblable sur $\mathbb{Z}$ à une des matrices suivantes:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = U_2, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = U_3, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = U_4.$$

$i = 2$. Dans ce cas, on a $p = m - n + a_2, q = m + n + b_2$ et alors $q + p = 2m + b_2 + a_2, q - p = 2n + b_2 - a_2$. Nous pouvons distinguer deux cas:

(α) $b_2 + a_2 \equiv 0 \pmod{2}$. Alors $b_2 - a_2 \equiv 0 \pmod{2}$ et m et n sont tels que $p = q = 0$.

(β) $b_2 + a_2 \equiv 1 \pmod{2}$. Alors $b_2 - a_2 \equiv 1 \pmod{2}$ et m et n sont tels que $p = 0, q = 1$.

Donc B_2 est semblable sur $\mathbb{Z}$ à une des matrices suivantes:

$$U_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$i = 3$. Dans ce cas, on a $p = m - n + a_3, q = m + b_3$ et toujours m et n sont tels que $p = q = 0$. Donc B_3 est semblable sur $\mathbb{Z}$ à la matrice

$$U_7 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Représentons S^1 comme l'espace quotient des nombres réels $\mathbb{R}$, où $t \equiv s$ si et seulement si $t - s \in \mathbb{Z}$. Appellons t l'élément de S^1 représenté par $t \in \mathbb{R}$.

Considérons les autohoméomorphismes u_i de M , $1 \leq i \leq 7$, définis de la façon suivante:

$$\begin{aligned} u_1(r, s, t) &= (-r, -s, -t), & u_2(r, s, t) &= (-r, -t, s + t), \\ u_3(r, s, t) &= (-r, -t, r + s + t), & u_4(r, s, t) &= (-r, -t, -r + s + t), \\ u_5(r, s, t) &= (-r, -t, s), & u_6(r, s, t) &= (-r, -t, r + s), \\ u_7(r, s, t) &= (-r, -t, s - t), \end{aligned}$$

pour chaque $(r, s, t) \in M$.

Soit $*$ un point de S^1 . Les chemins $S^1 \times \{*\} \times \{*\}, \{*\} \times S^1 \times \{*\}$ et $\{*\} \times$

$\{*\} \times S^1$ avec des orientations fixes déterminent une base $\{z_1, z_2, z_3\}$ de $H_1(M)$. Alors, la matrice de u_i par rapport avec la base $\{z_1, z_2, z_3\}$ est U_i , pour $1 \leq i \leq 7$.

Le tore $F = \{*\} \times S^1 \times S^1$ avec une orientation fixe, détermine un élément $f \neq 0$ de $H_2(M)$, et comme $u_i|_F$ est un autohoméomorphisme de F qui préserve l'orientation, nous déduisons que :

$$(4) \quad u_i''f = f, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq 7.$$

6. Soit t un autohoméomorphisme de M tel que la matrice de t' par rapport avec la base $\{z_1, z_2, z_3\}$ est semblable sur $\mathbb{Z}$ à U_i . Etant donné que M est asphérique on déduit d'un théorème de Hurewicz que t est homotope à un autohoméomorphisme de la forme $vu_i v^{-1}$, où v est un autohoméomorphisme de M . Considérons l'élément $v''f \neq 0$ de $H_2(M)$. Nous déduisons de (4) que

$$t''(v''f) = v''u_i''(v'')^{-1}(v''f) = v''u_i''f = v''f$$

et ainsi, l'équation (2) conduit à $n(v''f) = 0$, ce qui est impossible, car $n > 0$ et $H_2(M)$ n'a pas torsion. Ceci montre notre affirmation pour ce cas spécial.

Le cas $M = S^1 \times F_g$, avec $g > 1$. Si nous considérons M comme un espace fibré sur F_g avec fibre S^1 , t est isotope à un autohoméomorphisme u de M qui préserve les fibres [8]. Donc, u induit un autohoméomorphisme v en F_g . On a (suite de Thom-Gysin [6, p. 260]):

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_0(F_g) & \xrightarrow{\rho} & H_1(M) & \xrightarrow{p_*} & H_1(F_g) \longrightarrow 0 \\ & & \bar{v} \downarrow \approx & & u' \downarrow \approx & & v' \downarrow \approx \\ 0 & \longrightarrow & H_0(F_g) & \xrightarrow{\rho} & H_1(M) & \xrightarrow{p_*} & H_1(F_g) \longrightarrow 0 \end{array}$$

où $\bar{v}$ est l'automorphisme identité, induit par v sur $H_0(F_g)$, et le noyau de p_* est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Soit z un générateur de $H_0(F_g) \approx \mathbb{Z}$. Alors, pour l'élément $\rho z \neq 0$ de $H_1(M)$, nous avons en replaçant dans l'équation (1):

$$0 = \rho z + u'\rho z + \dots + (u')^{n-1}\rho z = \rho z + \rho \bar{v} z + \dots + \rho (\bar{v})^{n-1} z = n\rho z,$$

et ceci est impossible, parce que $n > 1$ et $H_1(M)$ n'a pas torsion.

RÉFÉRENCES

1. J. S. Birman and H. M. Hilden, *The homeomorphism problem for S^3* , Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973), 1006-1010.
2. R. H. Fox, *A note on branched cyclic coverings of spheres*, Rev. Mat. Hisp.-Amer. 32 (1972), 158-166.

3. J. M. Montesinos, *Una familia infinita de nudos representados no separables*, Rev. Mat. Hisp.-Amer. 33 (1973), 32–35.
4. ———, *Variedades de Seifert que son recubridores cíclicos ramificados de dos hojas*, Bol. Soc. Mat. Mexicana 18 (1973), 1–32.
5. M. Newman, *Integral matrices*, Academic Press, New York, 1972.
6. E. H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill, New York, 1966. MR 35 #1007.
7. B. L. van der Waerden, *Modern algebra*, Vol. I, Springer, Berlin, 1930–1931; English transl., Ungar, New York, 1949. MR 10 #587.
8. F. Waldhausen, *Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten*. I, II, Invent. Math. 3 (1967), 308–333; *ibid.* 4 (1967), 87–117. MR 38 #3880.

FACULTAD DE CIENCIAS, SECCIÓN DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, MADRID, SPAIN