PERTURBATIONS LOCALEMENT LIPSCHITZIENNES ET CONTINUES D'OPERATEURS m -ACCRETIFS

MICHEL PIERRE

ABSTRACT. We show that, in any Banach space, the sum of an m -accretive operator and of a continuous accretive operator is m -accretive; that achieves a slight generalization of such theorems which are already known, but the method used here is very different and also comes to a new result about (nonnecessarily accretive) locally Lipschitz continuous perturbations of m -accretive operators. The case when the perturbation depends on time is also considered.

Nous étudions les perturbations d'un opérateur m -accrétif d'un espace de Banach quelconque par un opérateur localement lipschitzien non nécessairement accrétif, puis par un opérateur continu accrétif.

Nous utilisons essentiellement la notion de solution intégrale d'une équation d'évolution (cf. Benilan [2]).

Dans tout ce qui suit, X désigne un espace de Banach de norme $|\cdot|$. Nous notons:

$$\tau(u, v) = \lim_{t \rightarrow 0; t > 0} \frac{|u + tv| - |u|}{t}.$$

Le domaine et l'image d'un opérateur multivoque A sont notés respectivement $D(A)$ et $R(A)$.

A désigne un opérateur m -accrétif de X , c'est-à-dire un opérateur vérifiant les deux propriétés:

$$\forall [u, v], [\hat{u}, \hat{v}] \in A, \quad \tau(u - \hat{u}, v - \hat{v}) \geq 0 \text{ (accrétivité),}$$

$$\forall \lambda > 0, \quad R(I + \lambda A) = X.$$

Une solution intégrale du problème $du/dt + Au \ni f$ où f appartient à $L^1(0, T; X)$, est une fonction u de $\mathcal{C}([0, T], \overline{D(A)})$ telle que:

$$\begin{cases} \forall [x, y] \in A, \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T, \\ |u(t) - x| \leq |u(s) - x| + \int_s^t \tau(u(r) - x, f(r) - y) dr. \end{cases}$$

Un opérateur B de X est dit "accrétif au sens de Browder" si:

Received by the editors May 20, 1975.

AMS (MOS) subject classifications (1970). Primary 47H15, 34G05.

Key words and phrases. Opérateurs m -accrétifs, perturbations, solutions intégrales, semi-groupe.

© American Mathematical Society 1976

$$\forall [u, v], [\hat{u}, \hat{v}] \in B, \quad u \neq \hat{u} \Rightarrow \tau(u - \hat{u}, -v + \hat{v}) \leq 0.$$

Il est alors accréatif au sens plus faible défini ci-dessus.

Nous démontrons principalement les deux résultats suivants:

THEOREME I. Soit $B: \overline{D(A)} \mapsto X$ univoque, localement lipschitzien et vérifiant:
 $\exists a \in \mathbf{R}, \exists M \geq 0$ tels que

$$(1) \quad \forall u, \hat{u} \in \overline{D(A)}, \quad \tau(u - \hat{u}, -Bu + B\hat{u}) \leq M + a \cdot |u - \hat{u}|.$$

Alors, $A + B$ "engendre" un semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ d'opérateurs de $\overline{D(A)}$, défini sur $[0, +\infty[$ par:

Pour tout $u_0 \in \overline{D(A)}$, la fonction $t \in [0, +\infty[\mapsto u(t) = S(t)u_0$ est l'unique solution intégrale de:

$$(P) \quad \begin{cases} du/dt + Au \ni f \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad \text{avec } f(t) = -Bu(t).$$

THEOREME II. Soit $B: \overline{D(A)} \mapsto X$ accréatif "au sens de Browder" et continu. Alors, $A + B$ est m-accréatif.

REMARQUES. (1°) Pour $M = 0$, l'hypothèse (1) du Théorème I exprime que $B + aI$ est "accréatif au sens de Browder".

Mais cette hypothèse est vérifiée plus généralement, s'il existe un opérateur $B_0: \overline{D(A)} \mapsto X$ tel que:

(i) $B_0 + aI$ soit "accréatif au sens de Browder",

(ii) $\forall u \in \overline{D(A)}, |Bu - B_0u| \leq M/2$.

(ii°) Lorsque B est accréatif continu partout défini, B est accréatif "au sens de Browder" (cf. Martin [5]). Nous retrouvons dans ce cas au Théorème II, le résultat de Barbu [1] par une méthode très différente.

Cependant, le Théorème II ne se généralise pas au cas d'un opérateur continu, *seulement accréatif*, même en dimension finie, comme le prouve l'exemple suivant:

$$X = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}, \quad |(x, y)| = |x| + |y|,$$

$$D(A) = \{(u, 0): u \in \mathbf{R}\}, \quad A((u, 0)) = \{0\} \times \mathbf{R},$$

$$D(B) = D(A), \quad B((u, 0)) = (-u, u).$$

Alors, $A + B$ n'est pas accréatif et $I + A + B$ n'est pas surjectif.

Comme corollaire du Théorème II, nous obtenons le théorème suivant:

THEOREME III. Soit $B: [0, T] \times \overline{D(A)} \mapsto X$ vérifiant:

(i) B est continu,

(ii) $\exists a \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbf{R})$ tel que:

$$\text{p.p. } t \in [0, T] \quad \forall u, \hat{u} \in \overline{D(A)}, \quad \tau(u - \hat{u}, -B(t, u) + B(t, \hat{u})) \leq a(t)|u - \hat{u}|.$$

Alors, pour tout u_0 de $\overline{D(A)}$, il existe $u \in \mathcal{C}([0, T], \overline{D(A)})$ unique solution intégrale du problème:

$$(Q) \quad f \begin{cases} du/dt + Au \ni f \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad \text{avec } f(t) = -B(t, u(t)).$$

La démonstration du Théorème I utilise le résultat suivant:

LEMME (CF. BENILAN [2]). Soit $f \in L^1(0, T; X)$.

Alors,

(a) $\forall u_0 \in \overline{D(A)}$, il existe une unique solution intégrale du problème:

$$du/dt + Au \ni f, \quad u(0) = u_0.$$

(b) Etant donné u solution intégrale de $du/dt + Au \ni f$ et v solution intégrale de $dv/dt + Av \ni g$ ($g \in L^1(0, T; X)$), nous avons:

$$\forall 0 \leq s \leq t \leq T,$$

$$|u(t) - v(t)| \leq |u(s) - v(s)| + \int_s^t \tau(u(x) - v(x), f(x) - g(x)) dx.$$

DEMONSTRATION DU THEOREME I. Le lemme précédent nous permet de définir pour tous T et r strictement positifs l'application $S_{T,r}$ qui à tout élément u de X_0 égal à $\mathcal{C}([0, T]; \overline{D(A)} \cap \{u \in X: |u - u_0| \leq r\})$ associe la solution intégrale sur $[0, T]$ du problème $dv/dt + Av \ni -Bu(t)$, $v(0) = u_0$.

Utilisant que B est localement lipschitzien et les inégalités (b), nous montrons l'existence de T et r tels que $S_{T,r}$ soit une contraction stricte de X_0 dans lui-même, d'où l'existence et l'unicité d'une solution *locale* du problème (P). Pour montrer que cette solution se prolonge sur $[0, +\infty[$, il suffit, par un raisonnement classique, de démontrer que si u est solution intégrale du problème (P) sur $[0, T]$, $\lim_{t \rightarrow T^-} u(t)$ existe. Ceci résulte de l'inégalité:

$$\forall 0 \leq s \leq t < t + h < T$$

$$|u(t + h) - u(t)| \leq |u(s + h) - u(s)| + \int_s^t \tau(u(x + h) - u(x), -Bu(x + h) + Bu(x)) dx.$$

Soit en utilisant les hypothèses (I) et le lemme de Gronwall:

$$|u(t + h) - u(t)| \leq [|u(s + h) - u(s)| + M(t - s)]e^{a(t-s)}.$$

PROPOSITION. Sous les hypothèses du Théorème II, il existe une solution intégrale u de $\mathcal{C}([0, +\infty[; \overline{D(A)})$ du problème (P).

DEMONSTRATION. Nous approchons B par une suite B_n d'applications localement lipschitziennes vérifiant:

$$\sup_{u \in \overline{D(A)}} |B_n u - Bu| \leq \frac{1}{n}.$$

(Pour une démonstration de cette propriété cf. Lasota-Yorke [3]. L'idée d'utiliser une approximation par des opérateurs localement lipschitziens a été utilisée par H. Brezis (non publié) pour démontrer le théorème de Martin [5].)

B_n vérifie ainsi: $\forall u, \hat{u} \in \overline{D(A)}$, $\tau(u - \hat{u}, -B_n u + B_n \hat{u}) \leq 2/n$. Utilisant le Théorème I, il existe donc une suite u_n de $\mathcal{C}([0, +\infty[; \overline{D(A)})$ solutions intégrales de

$$\begin{cases} du_n/dt + Au_n \ni f_n \\ u_n(0) = u_0 \end{cases} \quad \text{avec } f_n(t) = -B_n u_n(t).$$

Cette suite converge uniformément sur tout intervalle borné. En effet, d'après l'inégalité:

$$|u_n(t) - u_m(t)| \leq \int_0^t \tau(u_n(x) - u_m(x), -B_n u_n(x) + B_m u_m(x)) dx,$$

nous obtenons:

$$|u_n(t) - u_m(t)| \leq T(1/n + 1/m)$$

en utilisant que B est "accréatif au sens de Browder".

La limite est alors solution intégrale du problème (P).

DEMONSTRATION DU THEOREME II. Appliquant la proposition précédente à l'opérateur $\lambda B + I - \nu$ (où $\lambda > 0$ et $\nu \in X$), il est classique de démontrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = u$ existe et vérifie $\nu - u - \lambda Bu \in Au$. (Cf. Benilan [2] pour une démonstration analogue.) Le Théorème II en résulte en remarquant d'autre part que $A + B$ est accréatif.

DEMONSTRATION DU THEOREME III. Notons $Y = \mathcal{C}([0, T]; X)$. Etant donné u_0 dans $\overline{D(A)}$ et b un réel strictement positif, nous définissons sur Y les opérateurs suivants:

$$\mathcal{A} = \{[u, f] \in Y \times Y: u(0) = u_0 \text{ et } u \text{ est solution intégrale de}$$

$$du/dt + bu + Au \ni f\},$$

$$\mathcal{B} = \{[u, v] \in Y \times Y: \forall t \in [0, T], v(t) = B(t, u(t)) + a(t)u(t)\}.$$

Alors:

(1°) $\mathcal{A} - b$ est m -accréatif (pour une démonstration, cf. Benilan [2, Proposition 1-15]).

(2°) $\mathcal{B}$ est continu sur $\mathcal{C}([0, T], \overline{D(A)})$ et donc sur $\overline{D(\mathcal{A})}$.

(3°) $\mathcal{B}$ est accréatif "au sens de Browder". Ce dernier point résulte du lemme suivant:

LEMME. Soit $\|\cdot\|$ la norme de Y et

$$\tilde{\tau}(u, v) = \lim_{\lambda \rightarrow 0; \lambda > 0} \frac{\|u + \lambda v\| - \|u\|}{\lambda}$$

pour u et v dans Y . Alors:

$$\tilde{\tau}(u, v) = \max\{\tau(u(t), v(t)): t \in [0, T], |u(t)| = \|u\|\}.$$

L'inégalité: $\tilde{\tau}(u, v) \geq \sup\{\tau(u(t), v(t)): t \in [0, T], |u(t)| = \|u\|\}$ est immédiate. Pour démontrer l'inégalité dans l'autre sens, remarquons qu'il existe t_0

dans $[0, T]$, $(t_n)_{n>0}$ suite dans $[0, T]$ convergeant vers t_0 , $(\lambda_n)_{n>0}$ suite dans $]0, +\infty[$ convergeant vers 0 tels que:

$$|u(t_n) + \lambda_n v(t_n)| = \|u + \lambda_n v\| \quad \text{et} \quad |u(t_0)| = \|u\|.$$

Alors, pour tout ε positif, il existe λ_0 tel que:

$$\frac{|u(t_0) + \lambda_0 v(t_0)| - |u(t_0)|}{\lambda_0} \leq \tau(u(t_0), v(t_0)) + \varepsilon.$$

Par continuité de u et v , et en utilisant la décroissance de la fonction $\lambda \mapsto (|u(t) + \lambda v(t)| - |u(t)|)/\lambda$, nous obtenons pour n assez grand:

$$\frac{\|u + \lambda_n v\| - \|u\|}{\lambda_n} \leq \frac{|u(t_n) + \lambda_n v(t_n)| - |u(t_n)|}{\lambda_n} \leq \tau(u(t_0), v(t_0)) + 2\varepsilon.$$

D'où l'inégalité cherchée.

D'après le Théorème II, $\mathcal{A} - b + \mathcal{B}$ est m -accréatif et donc $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ est *surjectif*. Il en résulte que, pour tout h dans Y , il existe u dans $\mathcal{C}([0, T], \overline{D(A)})$ solution intégrale de:

$$\begin{cases} du/dt + bu + Au \ni f_1 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad \text{avec } f_1(t) = -B(t, u(t)) - a(t)u(t) + h(t).$$

L'application $u \mapsto bu + a(t)u$ étant lipschitzienne sur X pour tout t de $[0, T]$, nous en déduisons par un théorème de point fixe (cf. Benilan [2, Proposition 1-12]) l'existence d'une solution intégrale de

$$\begin{cases} du/dt + bu + Au \ni f_2 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad \text{avec } f_2(t) = -B(t, u(t)) + bu(t)$$

et donc l'existence d'une solution du problème (Q) (cf. Benilan [2, Lemme 1.6]).

BIBLIOGRAPHIE

1. V. Barbu, *Continuous perturbations of nonlinear m -accretive operators in Banach spaces*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **6** (1972), 270-278. MR **48** #4858.
2. Benilan, *Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications*, Thèse, Orsay, 1972.
3. A. Lasota and J. A. Yorke, *The generic property of existence of solutions of differential equations in Banach space*, J. Differential Equations **13** (1973), 1-12. MR **49** #770.
4. R. H. Martin, Jr., *Differential equations on closed subsets of a Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc. **179** (1973), 399-414. MR **47** #7537.
5. ———, *A global existence theorem for autonomous differential equations in a Banach space*, Proc. Amer. Math. Soc. **26** (1970), 307-314. MR **41** #8791.