LA SEMICONTINUITÉ ET LA PROPRIÉTÉ DE BAIRE

Z. GRANDE AND S. STAWIKOWSKA

ABSTRACT. Let X, Y be two metric separable and complete spaces and R be a set of all reals numbers. If all sections $f_x(y) = f(x, y)$ ($x \in X$ and $y \in Y$) of a function $f: X \times Y \rightarrow R$ are almost qualitative upper semiequicontinuous and upper semicontinuous [upper semiequicontinuous] and if all sections $f^y(x) = f(x, y)$ have the Baire property [are borelien], then the function f has the Baire property [is borelien].

Soient (X, ξ_1) et (Y, ξ_2) deux espaces métriques, séparables et complets et R l'espace des nombres réels. Étant donné une fonction $f: X \times Y \rightarrow R$ et $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$ étant fixés, les fonctions d'une variable $f_{x_0}(y) = f(x_0, y)$ et $f^{y_0}(x) = f(x, y_0)$ ($x \in X$ et $y \in Y$) sont dites coupes de la fonction f relativement à x_0 et y_0 respectivement.

On said, par exemple, que si toutes les coupes f_x de la fonction f sont continues et toutes ses coupes f^y ont la propriété de Baire, la fonction f a la propriété de Baire.

D'autre part il résulte des théorèmes 15.5 et 15.4 du livre [2] l'existence d'une fonction $f: R^2 \rightarrow R$ qui n'a pas de la propriété de Baire et dont toutes les coupes f_x et f^y sont semicontinues supérieurement et discontinues au plus en deux points.

Dans cet article nous introduisons certaines propriétés des coupes f_x et f^y d'une fonction $f: X \times Y \rightarrow R$ qui impliquent la propriété de Baire de la fonction f .

DÉFINITION 1. On dit qu'une fonction $g: X \rightarrow R$ est *qualitativement semicontinue supérieurement* [presque qualitativement semicontinue supérieurement] au point $x_0 \in X$ lorsqu'il existe un ensemble $A \subset X$ ayant la propriété de Baire et résiduel dans certain entourage du point x_0 [ayant la propriété de Baire et de deuxième catégorie dans chaque entourage du point x_0] tel que $x_0 \in A$ et la fonction partielle $g|_A$ est semicontinue supérieurement au point x_0 .

DÉFINITION 2. On dit que les fonctions $g_t: X \rightarrow R$, ou $t \in T$ et T est un ensemble d'indices, sont *qualitativement semiéquicontinues supérieurement* [presque qualitativement semiéquicontinues supérieurement] au point x_0 lorsqu'il existe un ensemble $A \subset X$ ayant la propriété de Baire et résiduel dans certain entourage du point x_0 [ayant la propriété de Baire et de deuxième catégorie dans chaque entourage du point x_0] tel que $x_0 \in A$ et les fonctions partielles $g_t|_A$, $t \in T$, sont semiéquicontinues supérieurement au point x_0 .

Received by the editors June 15, 1977.

AMS (MOS) subject classifications (1970). Primary 26A35.

© 1979 American Mathematical Society
0002-9939/79/0000-0461/\$02.25

(c'est-à-dire:

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in A} \bigwedge_{t \in T} [\xi_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow g_t(x) - g_t(x_0) < \varepsilon].$$

THÉOREME 1. *Si toutes les coupes f_x d'une fonction $f: X \times Y \rightarrow R$ sont qualitativement semiéquivcontinues supérieurement [presque qualitativement semiéquivcontinues supérieurement] au point y_0 et si toutes les coupes f^y de cette fonction sont qualitativement semicontinues supérieurement [presque qualitativement semicontinues supérieurement] au point x_0 , la fonction f est qualitativement semicontinues supérieurement [presque qualitativement semicontinue supérieurement] au point (x_0, y_0) .*

DÉMONSTRATION. La coupe f^{y_0} étant qualitativement semicontinue supérieurement au point x_0 , il existe un ensemble $A \subset X$, ayant la propriété de Baire, contenant le point x_0 et résiduel dans certain entourage U du point x_0 tel que la fonction partielle $f^{y_0}|_A$ est semicontinue supérieurement au point x_0 . Les coupes f_x étant qualitativement semiéquivcontinues supérieurement au point y_0 , il existe un ensemble $B \subset Y$ ayant la propriété de Baire, contenant y_0 et résiduel dans certain entourage V du point y_0 tel que les fonctions partielles $f_x|_B$ sont semiéquivcontinues supérieurement au point y_0 . Remarquons que l'ensemble $C = A \times B$ a la propriété de Baire, contient le point (x_0, y_0) et est résiduel dans l'entourage $U \times V$ du point (x_0, y_0) .

Démontrons encore que la fonction partielle $f|_C$ est semicontinue supérieurement au point (x_0, y_0) . Fixons le nombre $\varepsilon > 0$. Il existe un nombre $\delta > 0$ tel que

$$f(x, y_0) - f(x_0, y_0) < \varepsilon/2 \quad (1)$$

pour tout $x \in A \cap \{t \in X: \xi_1(t, x_0) < \delta_1\}$ et il existe un nombre $\delta_2 > 0$ tel que

$$f(x, y) - f(x, y_0) < \varepsilon/2 \quad (2)$$

pour tout $y \in B \cap \{t \in Y: \xi_2(t, y_0) < \delta_2\}$ et pour tout $x \in X$. Posons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ et remarquons que

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= f(x, y) - f(x, y_0) + f(x, y_0) - f(x_0, y_0) \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned} \quad (3)$$

pour tout $(x, y) \in C \cap \{(u, v) \in X \times Y: (\xi_1 \times \xi_2)((u, v), (x_0, y_0)) < \delta\}$, d'où il vient que la fonction $f|_C$ est semicontinue supérieurement au point (x_0, y_0) .

La démonstration du fait que la fonction f est presque qualitativement semicontinue supérieurement au point (x_0, y_0) est analogue.

THÉOREME 2' ([1, Théorème 1]). *Pour qu'une fonction $f: X \rightarrow R$ ait la propriété de Baire, il faut et il suffit qu'elle satisfasse à la condition*

(I) *il existe, pour tout nombre $\varepsilon > 0$ et pour tout ensemble $A \subset X$ ayant la propriété de Baire et de deuxième catégorie, un ensemble $B \subset A$ ayant la propriété de Baire et de deuxième catégorie tel que $\text{csc}_B f \leq \varepsilon$.*

THÉORÈME 2. *Si toutes les coupes f_x d'une fonction $f: X \times Y \rightarrow R$ sont presque qualitativement semiéquivcontinues supérieurement et semicontinues supérieurement en tout point $y \in Y$ et si toutes ses coupes f_y ont la propriété de Baire, la fonction f a la propriété de Baire.*

DÉMONSTRATION. Sans restreindre la généralité on peut supposer que la fonction f est bornée. Supposons au contraire, que la fonction f n'ait pas la propriété de Baire. Il existe donc, d'après le Théorème 2', un nombre $\varepsilon > 0$ et un ensemble $A \subset X \times Y$ de deuxième catégorie et ayant la propriété de Baire tels que, quel que soit l'ensemble $B \subset A$ ayant la propriété de Baire et de deuxième catégorie, $\text{osc}_B f > \varepsilon$. Désignons par a le nombre

$$\sup \left\{ \inf_{A-Z} f(x): Z \subset X \text{ et } Z \text{ est un ensemble de première catégorie} \right\}.$$

Posons $A_1 = \{(x, y) \in A: a \leq f(x, y)\}$. Remarquons que l'ensemble $A - A_1$ est de première catégorie. Désignons par C l'ensemble

$$\{(x, y) \in A_1: f(x, y) < a + \varepsilon/4\}.$$

L'ensemble C est de deuxième catégorie.

Soit $\{S_n\}$ la suite des ensembles ouverts d'une base dénombrable de l'espace Y . Les coupes f_x étant semicontinues supérieurement, il existe pour tout point $(x, y) \in C$ un ensemble ouvert $S(x, y)$ de la suite $\{S_n\}$ tel que

$$f(x, v) - f(x, y) < \varepsilon/4 \quad \text{pour tout } v \in S(x, y).$$

Soit S_{n_0} l'ensemble ouvert de la suite $\{S_n\}$ tel que l'ensemble

$$D = \{(x, y) \in C: \text{au point } (x, y) \text{ correspond l'ensemble } S(x, y) = S_{n_0}\}$$

est de deuxième catégorie.

Les coupes f_x étant presque qualitativement semiéquivcontinues supérieurement, il existe un point $(x_0, y_0) \in D$ et un ensemble $K \subset S_{n_0}$ ayant la propriété de Baire, contenant le point y_0 , de deuxième catégorie tel que

$$f(x, y) - f(x, y_0) < \varepsilon/4,$$

quels que soient le point $x \in X$ et le point $y \in K$, pour lesquels l'ensemble $(X \times K) \cap D = F$ est de deuxième catégorie. Remarquons que l'ensemble

$$E = \{x \in X: f(x, y_0) < a + \varepsilon/2\} \times K$$

a la propriété de Baire. L'ensemble $A_1 \cap E$ a également la propriété de Baire et il est de deuxième catégorie, comme il contient un sous-ensemble de deuxième catégorie (F).

Reste à voir que $\text{osc}_{A_1 \cap E} f \leq \varepsilon$. En effet, si $(x_1, y_1) \in A_1 \cap E$, $f(x_1, y_1) \geq a$. D'autre part, $(x_1, y_1) \in E$, on a donc que $f(x_1, y_0) < a + \varepsilon/2$. Par conséquent, on a

$$f(x_1, y_1) < f(x_1, y_0) + \varepsilon/4 < a + \varepsilon/2 + \varepsilon/4 < a + \varepsilon,$$

d'où notre théorème.

Problème 1. Une fonction $f: X \times Y \rightarrow R$ dont les coupes f_x sont presque qualitativement semiéquivcontinues supérieurement en tout point $y \in Y$ et dont les coupes f_y ont la propriété de Baire doit-elle avoir la propriété de Baire?

THÉORÈME 3. *Si toutes les coupes f_x d'une fonction $f: X \times Y \rightarrow R$ sont semiéquivcontinues et si toutes ses coupes f_y sont boreliennes, la fonction f est borelienne.*

DÉMONSTRATION. Fixons le nombre a . Nous démontrerons que l'ensemble $\{(x, y) \in X \times Y: f(x, y) < a\}$ est borelien. Fixons les nombres naturels n et k . Les coupes f_x étant semiéquivcontinues supérieurement, il existe une suite $\{y_{nkl}\}$ de points de l'espace Y et une suite $\{U_{nkl}\}$ d'ensembles ouverts de l'espace Y tels que $y_{nkl} \in U_{nkl}$ pour $l = 1, 2, \dots$, $Y \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} U_{nkl}$, le diamètre $d(U_{nkl})$ de l'ensemble U_{nkl} est $< 1/k$ pour $l = 1, 2, \dots$ et $f(x, y) - f(x, y_{nkl}) < 4^{-n}$ pour tout $x \in X$ et pour tout $y \in U_{nkl}$.

On a les inégalités

$$\begin{aligned} & \{(x, y) \in X \times Y: f(x, y) < a\} \\ & \supset \bigcup_{k,l} [\{x \in X: f(x, y_{nkl}) < a - 1/n\} \times U_{nkl}] \\ & \supset \{(x, y) \in X \times Y: f(x, y) < a - 1/n\}, \end{aligned} \quad (4)$$

quel que soit le nombre naturel n . En effet, si $(x_0, y_0) \in \{x \in X: f(x, y_{nkl}) < a - 1/n\} \times U_{nkl}$, on a $f(x_0, y) < f(x_0, y_{nkl}) + 4^{-n} < a - 1/n + 4^{-n} < a$. D'autre part, si $f(x_0, y_0) < a - 1/n$, il existe deux nombres naturels l, k tels que $y_0 \in U_{nkl}$ et $f(x_0, y) < a - 1/n$ pour tout $y \in U_{nkl}$. Par conséquent $f(x_0, y_{nkl}) < a - 1/n$ et $(x_0, y_0) \in \{x \in X: f(x, y_{nkl}) < a - 1/n\} \times U_{nkl}$.

L'ensemble

$$\{x \in X: f(x, y_{nkl}) < a - 1/n\} \times U_{nkl}$$

étant borelien, quels que soient les nombres naturels n, k, l , l'ensemble

$$\begin{aligned} & \{(x, y) \in X \times Y: f(x, y) < a\} \\ & = \bigcup_{n,k,l} [\{x \in X: f(x, y_{nkl}) < a - 1/n\} \times U_{nkl}] \end{aligned}$$

est le même, d'où notre théorème.

De la démonstration du Théorème 3 résulte la remarque suivante:

REMARQUE 1. *Si toutes les coupes f_x d'une fonction $f: X \times Y \rightarrow R$ sont semiéquivcontinues supérieurement et si toutes ses coupes f_y sont de classe de Baire α , la fonction f est de classe de Baire $\alpha + 1$.*

Problème 2. Existe-t-il une fonction $f: X \times Y \rightarrow R$ qui n'est pas de première classe de Baire et dont les coupes f_x sont semiéquivcontinues supérieurement et dont les coupes f_y sont de première classe de Baire.

TRAVAUX CITÉS

1. Z. Grande, *La propriété de Baire des fonctions de deux variables ponctuellement discontinues par rapport à une variable*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **25** (1977), 535–539.

2. J. Oxtoby, *La mesure et la catégorie*, Moscou, 1974. (Russe)

UL. MALBORSKA 84/87, 82-300 ELBLĄG, POLAND