ÜBER GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALUNGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG

ROLAND LEMMERT

ABSTRACT. A theorem about the separation of sub- and superfunctions v and w by solutions of an ordinary differential equation of second order is proved, where $v > w$ throughout the given interval. Examples show that the condition imposed on the right side f of the equation is sharp, and that an analogous theorem is not true for Laplace's equation, even in the case $f \equiv 0$, v sub- and w superharmonic.

1. Von Nagumo [2] stammt der folgende

SATZ 1. *Es seien $v, w \in C^2(a, b) \cap C[a, b]$, $v \leq w$ auf $[a, b]$. Die Funktion f sei auf $M = \{(t, x): a \leq t \leq b, v(t) \leq x \leq w(t)\}$ stetig, und es gelte*

$$(1) \quad v''(t) \geq f(t, v), \quad t \in (a, b),$$

$$(2) \quad w''(t) \leq f(t, w), \quad t \in (a, b).$$

Dann besitzt die Randwertaufgabe

$$(3) \quad u''(t) = f(t, u),$$

$$(4) \quad u(a) = u_0, \quad u(b) = u_1$$

(mit $u_0 \in [v(a), w(a)]$, $u_1 \in [v(b), w(b)]$) wenigstens eine Lösung u , die in M verläuft.

Der triviale Sonderfall $f \equiv 0$ besagt dabei, daß zwischen einer konvexen Funktion v und einer konkaven Funktion w (mit $v \leq w$) stets eine lineare Funktion u verläuft; dabei dürfen die Randwerte $u(a)$ bzw. $u(b)$ zwischen $v(a)$ und $w(a)$ bzw. $v(b)$ und $w(b)$ beliebig vorgeschrieben werden.

Keht man nun in (1), (2) die Ungleichungszeichen um, ist also v konkav und w konvex (mit $v \leq w$), so gibt es bekanntlich ebenfalls eine lineare Funktion u zwischen v und w ; allerdings darf man in diesem Fall für u keine Randwerte mehr vorschreiben.

Es wird im folgenden eine explizite Bedingung (5) an f angegeben, so daß eine entsprechende Aussage auch für Lösungen der Gleichung (3) gilt; um den Fall lediglich stetiger Funktionen v und w einzuschließen, werden dabei in (1) und (2) die zweiten Ableitungen also zweite Schwarzsche Derivierte aufgefaßt.

Schrader [3, Theorem 2.2] bewies eine solche Aussage für den Fall, daß $v, w \in C^2[a, b]$ sind, mit Hilfe der Theorie der Unterfunktionen und Unterlösungen von Jackson (vgl. die bei Schrader angegebene Literatur); dabei darf f noch von u'

Received by the editors November 3, 1980.

1980 *Mathematics Subject Classification.* Primary 34A40, 26A51.

Key words and phrases. Generalized convex functions, separation theorem.

© 1981 American Mathematical Society
0002-9939/81/0000-0561/\$02.25

abhängen, und es wird unter anderem vorausgesetzt, daß alle Lösungen der Anfangswertprobleme

$$u'' = f(t, u, u'), \quad u(t_0) = u_0, \quad u'(t_0) = m_0$$

($t_0 \in [a, b]$, $u_0, m_0 \in \mathbb{R}$) stets auf $[a, b]$ existieren. Diese Voraussetzung erfaßt etwa den Fall $f(t, u, u') = 8u^3$ nicht ($a = t_0 = 0$, $b = 1$, $u_0 = 1$, $m_0 = 2$ führt auf $u(t) = (1 - 2t)^{-1}$), der jedoch in unserer Bedingung an f enthalten ist.

2. Für stetige Funktionen ϕ bezeichne $\bar{D}^2\phi$ bzw. $\underline{D}^2\phi$ die obere bzw. untere (zweite) Schwarzsche Derivierte, also mit $\Delta_h\phi(t) = \phi(t+h) - 2\phi(t) + \phi(t-h)$

$$\bar{D}^2\phi(t) = \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h\phi(t)}{h^2}, \quad \underline{D}^2\phi(t) = \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h\phi(t)}{h^2}$$

(vgl. etwa Zygmund [4]). D^+ , D_+ , D^- , D_- sind die vier Dini-Derivierten. Bekanntlich ist eine auf (a, b) stetige Funktion ϕ genau dann konvex, wenn $\bar{D}^2\phi \geq 0$ auf (a, b) gilt.

DEFINITION 1. Die auf $(0, 1)$ stetige Funktion l gehört zu E , wenn eine Funktion $\psi \in C^2(0, 1)$ existiert mit $\psi(t) > 0$, $t \in (0, 1)$ und $\psi'' + l(t)\psi = 0$, $t \in (0, 1)$.

Ist $l \in E$, so ist bekanntlich für jedes $r \in C[t_0, t_1]$ das Randwertproblem

$$(*) \quad \begin{aligned} u'' + l(t)u &= r(t), & t \in [t_0, t_1] \subset (0, 1), \\ u(t_0) &= u_0, & u(t_1) = u_1 \end{aligned}$$

eindeutig lösbar.

HILFSSATZ 1. Ist $f: (0, 1) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und gilt

$$(5) \quad f(t, x) - f(t, \bar{x}) \geq -l(t)(x - \bar{x}) \quad \text{für } t \in (0, 1), \quad x > \bar{x},$$

mit $l \in E$, so besitzt für $0 < t_0 < t_1 < 1$ und jedes Paar $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ die Gleichung (3) mit den Randbedingungen $u(t_0) = u_0$, $u(t_1) = u_1$ genau eine Lösung.

Der Beweis zu Hilfssatz 1 läßt sich mit Satz 1 führen: Geeignet gewählte Lösungen v, w von $(*)$ erfüllen die Ungleichungen (1) bzw. (2) auf (t_0, t_1) . Die Eindeutigkeitsaussage ergibt sich aus dem folgenden Hilfssatz.

HILFSSATZ 2. Ist ϕ auf $[t_0, t_1] \subset (0, 1)$ stetig und gilt mit $l \in E$

$$(6) \quad \begin{aligned} \bar{D}^2\phi + l(t)\phi &\geq 0, & t \in [t_0, t_1], \\ \phi(t_0) &\leq 0, & \phi(t_1) \leq 0, \end{aligned}$$

so ist $\phi \leq 0$ auf $[t_0, t_1]$.

BEWEIS. Wegen $l \in E$ gibt es ein $\psi \in C^2(0, 1)$ mit $\psi > 0$ auf $(0, 1)$ und $\psi'' + l(t)\psi = 0$. Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ besitzt deshalb das Problem

$$u'' + l(t)u = -\varepsilon, \quad u(t_0) = \psi(t_0), \quad u(t_1) = \psi(t_1)$$

genau eine positive Lösung ψ_ε .

Ist nun $\phi > 0$ für ein $t \in (t_0, t_1)$, so setzen wir

$$\alpha_0 = \inf \{ \alpha > 0: \alpha\psi_\varepsilon(t) \geq \phi(t), t \in [t_0, t_1] \}.$$

Nach Annahme ist $\alpha_0 > 0$, und es existiert $\tau \in (t_0, t_1)$ mit $\alpha_0 \psi_\varepsilon(\tau) = \phi(\tau) > 0$. Wegen $\alpha_0 \psi_\varepsilon(t) \geq \phi(t)$ folgt $\alpha_0 \psi_\varepsilon''(\tau) \geq \bar{D}^2 \phi(\tau)$ im Widerspruch zu

$$\alpha_0 \psi_\varepsilon''(\tau) = -\alpha_0 l(\tau) \psi_\varepsilon(\tau) - \alpha_0 \varepsilon < -l(\tau) \phi(\tau) < \bar{D}^2 \phi(\tau)$$

nach (6).

BEMERKUNG. Aus Hilfssatz 2 folgt die Richtigkeit der Aussage (mit $l \in E$, $[t_0, t_1] \subset (0, 1)$): Aus

$$\bar{D}^2 \phi + l\phi \geq u'' + lu, \quad \phi(t_0) \leq u(t_0), \quad \phi(t_1) \leq u(t_1)$$

folgt $\phi \leq u$ auf $[t_0, t_1]$.

HILFSSATZ 3. Ist ϕ auf $[t_0, t_1] \subset (0, 1)$ stetig und gilt mit $l \in E$

$$\bar{D}^2 \phi + l\phi \geq 0, \quad \phi(t_0) = 0, \quad D^+ \phi(t_0) > 0,$$

so ist $\phi \geq 0$ auf $[t_0, t_1]$.

BEWEIS. Ist $\phi(\tau) < 0$ für ein $\tau \in (t_0, t_1)$, so lösen wir

$$\begin{aligned} z'' + lz &= 0 \quad \text{in } [t_0, \tau], \\ z(t_0) &= 0, \quad z(\tau) = \phi(\tau). \end{aligned}$$

Es folgt leicht $z'(t_0) < 0$.

Aus der Bemerkung nach Hilfssatz 2 folgt $\phi(t) \leq z(t)$ in $[t_0, \tau]$, also wegen $\phi(t_0) = z(t_0) = 0$, $D^+ \phi(t_0) \leq z'(t_0) < 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

BEMERKUNG. Eine entsprechende Aussage gilt für Lösungen von $\bar{D}^2 \phi + l\phi \geq 0$, $\phi(t_1) = 0$, $D_- \phi(t_1) < 0$.

HILFSSATZ 4. Gilt für die stetige Funktion v

$$\bar{D}^2 v \geq h, \quad t \in (0, 1),$$

mit einer in $(0, 1)$ stetigen Funktion h , so ist v in $(0, 1)$ rechts- und linksseitig differenzierbar; diese Ableitungen sind lokal beschränkt, und es gilt $\underline{D}^2 v \geq h$ in $(0, 1)$.

BEWEIS. Wir wählen $H \in C^2(0, 1)$ mit $H'' = h$. Wegen $\bar{D}^2(v - H) = \bar{D}^2 v - H'' \geq 0$ ist $v - H$ auf $(0, 1)$ stetig und konvex, also rechts- und linksseitig differenzierbar mit lokal beschränkten Ableitungen. Damit besitzt auch v diese Eigenschaften. Weiter gilt $\underline{D}^2(v - H) \geq 0$, also wegen $\underline{D}^2(v - H) = \underline{D}^2 v - H''$ sogar $\underline{D}^2 v \geq h$.

3. SATZ 2. Es seien $v, w \in C(0, 1)$, es gelte $v \leq w$ und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig ($M = \{(t, x): 0 < t < 1, v(t) \leq x \leq w(t)\}$). Gilt

$$(8) \quad \underline{D}^2 v \leq f(t, v), \quad \bar{D}^2 w \geq f(t, w) \quad \text{auf } (0, 1)$$

und erfüllt f die Bedingung (5) mit $l \in E$, so existiert eine Lösung u von (3), die in M verläuft.

BEWEIS. Wir beweisen Satz 2 zunächst für ein beliebiges Intervall $[t_0, t_1] \subseteq (0, 1)$. Es existiere $\tau_0 \in [t_0, t_1]$ mit $v(\tau_0) = w(\tau_0)$. (Der Fall $v(t) < w(t)$ auf $[t_0, t_1]$ wird anschließend auf diesen zurückgeführt.) Aus (8) in Verbindung mit Hilfssatz 4 folgt leicht $-\infty < w'_- \leq w'_+ < \infty$ und $-\infty < v'_+ \leq v'_- < \infty$, jeweils an der Stelle τ_0 .

Weiter gelten die Ungleichungen $v'_+(\tau_0) < w'_+(\tau_0)$, $v'_-(\tau_0) > w'_-(\tau_0)$. Damit gilt $[w'_-, w'_+] \cap [v'_+, v'_-] \neq \emptyset$, und diese Intervalle sind kompakt. Also existiert $m \in \mathbb{R}$ mit

$$(9) \quad v'_+(\tau_0) < m < w'_+(\tau_0), \quad w'_-(\tau_0) < m < v'_-(\tau_0).$$

Nun denken wir uns f auf $[t_0, t_1] \times \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{f}(t, x) = \begin{cases} f(t, w(t)) & \text{für } x > w(t), \\ f(t, x) & \text{für } v(t) \leq x \leq w(t), \\ f(t, v(t)) + l(t)(v(t) - x) & \text{für } x < v(t) \end{cases}$$

fortgesetzt, lösen

$$(10) \quad u''(t) = \tilde{f}(t, u(t)), \quad t \in [t_0, t_1], \quad u(t_0) = v(t_0) = w(t_0), \quad u'(t_0) = m$$

und bezeichnen irgendeine Lösung mit $\bar{u}$. (Wegen der Eigenschaften von $\tilde{f}$ kann jede Lösung von (10) auf $[t_0, t_1]$ fortgesetzt werden.)

Wir beweisen zunächst $\bar{u}(t) \leq w(t)$, $t \in [t_0, t_1]$. Wäre $\bar{u}(\tau_1) > w(\tau_1)$ etwa für $\tau_1 > \tau_0 > t_0$, so folgt $\bar{u}(t) > w(t)$ auf einem Intervall $(\tau'_0, \tau_1]$ mit $\tau'_0 > \tau_0$ sowie $\bar{u}(\tau'_0) = w(\tau'_0)$. Auf diesem Intervall folgt dann für $d(t) = w(t) - \bar{u}(t)$

$$\bar{D}^2 d(t) = \bar{D}^2 w(t) - \bar{u}''(t) \geq f(t, w(t)) - \tilde{f}(t, \bar{u}(t)) = 0,$$

daß also d auf $[\tau'_0, \tau_1]$ konvex ist. Wegen $d(\tau'_0) = 0$, $d(\tau_1) < 0$ folgt $d'_+(\tau'_0) < 0$, also $w'_+(\tau'_0) < \bar{u}'(\tau'_0)$, also insbesondere $\tau'_0 > \tau_0$. Weiter gibt es $t \in [\tau_0, \tau'_0]$ mit $\bar{u}(t) < w(t)$ (da anderenfalls $\bar{u}'(\tau'_0) \leq w'_-(\tau'_0) \leq w'_+(\tau'_0)$ wäre), also jedenfalls ein Intervall $[s_0, s_1] \subseteq [\tau_0, \tau'_0]$ mit $\bar{u}(s_0) = w(s_0)$, $\bar{u}(s_1) = w(s_1)$, $\bar{u}(t) < w(t)$ in (s_0, s_1) . In (s_0, s_1) ist dann $\bar{D}^2 d(t) = \bar{D}^2 w(t) - \bar{u}''(t) \geq f(t, w) - f(t, \bar{u}) \geq -l(t)d(t)$, im Widerspruch zu Hilfssatz 2.

Den Fall $\bar{u}(t) > w(t)$ für ein $t < \tau_0$ widerlegt man ebenso.

Schließlich zeigen wir $\bar{u}(t) \geq v(t)$, $t_0 < t < t_1$. Dazu bemerken wir, daß aufgrund der Definition von $\tilde{f}$

$$\bar{D}^2(\bar{u} - v) = \bar{u}'' - \underline{D}^2 v \geq \tilde{f}(t, \bar{u}) - f(t, v) \geq -l(t)(\bar{u} - v)$$

in $[t_0, t_1]$ gilt. Hilfssatz 3 liefert $\bar{u} \geq v$ auf $[t_0, t_1]$. Damit ist Satz 2 für $[t_0, t_1]$ im Fall $\min_{t \in [t_0, t_1]} (w - v) = 0$ bewiesen.

Ist $\min_{t \in [t_0, t_1]} (w - v) > 0$, so setzen wir (mit ψ aus der Definition 1)

$$\alpha_0 = \max\{\alpha > 0: v(t) + \alpha\psi(t) \leq w(t), t \in [t_0, t_1]\}.$$

Für $\bar{v}(t) = v(t) + \alpha_0\psi(t)$ gilt dann

$$\begin{aligned} \underline{D}^2 \bar{v} &= \underline{D}^2 v + \alpha_0 \psi''(t) \\ &< f(t, v) - \alpha_0 l(t) \psi(t) < f(t, \bar{v}), \quad t \in (t_0, t_1), \\ \bar{v} &\leq w \quad \text{auf } [t_0, t_1], \end{aligned}$$

und es gibt $\tau_0 \in [t_0, t_1]$ mit $\bar{v}(\tau_0) = w(\tau_0)$.

Nach dem oben Bewiesenen gibt es eine Lösung $\bar{u}$ auf $[t_0, t_1]$ mit $w(t) > u(t) > \bar{v}(t) > v(t)$. Den allgemeinen Fall erhält man nun, indem man für $n \in \mathbb{N}$ auf den Intervallen $[1/n, 1 - 1/n]$ jeweils eine Lösung u_n nach dem bisher Bewiesenen auswählt; die Folge (u_n) besitzt eine in $(0, 1)$ lokal gleichmäßig konvergente

Teilfolge, und die Grenzfunktion u ist eine Lösung von (3) für $t \in (0, 1)$ mit $v \leq u \leq w$, $t \in (0, 1)$.

BEMERKUNG. In der Sprechweise von Beckenbach [1] ließe sich Satz 2 so formulieren: Gilt (5) für f , ist $v \leq w$ und ist v bzw. w im verallgemeinerten Sinn konkav bzw. konvex auf $(0, 1)$, so lassen sich v und w durch eine Lösung von (3) trennen.

4. Wir zeigen anhand eines Beispiels, daß die Bedingung (5) für f in Satz 2 scharf ist. Dazu sei $l(t) \equiv c^2$ mit $2\pi > c > \pi$ und $f(t, x) = -c^2x + e^{-at}$, $t \in [0, 1]$, $x \in \mathbf{R}$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Die Funktionen $v \equiv 0$ und $w = \frac{1}{2}t^2$ genügen der Voraussetzung von Satz 2. Existiert u mit den in Satz 2 angegebenen Eigenschaften, so ist $u(0) = u'(0) = 0$, also

$$u(t) = \frac{1}{c^2 + \alpha^2} \left(e^{-at} - \cos ct + \frac{\alpha}{c} \sin ct \right).$$

Insbesondere ist $u(1) = (1/c^2 + \alpha^2)(e^{-a} - \cos c + (\alpha/c) \sin c) < 0$ für hinreichend großes α im Widerspruch zu $u \geq 0$.

Eine Satz 2 entsprechende Aussage etwa für elliptische Differentialgleichungen ist i.a. sogar für $f \equiv 0$ falsch. Dazu betrachten wir in der $x - y$ -Ebene.

$$v(x, y) = \begin{cases} -\log[(x-2)^2 + y^2], & x \leq 0, y \in \mathbf{R}, \\ \min\{-\log[(x-2)^2 + y^2], \log[(x+2)^2 + y^2]\}, & x > 0, y \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

$$w(x, y) = \begin{cases} \log[(x+2)^2 + y^2], & x \geq 0, y \in \mathbf{R}, \\ \max\{-\log[(x-2)^2 + y^2], \log[(x+2)^2 + y^2]\}, & x < 0, y \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

v und w sind etwa in $D = \{x^2 + y^2 < 9\}$ stetig, v ist superharmonisch, w ist subharmonisch, es gilt $v \leq w$ und v stimmt mit w auf einer Umgebung von $(-2, 0)$ und auf einer Umgebung von $(2, 0)$ überein. Mit Hilfe des Identitätssatzes für harmonische Funktionen überlegt man sich leicht, daß zwischen v und w keine in D harmonische Funktion liegen kann. Durch geeignete Glättung von v und w kann man sogar $v, w \in C^\infty$ erreichen. In diesem Zusammenhang vergleiche man auch das Beispiel bei Amann [SIAM Rev. 18, S.653], wo f linear in u vorausgesetzt ist und für u Randwerte auf ∂D vorgeschrieben werden.

Herrn Professor Dr. Peter Volkmann, der mich auf diesen Problemkreis aufmerksam gemacht hat, möchte ich an dieser Stelle herzlich danken.

LITERATUR

1. E. F. Beckenbach, *Generalized convex functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **43** (1937), 363–371.
2. M. Nagumo, *Über die Differentialgleichung $y'' = f(x, y, y')$* , Proc. Phys. Math. Soc. Japan **19** (1937), 861–866.
3. K. W. Schrader, *Differential inequalities for second and third-order equations*, J. Differential Equations **25** (1977), 203–215.
4. A. Zygmund, *Trigonometric series*, vol. I, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, New York, 1959.

MATHEMATISCHES INSTITUT I, UNIVERSITÄT KARLSRUHE, 75 KARLSRUHE, FEDERAL REPUBLIC OF GERMANY