LA PATHOLOGIE DES RELÈVEMENTS INVARIANTS

MICHEL TALAGRAND

RESUMÉ. Sur un groupe abélien localement compact G , il existe une fonction mesurable f telle que pour tout relèvement ρ de $L^\infty(G)$ invariant par translation, la fonction $\rho(f)$ ne soit pas universellement mesurable, et ne possède pas la propriété de Baire forte.

Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré. Un *relèvement* de $L^\infty(\mu)$ est un homomorphisme d'algèbres ρ de $L^\infty(\mu)$ dans $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ tel que pour tout $f \in L^\infty(\mu)$, $\rho(f)$ soit équivalent à f .

Soit G un groupe localement compact, que l'on peut d'ors et déjà supposer abélien, ce cas étant le seul qui sera envisagé ici. Les mesures de Haar sur G étant proportionnelles, on définit de façon évidente l'espace $L^\infty(G)$. De façon naturelle G opère sur $L^\infty(G)$ par translation, par $f_a(x) = f(a + x)$. Un relèvement de $L^\infty(G)$ sera *invariant* si $\rho(f_a)(x) = \rho f(a + x)$. L'existence d'un tel relèvement est établie dans [3].

On dit qu'un relèvement est *borélien* si toute fonction de la forme $\rho(f)$ est borélienne. Par exemple, un résultat classique que nous mentionnons ici pour mémoire, affirme que sous l'hypothèse du Continu, $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue possède un relèvement borélien. (Sans l'hypothèse du Continu, le problème semble ouvert.) Un article récent de R. A. Johnson [4] montre que $L^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ n'a pas de relèvement borelien invariant. La méthode utilise des résultats fins de topologie dynamique, et l'idée générale est très peu apparente. Le but de ce travail est de procurer un résultat sensiblement plus général par une méthode directe qui rend la nature de la question transparente. L'auteur remercie A. Bellow d'avoir attiré son attention sur cette question.

Si ρ est un relèvement invariant de $L^\infty(G)$ on peut, en notant e l'unité de G , définir $\theta(f) = \rho(f)(e)$ pour $f \in L^\infty(G)$. C'est un caractère de l'algèbre $L^\infty(G)$, c'est-à-dire une forme linéaire multiplicative. De plus, ρ étant invariant, on a $\rho(f)(a) = \theta(f_a)$. Enfin, puisque ρ est invariant, on a $\rho(f) = f$ si f est continue bornée [3], et donc $\theta(f) = f(e)$ pour f continue bornée. Il convient de remarquer que si θ est un caractère de $L^\infty(G)$ tel que $\theta(f) = f(e)$ pour f continue bornée, la formule $\rho(f)(a) = \theta(f_a)$ ne définit en général pas un relèvement, car la condition $\rho(f) = f$ p.s. n'est pas satisfaite.

Si K est un espace compact, on dit qu'un sous-ensemble X de K possède la propriété de Baire s'il est égal à un ensemble ouvert modulo un ensemble maigre.

Received by the editors October 24, 1980 and, in revised form, February 24, 1981 and June 10, 1981.
 1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 28A51, 28C10.

Key words and phrases. Translation invariant lifting, Borel lifting.

© 1982 American Mathematical Society
 0002-9939/81/0000-1027/\$02.00

Les ensembles ayant la propriété de Baire forment une tribu [5], et donc tout borelien possède la propriété de Baire. On dit qu'une fonction réelle sur K possède la propriété de Baire si elle est mesurable pour la tribu des ensembles ayant la propriété de Baire.

THÉOREME. *Soit G un groupe abélien localement compact non discret. Il existe un compact K de G , une mesure μ sur K et une fonction mesurable $f: G \rightarrow \{0, 1\}$, de sorte que pour tout caractère θ de $L^\infty(G)$ tel que $\theta(g) = g(e)$ pour g continue bornée, la fonction réelle sur $K: a \rightarrow \theta(f_a)$ ne soit pas μ -mesurable, et ne possède pas la propriété de Baire sur K . En particulier pour tout relèvement invariant ρ de $L^\infty(G)$, la fonction $a \rightarrow \rho(f)(a)$ n'est pas μ -mesurable, et ne possède pas la propriété de Baire sur K .*

PREUVE. 1^{ère} étape. Supposons que le groupe abélien localement compact G possède un quotient H pour lequel existent K, μ, f , ayant les propriétés décrites dans l'énoncé. Soit φ l'application quotient de G sur H . Puisque G est localement compact, il existe un compact L de G tel que $\varphi(L) = K$. D'après le lemme de Zorn, on peut supposer que pour tout compact $M \subset L$ avec $M \neq L$, on a $\varphi(M) \neq K$. Soit λ une mesure de Radon sur L , telle que $\varphi(\lambda) = \mu$. Enfin, soit $h = f \circ \varphi$.

Soit ξ un caractère de $L^\infty(G)$. On peut définir un caractère θ de $L^\infty(H)$ par $\theta(g) = \xi(g \circ \varphi)$ pour $g \in L^\infty(H)$. Si de plus pour toute fonction continue bornée u sur G on a $\xi(u) = u(e)$, on a $\theta(g) = g(e)$ pour toute fonction g continue bornée sur H . Par hypothèse la fonction $a \rightarrow \eta(a) = \theta(f_a)$ n'est pas μ -mesurable et n'a pas la propriété de Baire sur K . Remarquons que pour $b \in L$, on a

$$\xi(h_b) = \xi(f_{\varphi(b)} \circ \varphi) = \theta(f_{\varphi(b)}) = \eta \circ \varphi(b).$$

Il est alors bien connu que $b \rightarrow \xi(h_b)$ n'est pas λ -mesurable, et il résulte du Lemme 2C de [1] qu'elle n'a pas la propriété de Baire.

On a ainsi montré que si G a un quotient qui satisfait les conditions du théorème il les satisfait également. D'autre part, il est évident que si G a un sous-groupe ouvert-fermé qui satisfait ces conditions, il les satisfait également. On sait qu'un groupe abélien localement compact est de la forme $\mathbf{R}^n \times G$, où G contient un sous-groupe compact H tel que G/H soit discret. Un groupe compact abélien étant limite projective de groupes du type $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^n \times F$, où est fini, s'il est infini, admet comme quotient soit $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, soit un groupe infini limite projective dénombrable de groupes finis. Il est donc suffisant d'établir le théorème pour $G = \mathbf{R}$, $G = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, et G infini, limite projective de groupes finis.

2^{ème} étape. Le cas $G = \mathbf{R}$. On désigne par L l'ensemble de Cantor $L = \{0, 1\}^\mathbf{N}$. Comme bien connu l'application φ de $L \rightarrow \mathbf{R}$ qui envoie $(x_n) \in L$ sur $\sum_i 2x_i 3^{-i}$ est un homéomorphisme de L sur son image K . On désigne par λ la mesure canonique de L , et on pose $\mu = \varphi(\lambda)$.

Pour un entier n , posons $p(n) = 0$ si n est pair, $p(n) = 1$ sinon.

On dira qu'un point $z \in \mathbf{R}$ est une *extrémité* de K s'il est de la forme $\sum_{i < n} 2x_i 3^{-i}$ pour $x_i \in \{0, 1\}$, auquel cas on pose $t(z) = p(\sum_{i < n} x_i)$, ou bien s'il est de la forme $\sum_{i < n} 2x_i 3^{-i} + 3^{-n-1}$ auquel cas on pose $t(z) = p(\sum_{i < n} x_i)$. On désigne par E l'ensemble des extrémités de K .

Il est clair qu'il existe une partie dénombrable D de $\mathbf{R}$ telle que pour tout point $z \in \mathbf{R} \setminus (K \cup D)$ il existe un unique point $u(z) \in E$ avec $|z - u(z)| < |z - y|$ pour $y \in K$. On définit alors f par $f = 0$ sur $K \cup D$, et $f(z) = t \circ u(z)$ pour $z \in \mathbf{R} \setminus (K \cup D)$. Il est clair que f est mesurable (et même Riemann-mesurable).

Désignons par η_i l'homéomorphisme de L qui échange 1 et zéro dans la cordonnée de rang i de L . Soit θ un caractère de $L^\infty(\mathbf{R})$, tel que pour toute fonction continue bornée g on ait $\theta(g) = g(0)$. On va montrer, ce qui est le point crucial, que pour $x \in L$ on a $\xi(x) + \xi(\eta_i(x)) = 1$, ou l'on a posé $\xi(x) = \theta(f_{\varphi(x)})$. (Remarquons que $\xi(x) \in \{0, 1\}$ car $f^2 = f$ et θ est multiplicatif.) Pour le voir, il suffit de montrer que $f_{\varphi(x)} + f_{\varphi(\eta_i(x))} = 1$ p.s. dans un voisinage de zéro (dépendant de i).

Supposons par exemple $x_i = 0$. On a donc $\varphi(\eta_i(x)) = \varphi(x) + 2 \cdot 3^{-i}$. Il est clair qu'il existe $\varepsilon > 0$ ayant la propriété suivante: Si $|z| < \varepsilon$ et $z + \varphi(x) \notin K \cup D$, et $u(z + \varphi(x)) = \varphi(y)$, $y \in L$, les coordonnées de rang $< i + 1$ de y coïncident avec celles de x . On peut supposer de plus que pour $|z| < \varepsilon$, on a $|z + \varphi(x) - u(z + \varphi(x))| < 3^{-i}$. Pour $|z| < \varepsilon$, on a, si $\varphi(y) = u(z + \varphi(x))$,

$$\varphi(\eta_i(x)) = \varphi(x) + 2 \cdot 3^{-i}, \quad \varphi(\eta_i(y)) = \varphi(y) + 2 \cdot 3^{-i},$$

donc

$$|z + \varphi(\eta_i(x)) - \varphi(\eta_i(y))| = |z + \varphi(x) - \varphi(y)|.$$

On en déduit sans peine que $u(z + \varphi(\eta_i(x))) = \varphi(\eta_i(y))$. Or il est clair que $t(\varphi(y)) + t(\varphi(\eta_i(y))) = 1$. Ainsi $f_{\varphi(x)}(z) + f_{\varphi(\eta_i(x))}(z) = 1$ pour $|z| < \varepsilon$, $z + \varphi(x) \notin K \cup D$. Ainsi, si $X = \{x \in L; \xi(x) = 1\}$, pour tout i , $\eta_i(X) = K \setminus X$. Comme il est bien connu, ceci va impliquer que X n'a pas la propriété de Baire et n'est pas λ -mesurable. Supposons par exemple que X soit λ -mesurable. Alors $\lambda(X) = \frac{1}{2}$ car λ est invariante par η_i . Il existe donc un ouvert U de L , de la forme $U = \{x \in L; \forall i \leq n, x_i = a_i\}$ tel que $\lambda(U \cap X) > \frac{2}{3}\lambda(U)$. Puisque $\eta_{n+1}(U) = U$, on a $\lambda(U \cap \eta_{n+1}(X)) > \frac{2}{3}\lambda(U)$, ce qui est absurde puisque $X \cap \eta_{n+1}(X) = \emptyset$.

Par transport de structure, on en déduit que $a \rightarrow \theta(f_a)$ n'est pas μ -mesurable et n'a pas la propriété de Baire sur K .

3ème étape. Le cas $G = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. La méthode précédente étant "locale" et $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ ayant localement les mêmes propriétés que $\mathbf{R}$, ce cas est essentiellement le même que le précédent.

4ème étape. Le cas où G est limite projective de groupes finis. Le principe va être le même que dans le cas $G = \mathbf{R}$; toutefois la construction de K et de f va être sensiblement différente. On peut supposer que G est limite projective d'une suite de groupes finis G_n pour des morphismes surjectifs Π_n de G_{n+1} sur G_n . On peut aussi, puisque G est infini, supposer que $H_n = \text{Ker } \Pi_n$ a au moins trois éléments, et que G_1 a au moins deux éléments.

Soit $L_n = \{0, 1\}^n$ et p_n la projection naturelle de L_{n+1} sur L_n . Par induction on va construire des sous-ensembles K_n de G_n , et des bijections φ_n de L_n sur K_n telles que $\pi_{n-1} \circ \varphi_n = \varphi_{n-1} \circ p_{n-1}$. Pour cela, on construit par induction des suites finies

$a_1^n, \dots, a_n^n$ de G_n de la façon suivante: $a_1^1 \in G$ et est différent de l'unité, $a_n^n \in H_{n-1}$ et est différent de l'unité, et pour $i < n$, $\pi_{n-1}(a_i^n) = a_i^{n-1}$. On pose $\varphi_n((x_i)_{i \leq n}) = \sum_{i \leq n} x_i a_i^n$. Il est clair que $\pi_{n-1} \circ \varphi_n = \varphi_{n-1} \circ p_{n-1}$. Pour voir que φ_n est injective, on remarque que pour $x, y \in L$, si $i \leq n$ est le premier entier pour lequel $x_i \neq y_i$, on a $\pi_{i,n-1}(\varphi_n(x)) \neq \pi_{i,n-1}(\varphi_n(y))$, où $\pi_{i,n-1} = \pi_i \circ \dots \circ \pi_{n-1}$.

Désignons par π'_n la projection naturelle de G sur G_n , par p'_n celle de L sur L_n . Il existe alors un homéomorphisme φ de L sur un sous-ensemble K de G tel que tout n , $\varphi_n \circ p'_n = \pi'_n \circ \varphi$. La condition que H_n ait au moins trois éléments assure que K est de mesure nulle. Pour $y \in G \setminus K$, il existe un plus grand entier $n(y)$ tel que $\pi'_{n(y)}(y) \in K_{n(y)}$. Soit $x \in L_{n(y)}$ tel que $\varphi_{n(y)}(x) = \pi'_{n(y)}(y)$. On pose $f(y) = p(\sum_{i \leq n(y)} x_i)$, où $p(q) = 1$ si q est impair, $p(q) = 0$ si q est pair. Il est clair que f est mesurable.

Pour pouvoir conclure comme dans le cas $G = \mathbb{R}$, il suffit de montrer que si l'on désigne toujours par η_i la transformation de L qui échange 0 et 1 dans la coordonnée de rang i , pour tout $x \in L$, on a $f_{\varphi(x)} + f_{\varphi(\eta_i(x))} = 0$ p.s. sur un voisinage de l'unité e de G . On va montrer que c'est le cas sur le voisinage $V = (\pi'_i)^{-1}(e)$, en désignant aussi par e l'unité de G_i . Tout repose sur le fait que pour $z \in V$, $z + \varphi(x) \notin K$, $n \geq i$, on a

$$\pi'_n(z + \varphi(x)) \in K_n \Leftrightarrow \pi'_n(z + \varphi(\eta_i(x))) \in K_n$$

et qu'alors si $\pi'_n(z + \varphi(x)) = \varphi_n(x')$, on a $\pi'_n(z + \varphi(\eta_i(x))) = \varphi_n(\eta_i(x'))$ (on a donc $f_{\varphi(x)}(z) + f_{\varphi(\eta_i(x))}(z) = 1$).

Pour le voir, supposons par exemple $x_i = 0$. Si $\pi'_n(z + \varphi(x)) = \varphi_n(x')$, pour $x' \in L_n$, on a à fortiori $\pi'_i(z + \varphi(x)) = \varphi_i(x'')$, où $x'' = p_i \cdot \dots \cdot p_{n-1}(x')$, d'où $x'' = p'_i(x)$, et ainsi $x'_i = 0$. On a donc

$$\pi'_n(z + \varphi(\eta_i(x))) = \pi'_n(z + \varphi(x)) + a_i^n = \varphi_n(x') + a_i^n = \varphi_n(\eta_i(x')).$$

L'autre direction se prouve de même. La démonstration est terminée.

Problème. A-t-on un résultat analogue pour les groupes de Lie?

BIBLIOGRAPHIE

1. J. Bourgain, D. H. Fremlin and M. Talagrand, *Pointwise compact sets of measurable functions*, Amer. J. Math. **100** (1978), 845–886.
2. A. and C. Ionescu Tulcea, *Topics in the theory of liftings*, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1979.
3. ———, *On the existence of a lifting commuting with the left translations of an arbitrary locally compact group*, Proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. and Probab., vol. II, part 1, Univ. of California Press, Berkeley, 1972, pp. 63–98.
4. R. A. Johnson, *Strong liftings which are not Borel lifting*, Proc. Amer. Math. Soc. **80** (1980), 234–236.
5. K. Kuratowski, *Topology*, Academic Press, New York, 1966.

EQUIPE D'ANALYSE—TOUR 46, UNIVERSITÉ PARIS VI, 4, PLACE JUSSIEU, 75230 PARIS CEDEX 05, FRANCE