SUR LE PLONGEMENT DE $X \times I^{n-2}$ DANS UNE n -VARIÉTÉ

ROBERT CAUTY

ABSTRACT. We prove that if X is a locally connected continuum such that the product $X \times I^{n-2}$ of X and an $(n-2)$ -cube can be embedded in an n -manifold, then X is locally planar. An example shows that the converse is false.

Soit I le segment $[-1, +1]$ de la droite réelle, et soit I^{n-2} le produit de $n-2$ copies de I . Nous nous proposons d'étudier ici les continus localement connexes X tels que le produit $X \times I^{n-2}$ puisse être plongé dans une variété de dimension n . Appelant localement plan un espace dont chaque point a un voisinage qui peut être plongé dans le plan, notre résultat principal est le suivant:

THÉOREME. *Soit $n \geq 3$. Un continu localement connexe X tel que le produit $X \times I^{n-2}$ puisse être plongé dans une variété de dimension n est localement plan.*

B. Stubblefield prétendit démontrer ce résultat dans [6], mais, comme le remarqua Burgess dans son compte-rendu des Math. Reviews [2], toutes les démonstrations de cet article contiennent la même erreur. Pour $n=3$, ce théorème complète les résultats de W. Rosicki [4] concernant le plongement d'un produit cartésien dans $\mathbb{R}^3$. Nous montrerons, en utilisant un exemple de K. Borsuk [1], que la réciproque de ce théorème est fausse.

Tous les espaces considérés dans cet article sont supposés métrisables. La démonstration du théorème repose sur une caractérisation des continus localement connexes localement plans qui est une conséquence immédiate du théorème de plongement de Claytor [3]. Avant de l'énoncer, rappelons la définition des courbes de Kuratowski K_1 , K_2 , K_3 et K_4 .

K_1 est le graphe ayant 6 sommets $a_i, b_i, i=1, 2, 3$, et, pour chaque couple (a_i, b_j) ($i, j=1, 2, 3$), une arête reliant a_i à b_j .

K_2 est le 1-squelette d'un simplexe de dimension 4, de sommets v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 .

Pour construire K_3 , considérons une suite de graphes $Y_i, i=1, 2, \dots$, comme dans la Figure 1, tels que $Y_i \cap Y_j = \emptyset$ si $|i-j| \geq 2$, $Y_i \cap Y_{i+1} = \{a_i\}$ pour $i=1, 2, \dots$, et que la suite $\{Y_i\}$ converge vers un point a n'appartenant à aucun des Y_i . Soit $Y = \{a\} \cup (\bigcup_{i=1}^\infty Y_i)$. Alors, K_3 est la réunion de Y et d'un arc L tel que $Y \cap L = \{a\}$.

Pour construire K_4 , considérons une suite de graphes $Z_i, i=1, 2, \dots$, comme dans la Figure 2, tels que $Z_i \cap Z_j = \emptyset$ si $|i-j| \geq 2$, $Z_i \cap Z_{i+1} = \{a_i\}$ pour $i=1, 2, \dots$ et que la suite $\{Z_i\}$ converge vers un point a n'appartenant à aucun des Z_i . Soit

Received by the editors June 28, 1984.

1980 *Mathematics Subject Classification.* Primary 54F20, 54F50, 57N35.

©1985 American Mathematical Society
0002-9939/85 \$1.00 + \$.25 per page

FIGURE 1

FIGURE 2

$Z = \{a\} \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i)$. Alors, K_4 est la réunion de Z et d'un arc L tel que $Z \cap L = \{a\}$.

Le théorème de Claytor [3] affirme qu'un continu localement connexe X peut être plongé dans la sphère si, et seulement si, il ne contient aucune des courbes K_1, K_2, K_3 , et K_4 . La caractérisation suivante des continus localement plans en est une conséquence immédiate.

LEMME 1. *Un continu localement connexe X est localement plan si, et seulement si, il vérifie les deux conditions suivantes:*

- (i) *Il existe un nombre $\delta > 0$ tel que X ne contienne aucun sous-ensemble homéomorphe à K_1 ou K_2 et de diamètre inférieur à δ .*
- (ii) *X ne contient aucun sous-ensemble homéomorphe à K_3 ou K_4 .*

Dans toute la suite de cet article, nous noterons 0 le point $(0, \dots, 0)$ de I^{n-2} , et $\dot{I}^{n-2}$ le bord de I^{n-2} . Par une n -boule fermée B , nous entendrons un espace homéomorphe à la boule unité de $\mathbf{R}^n$, et nous noterons $\dot{B}$ son intérieur.

Soit n un entier ≥ 3 . Pour $i = 1, 2$, il est clair que $K_i \times I^{n-2}$ peut être plongé dans $\mathbf{R}^n$. Cependant, il y a, comme le montre la proposition suivante, des restrictions sur la nature des plongements. (Dans cette proposition, comme dans toute la suite, les boules considérées sont arbitraires, i.e. pas nécessairement rondes).

PROPOSITION 1. *Soit $n \geq 3$, et soit $h: K_i \times I^{n-2} \rightarrow \mathbf{R}^n$ ($i = 1$ ou 2), un plongement. Alors, $\mathbf{R}^n$ ne contient aucune n -boule fermée B vérifiant*

- (i) $h(K_i \times \{0\}) \subset \dot{B}$,
- (ii) $h(K_i \times \dot{I}^{n-2}) \subset \mathbf{R}^n \setminus B$.

Quant à K_3 et K_4 , nous avons la proposition suivante:

PROPOSITION 2. *$K_3 \times I^{n-2}$ et $K_4 \times I^{n-2}$ ne peuvent être plongés dans aucune variété de dimension n .*

Ces deux propositions seront prouvées plus loin, mais nous allons maintenant montrer que le théorème en résulte

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. Soit X un continu localement connexe tel qu'il existe un plongement h de $X \times I^{n-2}$ dans une n -variété M . D'après la Proposition 2,

X vérifie la condition (ii) du Lemme 1. S'il n'en vérifiait pas la condition (i), il existerait une suite $\{X_m\}$ de sous-ensembles de X , homéomorphes à K_1 ou K_2 , convergeant vers un point x de X . On pourrait alors trouver deux n -boules fermées B_1 et B_2 dans M et un sous-intervalle $J = [-\varepsilon, \varepsilon]$ de I tels que $B_1 \subset \mathring{B}_2$, $h(x, 0) \in \mathring{B}_1$, $h(\{x\} \times J^{n-2}) \subset \mathring{B}_2$, et $h(\{x\} \times J^{n-2}) \subset \mathring{B}_2 \setminus B_1$ (J^{n-2} désignant le bord de J^{n-2}). Pour n assez grand, on aurait alors $h(X_m \times \{0\}) \subset \mathring{B}_1$, $h(X_m \times J^{n-2}) \subset \mathring{B}_2$, et $h(X_m \times J^{n-2}) \subset \mathring{B}_2 \setminus B_1$, contrairement à la Proposition 1.

Démonstration des Propositions 1 et 2. Soit X un graphe de la forme $X = \bigcup_{i=1}^m S_i$, où chaque S_i est une courbe simple fermée, et où, pour $1 \leq k \leq m-1$, $S_{k+1} \cap (\bigcup_{i=1}^k S_i)$ est un arc. Posons $X_k = \bigcup_{i=1}^k S_i$, $1 \leq k \leq m$. Si $m \geq 2$, X a une décomposition cellulaire naturelle dont les sommets sont les points d'ordre > 2 . Par récurrence sur m , on vérifie que chaque arête de cette décomposition est un arc et que les X_k sont des sous-complexes de X . Nous noterons τ la fermeture de $X \setminus X_{m-1}$; c'est une arête de la décomposition de X . Si σ est une arête (fermée) de cette décomposition, nous noterons σ° son intérieur dans X . Si v est un sommet de X , nous noterons $St\ v$ l'étoile ouverte de v dans X .

Soient $h: X \times I^{n-2} \rightarrow \mathbf{R}^n$ un plongement, et B une n -boule fermée contenue dans $\mathbf{R}^n$ telle que $h(X \times \{0\}) \subset \mathring{B}$ et $h(X \times I^{n-2}) \subset \mathbf{R}^n \setminus B$. Pour $1 \leq k \leq m$, une composante connexe C de $\mathring{B} \setminus h(X_k \times I^{n-2})$ sera dite distinguée si sa fermeture contient un point de $h(X_k \times \{0\})$. Un point x de X_k tel que $h(x, 0)$ appartienne à la fermeture de C sera dit associé à C , et l'ensemble des points de X_k associés à C sera appelé le sous-ensemble de X_k associé à C .

Le lemme ci-dessous montre la similitude existant entre les composantes distinguées et leurs ensembles associés d'une part et, d'autre part, les composantes connexes du complémentaire et leurs frontières pour un plongement de X dans le plan. Une fois ce lemme prouvé, les Propositions 1 et 2 se démontreront par un argument combinatoire identique à celui qui permet de montrer que les courbes K_i ne sont pas plongeables dans le plan.

LEMME 2. Soient X et h comme ci-dessus. Alors

- (i) $\mathring{B} \setminus h(X \times I^{n-2})$ a $m+1$ composantes distinguées.
- (ii) Pour $k < m$, chaque composante de $h((X \setminus X_k) \times \{0\})$ est contenue dans une composante distinguée de $\mathring{B} \setminus h(X_k \times I^{n-2})$.
- (iii) Le sous-ensemble de X associé à chaque composante distinguée de

$$\mathring{B} \setminus h(X \times I^{n-2})$$

est une courbe simple fermée.

- (iv) Pour $m \geq 2$, soient $C_1, \dots, C_m$ les composantes distinguées de

$$\mathring{B} \setminus h(X_{m-1} \times I^{n-2}).$$

Supposons $h(\tau \times \{0\}) \subset C_m$. Alors, les composantes distinguées $D_1, \dots, D_{m+1}$ de $\mathring{B} \setminus h(X \times I^{n-2})$ peuvent être numérotées de façon que

- (α) $D_i \subset C_i$ pour $i \leq m-1$,
- (β) $D_m \cup D_{m+1} \subset C_m$,

(γ) pour $i \leq m-1$, le sous-ensemble de X associé à D_i égale le sous-ensemble de X_{m-1} associé à C_i ,

(δ) les extrémités de τ décomposent le sous-ensemble de X_{m-1} associé à C_m en deux arcs J et J' tels que les sous-ensembles de X associés à D_m et D_{m+1} soient $J \cup \tau$ et $J' \cup \tau$, resp.

DÉMONSTRATION. Chaque composante T de $X \setminus X_k$ a un point d'accumulation q dans X_k . Alors, $h(q, 0)$ est un point d'accumulation de $h(T \times \{0\})$ donc la composante de $\dot{B} \setminus h(X_k \times I^{n-2})$ contenant $h(T \times \{0\})$ est distinguée, d'où (ii).

Nous prouverons (i), (iii), et (iv) par récurrence sur m . Si $m = 1$, X est un cercle et $\dot{B} \cap h(X \times I^{n-2})$ est une variété (sans bord puisque $h(X \times I^{n-2}) \subset \mathbf{R}^n \setminus B$) de dimension $n-1$, qui est fermée dans $\dot{B}$. Mais il est connu que, si M est une variété de dimension $n-1$ contenue comme fermé dans $\mathbf{R}^n$ (homéomorphe à $\dot{B}$), et si C est une composante de M , il y a exactement deux composantes de $\mathbf{R}^n \setminus M$ ayant un point d'accumulation dans C , et que C est contenue dans la frontière de chacune d'elles. Appliquant ceci à la composante de $\dot{B} \cap h(X \times I^{n-2})$ contenant $h(X \times \{0\})$, nous voyons que $\dot{B} \setminus h(X \times I^{n-2})$ a deux composantes distinguées et que X est l'ensemble associé à chacune d'elles. Ceci prouve (i) et (iii) pour $m = 1$.

Soit $m \geq 2$, et supposons (i), (iii), et (iv) (si $m \geq 3$) vérifiés pour $m-1$. Le lemme est donc vrai pour X_{m-1} et $\dot{B} \setminus h(X_{m-1} \times I^{n-2})$ a m composantes distinguées $C_1, \dots, C_m$ d'ensembles associés $K_1, \dots, K_m$ resp. Soit U un voisinage ouvert connexe de 0 dans I^{n-2} tel que $h(X \times U) \subset \dot{B}$.

Soit σ une arête de X , et soit l le plus petit indice tel que S_l contienne σ . La composante connexe de $\dot{B} \cap h(S_l \times I^{n-2})$ qui contient $h(S_l \times U)$ sépare $\dot{B}$ en deux composantes dont elle est la frontière commune. Nous pouvons donc trouver des voisinages arbitrairement petits V_σ de $h(\sigma \times U)$ dans $\dot{B}$ tels que $V_\sigma \cap h(S_l \times I^{n-2}) = h(\sigma \times U)$ et que $V_\sigma \setminus h(S_l \times U)$ soit la réunion de deux ouverts connexes $V_\sigma^\pm$ dont les frontières contiennent $h(\sigma \times U)$. Nous prendrons V_σ suffisamment petit pour que $V_\sigma \cap h(X \times I^{n-2}) = h(\sigma \times U)$. Alors, si $k \geq l$, toute composante distinguée de $\dot{B} \setminus h(X_k \times I^{n-2})$ qui contient un point de $h(\sigma \times \{0\})$ rencontre, donc contient, un, et un seul, des deux ensembles $V_\sigma^\pm$. Nous en déduisons que

(1) Pour toute arête σ de X et tout k tel que X_k contienne σ , il y a exactement deux composantes distinguées de $\dot{B} \setminus h(X_k \times I^{n-2})$ ayant un point associé dans σ . L'ensemble associé à chacune d'elles contient σ .

En particulier, le sous-ensemble associé à une composante distinguée est un sous-complexe de K .

(2) Pour tout k et pour toute composante distinguée D de $\dot{B} \setminus h(X_k \times I^{n-2})$, le sous-complexe L associé à D n'a pas de sommet isolé.

Si v était un sommet isolé de L , pour toute arête σ incidente à v , la frontière de v serait, d'après la démonstration (1), disjointe de $h(\sigma \times U)$, et $h(v, 0)$ posséderait un voisinage O tel que $O \cap \text{Fr } D \subset h(\{v\} \times U)$, ce qui est impossible, un sous-ensemble de dimension $\leq n-2$ ne pouvant disconnecter localement une boule de dimension n .

(3) Soient k , D , et L comme dans (2). Alors L n'a pas de sommet d'ordre un.

Soient v un sommet de L , et σ une arête incidente à v . Soit O une boule ouverte de centre $h(v, 0)$ telle que $O \cap h(X \times I^{n-2}) \subset h(\text{St } v \times U)$. Puisque la variété à bord $O \cap h(\sigma \times U)$ ne disconnecte pas localement O au point $h(v, 0)$ de son bord, O contient un arc disjoint de $h(\sigma \times U)$ reliant un point de V_σ^+ à un point de V_σ^- . Puisque D contient un et un seul de ces ensembles, cet arc doit contenir un point x de la frontière de D . D'après le choix de O , il y a une arête $\sigma' \neq \sigma$ incidente à v telle que $h(\sigma' \times U)$ contienne x . Alors $\sigma' \subset L$, d'où (3).

Soit $j \leq m$. D'après (1), (2), et (3), toute composante distinguée D de

$$X \setminus h(X_m \times I^{n-2})$$

contenue dans C_j a pour ensemble associé L un sous-complexe de X_m contenant une courbe simple fermée; évidemment, ce sous-complexe est contenu dans la courbe simple fermée K_j si $j < m$, dans la courbe $\Theta K_j \cup \tau$ si $j = m$.

Si $j < m$, nous avons donc $L = K_j$; alors, si σ est une arête de K_j , D doit nécessairement contenir celui des ensembles $V_\sigma^\pm$ qui est contenu dans C_j , donc C_j ne contient qu'une seule telle composante.

Si $j = m$, C_j contient au moins deux telles composantes distinguées, l'une, D_m , contenant V_τ^+ , l'autre, D_{m+1} , contenant V_τ^- . L'ensemble associé à D_m contient $\tau \cup J'$ ou $\tau \cup J$, soit $\tau \cup J$. Comme précédemment, D_m est la seule composante distinguée contenue dans C_m dont l'ensemble associé contient J , donc l'ensemble associé à D_{m+1} est $\tau \cup J'$. Mais D_{m+1} est la seule composante distinguée contenue dans C_m dont l'ensemble associé contient J' , donc l'ensemble associé à D_m est $\tau \cup J$ et les seules composantes distinguées contenues dans C_m sont D_m et D_{m+1} .

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1. Soit $h: K_i \times I^{n-2} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, un plongement. Supposons qu'il existe B comme dans l'énoncé de la Proposition 1. Pour $i = 1$, soit X le sous-complexe plein de K_1 de sommets a_1, a_2, a_3, b_1 et b_2 , et soit $A = K_1 \setminus X$. Le complexe X est du type considéré dans le Lemme 2, et $h(A \times \{0\})$ est un sous-ensemble connexe de $\dot{B} \setminus h(X \times I^{n-2})$ dont les $h(a_i, 0)$, $i = 1, 2, 3$, sont des points d'accumulation. La composante L de $\dot{B} \setminus h(X \times I^{n-2})$ contenant $h(A \times \{0\})$ est donc distinguée, et les points a_1, a_2, a_3 lui sont associés. Ceci contredit le Lemme 2(iii) car aucune courbe simple fermée de X ne contient les trois points a_1, a_2, a_3 .

Pour $i = 2$, soit X le sous-complexe plein de K_2 de sommets v_1, v_2, v_3, v_4 et soit $A = K_2 \setminus X$. Les points v_1, v_2, v_3, v_4 sont associés à la composante (distinguée) L de $\dot{B} \setminus h(X \times I^{n-2})$ contenant $h(A \times \{0\})$. La courbe simple fermée S de X associée à L par le Lemme 2(iii) contient donc ces quatre points. Pour $j = 1, 2$, soit X_j le sous-complexe de X obtenu en enlevant l'arête reliant v_j à v_{j+1} . La composante de $\dot{B} \setminus h(X_j \times I^{n-2})$ qui contient $h(A \times \{0\})$ a pour ensemble associé l'unique courbe simple fermée S_j de X_j contenant les quatre points v_1, v_2, v_3, v_4 . D'après le Lemme 2(iv), ou bien $S = S_j$, ou bien S est la réunion de l'arête reliant v_j à v_{j+1} et de l'un des deux arcs de S_j en lesquels $\{v_j, v_{j+1}\}$ décompose S_j . Ce dernier cas est impossible, aucune des deux courbes ainsi obtenues ne contenant tous les points v_1, v_2, v_3, v_4 . Nous avons donc $S = S_j$ pour $j = 1, 2$, ce qui est impossible puisque $S_1 \neq S_2$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2. Supposons qu'il existe un plongement h de $K_i \times I^{n-2}$, $i = 3, 4$, dans une n -variété M . Puisque tout voisinage de $(a, 0)$ dans $K_i \times I^{n-2}$ contient un sous-ensemble homéomorphe à $K_i \times I^{n-2}$, nous pouvons supposer que $M = \mathbb{R}^n$. Soit B une boule fermée contenant $h(a, 0)$ telle que $h(\{a\} \times I^{n-2}) \subset \mathbb{R}^n \setminus B$. Si $i = 3$ (resp. 4), il existe un entier p tel que

$$h(Y_i \times \{0\}) \subset \mathring{B} \quad (\text{resp. } h(Z_i \times \{0\}) \subset \mathring{B})$$

et que

$$h(Y_i \times I^{n-2}) \subset \mathbb{R}^n \setminus B \quad (\text{resp. } h(Z_i \times I^{n-2}) \subset \mathbb{R}^n \setminus B)$$

pour tout $i \geq p$. Soit A un arc contenu dans $\mathring{B}$ reliant un point de $h(Y_p \times \{0\})$ (resp. $h(Z_p \times \{0\})$) à un point de la composante F de $h(L \times \{0\}) \cap \mathring{B}$ contenant $h(a, 0)$ et disjoint de $h(\{a\} \times I^{n-2})$ (l'existence de A résulte de ce que $h(\{a\} \times I^{n-2})$, étant de dimension $n - 2$, ne disconnecte pas $\mathring{B}$). Nous pouvons alors trouver un entier $q > p$ tel que $h(Y_q \times I^{n-2})$ (resp. $h(Z_q \times I^{n-2})$) soit disjoint de A . Soit

$$R = h\left(\left(\bigcup_{i=p}^{q-1} Y_i\right) \setminus \{a_{q-1}\} \times \{0\}\right) \cup A \cup h\left(\left(\bigcup_{i=q+1}^{\infty} Y_i\right) \setminus \{a_q\} \times \{0\}\right) \cup F,$$

resp.,

$$R = h\left(\left(\bigcup_{i=p}^{q-1} Z_i\right) \setminus \{a_{q-1}\} \times \{0\}\right) \cup A \cup h\left(\left(\bigcup_{i=q+1}^{\infty} Z_i\right) \setminus \{a_q\} \times \{0\}\right) \cup F.$$

C'est un sous-ensemble connexe de $\mathring{B} \setminus h(K_i \times I^{n-2})$.

Notons xy l'arête de K_i de sommets x et y . Si $i = 3$, soit X le sous-complexe de Y_q qui est réunion des arête $a_{q-1}b_q$, $a_{q-1}c_q$, b_qd_q , c_qd_q , b_qe_q , et c_qe_q . La composante de $\mathring{B} \setminus h(X \times I^{n-2})$ contenant R est distinguée, et les points a_{q-1} , d_q , et e_q lui sont associés, contrairement au Lemme 2(iii), puisqu'aucune courbe simple fermée de X ne contient ces trois points.

Pour $i = 4$, considérons les sous-complexes X_0, X_1, X_2, X_3 de Z_q définis par $X_0 = \overline{a_{q-1}d_q} \cup \overline{b_qd_q} \cup \overline{c_qd_q} \cup \overline{b_qc_q}$, $X_1 = X_0 \cup \overline{a_{q-1}b_q}$, $X_2 = X_0 \cup \overline{a_{q-1}c_q}$, et $X_3 = X_1 \cup X_2$.

Pour $j = 1, 2, 3$, soit C_j la composante de $\mathring{B} \setminus h(X_j \times I^{n-2})$ qui contient R . C'est une composante distinguée, et son sous-ensemble associé S_j contient a_{q-1} , b_q , c_q , et d_q . D'après le Lemme 2(iii), S_1 est l'unique courbe simple fermée de X_1 contenant ces quatre points, soit $S_1 = \overline{a_{q-1}b_q} \cup \overline{b_qc_q} \cup \overline{c_qd_q} \cap \overline{d_qa_{q-1}}$. D'après le Lemme 2(iv), ou bien $S_3 = S_1$, ou bien S_3 est la réunion de $\overline{a_{q-1}c_q}$ et d'un des deux arcs en lesquels a_{q-1} et c_q divisent S_1 . Ce dernier cas est impossible car aucune des deux courbes ainsi obtenues ne contient les quatres points a_{q-1} , b_q , c_q , et d_q , donc $S_3 = S_1$. Raisonnant de même avec $X_3 = X_2 \cup \overline{a_{q-1}b_q}$, nous voyons que

$$S_3 = S_2 = \overline{a_{q-1}c_q} \cup \overline{c_qb_q} \cup \overline{b_qd_q} \cup \overline{d_qa_{q-1}} \neq S_1,$$

une contradiction.

Un contre-exemple. K. Borsuk a construit dans [1] un continu localement connexe localement plan X qui ne peut être plongé dans une surface. Ce continu contient une suite $\{X_n\}$ de sous-ensembles homéomorphes à K_1 convergeant vers un arc. La proposition suivante montre que $X \times I^{n-2}$ ne peut être plongé dans une n -variété, donc que la réciproque de notre théorème est fausse.

PROPOSITION 3. *Soit n un entier ≥ 3 . Si un espace X contient une suite $\{X_m\}$ de sous-ensembles homéomorphes à K_1 ou K_2 et convergeant vers un arc A dans X , alors $X \times I^{n-2}$ ne peut être plongé dans une n -variété.*

DÉMONSTRATION. Supposons qu'il existe un plongement h de $X \times I^{n-2}$ dans une n -variété M . Soit $A' = h(A \times \{0\})$. Supposons d'abord l'arc A' cellulaire dans M , i.e. que A' soit l'intersection d'une suite décroissante de boules fermées dont les intérieurs le contiennent. Soit B_1 une telle boule fermée. Quitte à remplacer I par un petit sous-intervalle contenant 0, nous pouvons supposer que $h(A \times I^{n-2}) \subset \mathring{B}_1$. La cellularité de A' entraîne l'existence d'une boule fermée B_2 telle que $A' \subset \mathring{B}_2$, $B_2 \subset \mathring{B}_1$, et que $h(A \times I^{n-2}) \subset \mathring{B}_1 \setminus B_2$. Pour m assez grand, nous avons alors $h(X_m \times I^{n-2}) \subset \mathring{B}_1$, $h(X_m \times \{0\}) \subset \mathring{B}_2$, et $h(X_m \times I^{n-2}) \subset \mathring{B}_1 \setminus B_2$, en contradiction avec la Proposition 1.

Dans le cas général, identifiant M à $M \times \{0\} \subset M \times \mathbf{R}$, nous obtenons un plongement k de $X \times I^{n-1}$ dans $M \times \mathbf{R}$, d'image $h(X \times I^{n-2}) \times I$ tel que $k(A \times \{0\}) = A' \times \{0\} = A''$. Il résulte d'un lemme de Klee (voir [5, p. 74]), que A'' est localement plat, donc cellulaire (voir [5, Theorem 3.4.1, p. 105]) et nous sommes ramenés au cas particulier.

Ce contre-exemple suggère le problème suivant:

PROBLÈME. *Soit X un continu localement connexe tel que $X \times I^{n-2}$ puisse être plongé dans une variété de dimension $n \geq 3$. X peut-il être plongé dans une surface?*

BIBLIOGRAPHIE

1. K. Borsuk, *On embedding curves in surfaces*, Fund. Math. **59** (1966), 73–89.
2. C. E. Burgess, *Compte-rendu de [6]*, Math. Rev. **26** (1963), #749, p. 144.
3. S. Claytor, *Peanian continua not imbeddable in a spherical surface*, Ann. of Math. (2) **38** (1937), 631–646.
4. W. Rosicki, *On topological factors of 3-dimensional locally connected continuum embeddable in $\mathbf{E}^3$* , Fund. Math. **99** (1978), 141–154.
5. T. B. Rushing, *Topological embeddings*, Academic Press, New York, 1973.
6. B. Stubblefield, *Some embedding and nonembedding theorems for n -manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **103** (1962), 403–420.

UNIVERSITÉ PARIS VI, INSTITUT DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, 4 PLACE JUSSIEU, 75230 PARIS CEDEX 05, FRANCE