PARAMETRISATIONS BORELIENNES

GABRIEL DEBS

ABSTRACT. Given a Borel subset B of the product $X \times Y$ of two Polish spaces X and Y such that $\{x \in X: B(x) \cap V \neq \emptyset\}$ is Borel for any open subset V of Y , then:

(1) If for any $x \in X$ the section $B(x)$ is a dense in itself G_δ -subset of Y , we prove that there exists a Borel isomorphism $f: X \times \mathbb{N}^\mathbb{N} \rightarrow B$ such that $f(x, \cdot)$ is one-to-one and continuous from $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ onto $B(x)$.

(2) If for any $x \in X$, $\overline{B(x)}$ is a 0-dimensional compact space and $B(x)$ is a dense in itself G_δ , we prove that f may be chosen such that $f(x, \cdot)$ is a homeomorphism from $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ onto $G(x)$ for any $x \in X$.

Il est bien connu qu'un espace polonais P qui est dense en soi s'obtient comme image injective continue de $\mathbb{N}^\mathbb{N} = J$. Si de plus P est de dimension topologique nulle alors P est homéomorphe à $\mathbb{N}^\mathbb{N}$. Dans ce travail on donne une version paramétrée de ces deux résultats ce qui répond aux problèmes posés dans [4].

Terminologie. Dans toute la suite X désignera un ensemble muni d'une *tribu* $\mathfrak{X}$, Y un *espace polonais* muni d'une distance complète $d < 1$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base de la topologie de Y .

Si Z est un ensemble arbitraire et F est une partie de $X \times Z$ on appelle *coupe* de F tout ensemble $F(x) = \{y \in Z: (x, y) \in F\}$ où $x \in X$. Il est clair que F est bien défini par la donnée de toutes ses coupes. Si $\mathcal{P}$ est une propriété on dira que F est à coupes $\mathcal{P}$ si toutes les coupes $F(x)$ (avec $x \in X$) vérifient $\mathcal{P}$.

Si Z est un espace topologique une partie F de $X \times Z$ est dite *mesurable* si pour tout ouvert V de Z , $\{x \in X, F(x) \cap V \neq \emptyset\} \in \mathfrak{X}$. L'ensemble des parties mesurables de $X \times Z$ est stable par réunions dénombrables. Si $G \subset X \times Z$ est mesurable il en est de même pour F définie par $F(x) = \overline{G(x)}$. Si F est une partie mesurable à coupes fermées de $X \times Y$ alors F appartient à la famille $(\mathfrak{X} \times \mathcal{G})_{\sigma\delta}$ des intersections dénombrables de réunions dénombrables de rectangles $A \times B$ avec $A \in \mathfrak{X}$ et B ouvert de Y . Pour tout espace topologique Z on note par $\mathcal{B}(Z)$ (ou $\mathcal{B}$ s'il n'y a pas de confusion possible) la tribu borélienne de Z . En général une partie mesurable de $X \times Z$ n'est pas nécessairement dans $\mathfrak{X} \otimes \mathcal{B}$.

Enfin si Z est un espace topologique, on dit qu'une partie A de Z est *dense en soi* si pour tout ouvert V de Z le cardinal de $V \cap A$ est non dénombrable. Si A est un espace de Baire, alors A est dense en soi si et seulement si A est sans points isolés.

Les lettres m, n, p, q, i, j désigneront toujours des entiers.

Received by the editors February 6, 1984 and, in revised form, September 19, 1984.
 1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 28A20, 54H05; Secondary 04A15.

©1985 American Mathematical Society
 0002-9939/85 \$1.00 + \$.25 per page

Structure des boreliens à coupes G_δ denses en soi Cette partie repose sur le théorème suivant établi dans [3]:

THEOREME 1. *Si F est une partie de $X \times Y$ qui est mesurable et dans $(\mathfrak{X} \times \mathcal{G})_{\sigma\delta}$ alors F admet une section mesurable.*

LEMME 2. *Si F et G sont deux parties mesurables de $X \times Y$ telles que $F(x) \cap G(x)$ soit fermé dans $F(x)$ pour tout $x \in X$, alors $F \setminus G$ est mesurable.*

Si de plus $F \in (\mathfrak{X} \times \mathcal{G})_{\sigma\delta}$ alors il en est de même pour $F \setminus G$.

DÉMONSTRATION. Pour tout ouvert V de Y on a:

$$(F(x) \setminus G(x)) \cap V \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists n \in \mathbf{N}: V_n \subset V, \quad F(x) \cap V_n \neq \emptyset, \quad G(x) \cap V_n = \emptyset,$$

ce qui montre la mesurabilité de $F \setminus G$. D'autre part on vérifie facilement que $F \setminus G = F \cap \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \{x: G(x) \cap V_n = \emptyset\} \times V_n$. $\square$

La remarque suivante sera d'un usage constant dans la suite:

LEMME 3. *Si $\alpha: X \rightarrow \mathbf{N}$ est une application mesurable et F une partie mesurable de $X \times Y$ qui est dans $(\mathfrak{X} \times \mathcal{G})_{\sigma\delta}$ alors il en est de même pour H définie par $H(x) = F(x) \cap V_{\alpha(x)}$.*

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer le lemme précédent avec G défini par $G(x) = Y \setminus V_{\alpha(x)}$, puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\{x \in X: G(x) \cap V_n \neq \emptyset\} = \alpha^{-1}\{m \in \mathbf{N}: V_n \not\subset V_m\}. \quad \square$$

Notation. Nous notons dans la suite par $\mathcal{H}$ la classe des parties H de $X \times Y$ qui sont à coupes denses en soi non vides et de la forme $H = F \setminus G$ avec F et G mesurables et à coupes fermées.

LEMME 4. *Si $H \in \mathcal{H}$ et $\varepsilon > 0$ alors il existe une partition $(H_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de H vérifiant pour tout $n \in \mathbf{N}$:*

- (i) $H_n \in \mathcal{H}$.
- (ii) $\forall x \in X$, $\text{diam } H_n(x) < \varepsilon$ et $\overline{H_n(x)} \subset H(x)$.

DÉMONSTRATION. Posons $H = F \setminus G$ avec F et G mesurables à coupes fermées. La partie H étant mesurable et appartenant à $(\mathfrak{X} \times \mathcal{G})_{\sigma\delta}$ admet une sélection mesurable h .

Pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in X$, posons:

$$\varepsilon_n(x) = \inf\{p: h(x) \in V_p, \text{diam } V_p < \varepsilon/2^n\}$$

on définit ainsi une application mesurable de X dans $\mathbf{N}$.

Il existe alors une suite $(h_n)_{n \geq 0}$ de sélections mesurables de H vérifiant:

$$\begin{aligned} h_0 &= h, \\ \forall n \geq 1 \quad d(h_n(x), h(x)) &< \varepsilon/2^n, \\ \forall n \neq m \quad h_n(x) &\neq h_m(x). \end{aligned}$$

La construction se fait par récurrence. Supposons construits $(h_i)_{i < n}$ et considérons la partie G_n de $X \times Y$ définie par $G_n(x) = H(x) \cap V_{\varepsilon_n(x)} \setminus \{h_i(x); 0 \leq i < n\}$; elle est mesurable et dans $(\mathfrak{X} \times \mathcal{G})_{\sigma\delta}$; de plus elle est à coupes non vides puisque $H(x)$ est dense en soi pour tout $x \in X$. Donc G_n admet une sélection mesurable h_n qui convient.

Soit $x \in X$ fixé; comme $h_1(x)$ n'appartient pas au fermé $G(x) \cup \{h_i(x); i \neq 1\}$ on peut poser:

$$\delta_1(x) = \inf\{p: \exists q, \text{diam } V_p < \varepsilon/2, \overline{V}_p \subset V_q, h_1(x) \in V_p, \\ h_i(x) \notin V_q \forall i \neq 1, G(x) \cap V_q = \emptyset\}.$$

De même $h_2(x) \notin G(x) \cup \overline{V}_{\delta_1(x)} \cup \{h_i(x); i \neq 2\}$ et on peut séparer fortement ce point de ce fermé. On définit alors par récurrence sur $n \geq 1$:

$$\delta_n(x) = \inf\{p: \exists q, \text{diam } V_p < \varepsilon/2^n, \overline{V}_p \subset V_q, V_p \cap V_{\delta_j(x)} = \emptyset \forall j < n, \\ h_n(x) \in V_p, h_i(x) \notin V_q \forall i \neq n, G(x) \cap V_q = \emptyset\}.$$

Il résulte de la mesurabilité de G et de h_n que les applications δ_n sont mesurables de X dans $\mathbf{N}$.

On définit alors H_0 par $H_0(x) = \overline{\bigcup_{n \geq 1} H(x) \cap V_{\delta_{2n}(x)}}$.

De nouveau par le Lemme 2, on voit que H_0 est mesurable. D'autre part d'après la construction des ouverts $V_{\delta_n(x)}$ on a:

$$H_0(x) = \bigcup_{n \geq 1} \overline{H(x) \cap V_{\delta_{2n}(x)}} \cup \{h(x)\} \\ \subset \bigcup_{n \geq 1} (F(x) \cap \overline{V_{\delta_{2n}(x)}}) \cup \{h(x)\} \subset F(x) \setminus G(x);$$

or la suite $(h_{2n+1}(x))_{n \geq 0}$ est contenue dans $H(x) \setminus H_0(x)$ et converge vers $h(x) \in H_0(x)$, ce qui montre que $H(x) \setminus H_0(x)$ n'est pas fermé. En posant $H_0 = F_0$, on définit par récurrence sur $n \geq 1$ des applications γ_n de X dans $\mathbf{N}$ et des parties F_n et H_n de $X \times Y$ par:

$$\gamma_n(x) = \inf \left\{ p, \exists q: \text{diam } V_p < \varepsilon, \overline{V}_p \subset V_q, (G(x) \cup H_0(x)) \cap V_q = \emptyset, \right. \\ \left. \left(H(x) \setminus \bigcup_{0 \leq i < n} F_i(x) \right) \cap V_p = \emptyset \right\}, \\ F_n(x) = \overline{H(x) \cap V_{\gamma_n(x)}} \subset H(x) \setminus H_0(x), \quad H_n(x) = F_n(x) \setminus \bigcup_{0 \leq i < n} F_i(x).$$

Remarquons que pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $H(x) \setminus H_0(x)$ n'étant fermé ne peut être égal à $\bigcup_{0 \leq i < n} F_i(x)$ donc $H(x) \setminus \bigcup_{0 \leq i < n} F_i(x) \neq \emptyset$ et par suite $\gamma_n(x)$ est bien défini, et on a:

$$H_n(x) \supset \left((H(x) \cap V_{\gamma_n(x)}) \setminus \left(\bigcup_{0 \leq i < n} F_i(x) \right) \right) \\ \supset \left(\left(H(x) \setminus \bigcup_{0 \leq i < n} F_i(x) \right) \cap V_{\gamma_n(x)} \right) \neq \emptyset.$$

Donc $F_n(x)$ qui est l'adhérence d'un ouvert non vide de $H(x)$ est dense en soi, et de même pour $H_n(x)$ qui est ouvert dans $F_n(x)$. D'autre part la mesurabilité de

γ_n, F_n, H_n se vérifie aisément par récurrence sur n , ce qui montre que $H_n \in \mathcal{H}$. Par construction on a :

$$\overline{H_n(x)} \subset F_n(x) \subset H(x) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

$$\text{diam } H_n(x) < \text{diam } V_{\gamma_n(x)} < \varepsilon \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

$$\text{diam } H_0(x) \leq 2 \sup_{n \geq 1} [\text{diam}(V_{\gamma_{2n}(x)}) + d(h_{2n}(x), h(x))] < 2(\varepsilon/4 + \varepsilon/4) = \varepsilon.$$

Enfin si $y \in H(x) \setminus H_0(x)$ on peut trouver p et q tels que: $y \in V_p$, $\overline{V_p} \subset V_q$, et $(G(x) \cup H_0(x)) \cap V_q = \emptyset$. La suite $(\gamma_n(x))_{n \geq 1}$ étant strictement croissante il existe $k \geq 1$ tel que $p < \gamma_k(x)$, il découle alors de la définition de γ_k que $(H(x) \setminus \bigcup_{0 \leq i < n} F_i(x)) \cap V_p = \emptyset$ et par suite que $y \in (H(x) \cap V_p) \subset \bigcup_{0 \leq i < n} F_i(x)$. Donc $H(x) \subset \bigcup_{n \geq 0} F_n(x) = \bigcup_{n \geq 0} H_n(x)$ ce qui montre que $(H_n(x))_{n \geq 0}$ définit une partition de $\overline{H(x)}$. $\square$

THEOREME 5. *Si F est une partie mesurable de $X \times Y$ à coupes fermées denses en soi et non vides alors il existe un isomorphisme f de $(X \times J, \mathfrak{X} \otimes \mathcal{B}_J)$ sur $(F, \mathfrak{X} \otimes \mathcal{B}_Y)$ tel que pour tout $x \in X$, $f(x, \cdot)$ soit une bijection continue de J sur $F(x)$.*

DÉMONSTRATION. Désignons par S (resp. S^*) l'ensemble des suites finies (resp. finies non vides) d'entiers. Si $s \in S$ on désigne par $|s|$ la longueur de s , et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on note $s \frown k$ la suite de longueur $|s| + 1$ obtenue en prolongeant s par l'entier k .

En appliquant le Lemme 4, on peut construire par récurrence sur $|s|$ une famille $(H_s)_{s \in S} \subset \mathcal{H}$ vérifiant:

- (i) $H_\emptyset = H$.
- (ii) $\forall s \in S^*, \forall x \in X, \text{diam } H_s(x) < 1/|s|$.
- (iii) $\forall s \in S, \forall x \in X, \emptyset \neq H_s(x) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \overline{H_{s \frown k}(x)}, (H_{s \frown k}(x)) \cap (H_{s \frown l}(x)) = \emptyset$ si $k \neq l$.

Soient $x \in X$, et $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ une suite infinie d'entiers; pour tout n , on désigne par $\sigma|_n$ la restriction de σ à $[0, n]$. La suite $(\{x\} \times \overline{H_{\sigma|_n}(x)})_{n \geq 0}$ est décroissante et formée de fermés non vides de diamètre $< 1/n$; donc son intersection est réduite à un unique point de $\{x\} \times F(x)$. Notons $f(x, \sigma)$ ce point; on définit ainsi une application f de $X \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dans F .

Il est clair que pour tout $x \in X$, l'application $f(x, \cdot)$ est continue de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sur $F(x)$; elle est injective puisqu'elle envoie l'ensemble J_s des suites infinies commençant par $s \in S$ sur l'ensemble $H_s(x)$. Par suite si $A \in \mathfrak{X}$ alors $f(A \times J_s) = (A \times Y) \cap H_s \in \mathfrak{X} \otimes \mathcal{B}$. Inversement si V est un ouvert de Y alors $f^{-1}(A \times V) \in \mathfrak{X} \otimes \mathcal{B}$ puisque:

$$f(x, \sigma) \in A \times V \Leftrightarrow \exists p: \forall n \exists s \in S: |s| = n, \quad \overline{V_p} \subset V, \\ H_s(x) \cap V_p \neq \emptyset, \quad x \in A, \sigma \in J_s,$$

et par suite f est bi-mesurable. $\square$

Le résultat suivant explique comment un problème topologique sur les boréliens à coupes G_δ se ramène au même problème sur les boréliens à coupes fermées.

THEOREME 6. *Soient X et Y deux espaces polonais et G un borélien à coupes G_δ de $X \times Y$ alors, il existe un espace polonais auxiliaire Y' , G' un borélien à coupes fermées de $X \times Y'$ et $h: G \rightarrow G'$ un isomorphisme borélien tel que pour tout $x \in X$, $h(x, \cdot)$ soit un homéomorphisme de $G(x)$ sur $G'(x)$.*

DÉMONSTRATION. D'après un théorème de Saint Raymond [5] on peut écrire $G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$ où les G_n sont des boréliens à coupes ouvertes.

Pour n fixé, on peut trouver une famille $(B_{n,p})_{p \in \mathbb{N}}$ de boréliens de X telle que $G_n = \bigcup_p B_{n,p} \times V_p$; c'est là une formulation précise d'un résultat de Kunugui (voir par exemple la démonstration de Dellacherie dans [7, II.18]); de sorte que $G = \bigcap_n \bigcup_p (B_{n,p} \times V_p)$. Notons par X' l'ensemble X muni d'une topologie qui soit: plus fine que l'initiale, polonaise et pour laquelle les $B_{n,p}$ soient ouverts. Ainsi G apparaît comme un G_δ dans $X' \times Y$ donc un espace polonais que nous notons Y' . On définit alors G' dans $X \times Y'$ par $G'(x) = \{x\} \times G(x) = (\{x\} \times Y) \cap G$ qui est fermé dans G pour tout $x \in X$, et on note $h: (x, y) \mapsto (x, x, y)$ l'application canonique de G sur G' qui est un isomorphisme borélien puisque $\mathcal{B}(X') = \mathcal{B}(X)$ par le théorème de Lusin et $h(x, \cdot): y \mapsto (x, y)$ est bien un homéomorphisme de $G(x)$ sur $G'(x)$. $\square$

Le corollaire suivant résout le Problème 1 de [5].

COROLLAIRE 7. *On suppose X un espace polonais et $\mathfrak{X}$ sa tribu borélienne. Si F est une partie de $X \times Y$, qui est borélienne, mesurable et à coupes G_δ denses en soi non vides alors il existe un isomorphisme borélien de $X \times J$ sur F tel que pour tout $x \in X$, $f(x, \cdot)$ soit une bijection continue de J sur $F(x)$.*

Structure des boreliens a coupes homeomorphes a J .

THEOREME 8. *On suppose X un espace polonais muni de sa tribu borélienne et Y compact. Si G est une partie de $X \times Y$ qui est borélienne, mesurable et telle que pour tout $x \in X$, $\overline{G(x)}$ soit de dimension topologique nulle et $G(x)$ soit homéomorphe à J , alors il existe un isomorphisme borélien f de $X \times J$ sur G tel que pour tout $x \in X$, $f(x, \cdot)$ soit un homéomorphisme de J sur $G(x)$.*

LEMME 9. *Sous les hypothèses du Théorème 8 pour tout ouvert V l'ensemble $\{x \in X: \overline{G(x)} \cap V = \overline{G(x)} \cap \overline{V} \neq \emptyset\}$ est borélien.*

DÉMONSTRATION. On a:

$$\overline{G(x)} \cap V = \overline{G(x)} \cap \overline{V} \Leftrightarrow \overline{G(x)} \subset W = V \cup (\overline{V})^c$$

et par la compacité de $\overline{G(x)}$:

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}: \overline{V}_n \subset W; \overline{G(x)} \subset \overline{V}_n \\ &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}: \overline{V}_n \subset W; \overline{G(x)} \cap (\overline{V}_n)^c = \emptyset \end{aligned}$$

ce qui montre que $\{x \in X: \overline{G(x)} \cap V = \overline{G(x)} \cap \overline{V}\}$ est borélien par la mesurabilité de G . $\square$

LEMME 10. *Sous les hypothèses du Théorème 8, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition $(G_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de G formée de boréliens mesurables tels que pour tout $x \in X$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $G_k(x)$ soit un ouvert fermé non vide de $G(x)$ (donc homéomorphe à J) de diamètre $< \varepsilon$.*

DÉMONSTRATION. Notons par $J(\varepsilon)$ l'ensemble des parties finies non vides I de $\mathbb{N}$ tels que: $\forall i, j \in I$, $\text{diam } V_i < \varepsilon$ et $V_i \cap V_j = \emptyset$ si $i \neq j$. D'après le Lemme 9, les ensembles:

$$X_I = \left\{ x \in X: \overline{G(x)} \cap V_i = \overline{G(x)} \cap \overline{V}_i \neq \emptyset \forall i \in I, G(x) \subset \bigcup_{i \in I} \overline{V}_i \right\}$$

sont boréliens.

Pour tout $x \in X$, le compact $\overline{G(x)}$ étant de dimension nulle admet une partition finie par des ouverts fermés de diamètre $< \varepsilon$; de plus par compacité, la base $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant supposée stable par réunions finies, on peut trouver $I \in \mathcal{I}(\varepsilon)$ tel que $x \in X_I$. Donc $X = \bigcup_{I \in \mathcal{I}(\varepsilon)} X_I$ et par suite il existe un recouvrement de X par une famille $(X'_I)_{I \in \mathcal{I}(\varepsilon)}$ de boréliens deux à deux disjoints avec $X'_I \subset X_I$. Fixons dans $\mathcal{I}(\varepsilon)$ un élément $I = \{n_0 < n_1 < \dots < n_d\}$, et considérons la partie H_I de $X'_I \times Y$ définie pour $x \in X'_I$ par $H_I(x) = \overline{G(x)} \cap \overline{V} \setminus G(x)$ (en posant $V = V_{n_d}$). C'est un borélien à coupes $\mathcal{K}_\sigma$ non vides, car $G(x) \cap V$ étant un ouvert nonvide de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ n'est pas compact. Donc H_I admet une sélection borélienne [5] h et pour tout $x \in X_I$, $h(x) \in \overline{G(x)} \cap V \subset \overline{G(x)} \cap \overline{V}$. On peut trouver alors des applications boréliennes $h_p: X'_I \rightarrow Y$ telles que: pour tout $x \in X'_I$; et tout $p \in \mathbb{N}$

- (1) $d(h(x), h_p(x)) < 1/(p+1)$,
- (2) $h_p(x) \in G(x) \cap V$,
- (3) $h_p(x) \neq h_q(x)$ si $p \neq q$.

La construction se fait par récurrence. Supposons construits h_i pour $i < p$, on prend alors pour h_p une sélection de $G(x) \cap V \cap B(h(x), 1/(p+1)) \setminus \{h_i(x); i < p\}$. Nous allons maintenant définir par récurrence sur q des applications $\alpha_q: X'_I \rightarrow \mathbb{N}$. Supposons définis les α_i pour $i < q$; on pose alors:

$$\alpha_q(x) = \left\{ \begin{array}{l} \inf m \in \mathbb{N}: \text{diam } V_m < \frac{1}{q+1}, V_m \subset V, \overline{G(x)} \cap V_m = \overline{G(x)} \cap \overline{V_m}, \\ h_p(x) \in V_m \quad \forall p > q, V_{\alpha_i}(x) \cap V_m = \emptyset \quad \forall i < q \end{array} \right\}.$$

Ces fonctions sont bien définies car pour une suite convergente y_p dans $\overline{G(x)}$ on peut trouver une suite (V_{n_p}) d'ouverts deux à deux disjoints de la base telle que $y_p \in V_{n_p}$, $\text{diam } V_{n_p} < 1/(p+1)$, et $V_{n_p} \cap \overline{G(x)}$ soit ouvert fermé dans $\overline{G(x)}$. Il est immédiat que ces fonctions sont boréliennes. Nous allons maintenant définir la suite $(G_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ pour $x \in X'_I$ avec $I = \{n_0 < n_1 < \dots < n_d\}$ en posant:

$$\begin{cases} G_k(x) = G(x) \cap V_{n_k} & \text{pour } k < d, \\ G_k(x) = G(x) \cap V_{\alpha_{k-d}(x)} & \text{pour } k > d, \\ G_d(x) = G(x) \cap V_{n_d} \setminus \bigcup_{k > d} G_k(x). \end{cases}$$

Il est clair que G_k est un borélien dans $X \times Y$ et pour $k \neq d$, G_k est mesurable et $G_k(x)$ est un ouvert fermé dans $G(x)$. Enfin d'après la construction des α_k , $\bigcup_{k > d} G_k(x)$ est fermé (et ouvert) dans $G(x)$ et par suite G_d est aussi mesurable (Lemme 2). $\square$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 8. Elle se déduit du Lemme 10 en construisant une famille $(G_s)_{s \in S}$ de boréliens mesurables et à coupes homéomorphes à J qui vérifient:

- (i) $G_\emptyset = G$.
- (ii) $\forall s \in S, G_s = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_{s \smallfrown k}, (G_{s \smallfrown k}) \cap (G_{s \smallfrown l}) = \emptyset$ si $k \neq l$.
- (iii) $\forall s \in S, \forall x \in X, \text{diam } G_s(x) < 1/(|s| + 1)$.

Enfin si $x \in X$ et $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ on définit $f(x, \sigma) = (x, y)$ avec $y = \bigcap_{s < \sigma} G_s(x)$. On a alors $f(x, J) = G_s(x)$ ce qui prouve que $f(x, \cdot)$ est un homéomorphisme de J sur

$G(x)$. De plus par le théorème de Lusin f est un isomorphisme borélien puisque:
 $\text{Gr}(f) = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \bigcup_{s \in S, |s|=n} G_s$.

BIBLIOGRAPHIE

1. D. Cenzer et R. D. Mauldin, *Measurable parametrizations and selections*, Trans. Amer. Math. Soc. **245** (1978), 399–408.
2. J. P. R. Christensen, *Topologic and borel structure*, North-Holland Math. Studies, No. 10, North-Holland, Amsterdam, 1974.
3. G. Debs, *Sélections d'une multi-applications à valeurs $\mathcal{G}_\delta$* , Bull. Acad. Roy. Belg. **65** (1979), 211–216.
4. R. D. Mauldin et H. Sarbadhikari, *Continuous one-to-one parametrizations*, Bull. Sci. Math. **105** (1981), 435–444.
5. J. Saint Raymond, *Boréliens à coupes K_σ* , Bull. Soc. Math. France **104** (1976), 389–400.
6. V. V. Srivasta, *Measurable parametrizations of sets in product spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **270** (1982), 537–556.
7. C. A. Rogers (ed.), *Analytic sets*, Academic Press, London, 1980.

EQUIPE D'ANALYSE, EQUIPE DE RECHERCHE, UNIVERSITE PARIS VI, 4, PLACE JUSSIEU, 75230-PARIS CEDEX 05, FRANCE