REMARQUE SUR L'ARITHMÉTIQUE DES 2-FORMES DIFFÉRENTIELLES DE DEUXIÈME ESPÈCE

BOULAHIA NEJIB

ABSTRACT. We consider a complex smooth and proper surface X and a prime number l . We know that the invariant $B_2 - \rho$ represents the dimension of the vector space of classes of 2-forms of the second kind on X . Grothendieck has observed that $B_2 - \rho$ is an arithmetic invariant, and this leads naturally to interpret a 2-form of the second kind from an arithmetic point of view. By using Grothendieck's techniques we associate to each class ω of a 2-form of the second kind an element ω_l of l -adic part of the Brauer group $H^2(X_{\text{et}}, \mathcal{O}_{X_{\text{et}}}^*)$ of X . In the case where X is a fibered space on a curve, if one subjects this fibration to some given conditions (Artin), ω_l is then also interpreted as an element of $H^1(\Gamma_{\text{et}}, i^*J)_{(l)}$ or, in the equivalent manner, as an element of the Tate-Schafarevitch group $\text{III}^1(\mathbf{C}(\Gamma), J)$ studied by Ogg, where J is the Jacobian of the generic fiber of X and $\mathbf{C}(\Gamma)$ is the functions field of Γ . Reciprocally each element of the l -divisible part of $\text{III}^1(\mathbf{C}(\Gamma), J)_{(l)}$ comes from a 2-form of the second kind. This correspondence permits us to deduce some consequences on 2-forms of the second kind.

Résumé. Soit X une surface lisse et propre sur $\mathbf{C}$. On sait que si $V \subset X$ est un ouvert affine (par exemple si V est le complémentaire d'un diviseur), $H^2(X, \mathbf{C})/\{\text{sous espace engendré par les classes des composantes } D_i \text{ de } X \setminus V\}$ s'injecte dans $H^2(V, \mathbf{C})$. Prenant V de plus en plus petit, on en déduit que l'espace $\{2\text{-formes de deuxième espèce sur } X\}/\{d\eta/\eta \text{ 1-forme sur } X\}$ est de dimension $B_2 - \rho$. (B_2 est le deuxième nombre de Betti de X ; ρ est le nombre de Picard de X .) Or, si l est un nombre premier fixé et m un entier quelconque supérieur à un, le théorème de comparaison de Grothendieck nous dit que pour X une variété lisse quelconque sur $\mathbf{C}$, $H^*(X_{\text{et}}, \mathbf{Z}/l^m\mathbf{Z}) \simeq H^*(X, \mathbf{Z}/l^m\mathbf{Z})$ où $H^*(X, \mathbf{Z}/l^m\mathbf{Z})$ désigne la cohomologie classique de $X = X(\mathbf{C})$. L'injection précédente induit donc l'injection correspondante

$$\frac{H^2(X_{\text{et}}, \mathbf{Z}/l^m\mathbf{Z})}{\{H^0((\mathbf{Z}/l^m\mathbf{Z})_{D_i})\}} \hookrightarrow H^2\left(V_{\text{et}}, \frac{\mathbf{Z}}{l^m\mathbf{Z}}\right).$$

Passant à la limite sur m et prenant V de plus en plus petit comme précédemment, on en déduit que toute classe de 2-formes de deuxième espèce l -adisée s'interprète comme une classe de 2-cohomologie étale l -adique du corps des fonctions $\mathbf{C}(X)$ de X à valeurs dans les entiers l -adiques et plus précisément comme un élément de la partie l -adique $\text{Br}(X)_{(l)}$ du groupe de Brauer $\text{Br}(X) = H^2(X_{\text{et}}, \mathcal{O}_X^*)$ de X . Comme $\text{Br}(X)_{(l)}$ est produit d'un $\mathbf{Z}_l$ -module M libre de rang $B_{2,l} - \rho_l$ ($B_{2,l} - \rho_l$ indépendant de l et égale à $B_2 - \rho$ par Grothendieck [5, p. 83]) et d'un groupe fini, réciproquement toute classe de M est le l -adisé d'une forme de deuxième espèce classique. Dans le cas où X est fibrée sur une courbe Γ , $\Pi: X \rightarrow \Gamma$, Π admettant

Received by the editors January 22, 1985.

1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 Revision). Primary 14H05; Secondary 14K20.

©1986 American Mathematical Society
0002-9939/86 \$1.00 + \$.25 per page

une section, les fibres de Π étant géométriquement connexes admettant seulement des noeuds comme singularités (conditions de Artin [1, p. 128]), l'application:

$$H^2(X_{\text{et}}, \mathcal{O}_X^*) \rightarrow H^1(\Gamma_{\text{et}}, R^1\Pi_*\mathcal{O}_X^*) \simeq H^1(\Gamma_{\text{et}}, i_*J)$$

(i est l'injection du point générique de Γ dans Γ , J est la Jacobienne de la fibre générique de Π) est un isomorphisme. On en déduit donc que toute forme l -adique de deuxième espèce définit un élément de $H^1(\Gamma_{\text{et}}, i_*J)_{(l)}$ et réciproquement tout élément de la partie libre sur $\mathbf{Z}_l$ de ce dernier groupe provient d'une forme de deuxième espèce classique.

De ceci, il résulte, par exemple, que pour toute forme ω de deuxième espèce sur X il existe un morphisme étale fini $\tau: \tilde{V} \rightarrow V \subset \Gamma$ (V ouvert Zariskien de Γ) tel que l'image réciproque de ω par $\tau^*X \rightarrow X$ est triviale. Cette propriété ne semble pas avoir été observée à notre connaissance.

D'autre part nous en déduisons que le paquet $W_2\{H^2(X \setminus D, \mathbf{C})\}$ figurant dans la filtration de poids associée à la structure de Hodge mixte de $H^*(X \setminus D, \mathbf{C})$, où D est un diviseur lisse de X s'interprète comme un sous-groupe du groupe de Tate-Schafarievitch $\text{III}^1(\mathbf{C}(\Gamma), J)_{(l)}$.

1. Formes différentielles de deuxième espèce. Soit X une variété algébrique lisse sur $\mathbf{C}$ on note $\text{Div}(X)$ l'ensemble des diviseurs de X . Pour un diviseur D de X on note $\Omega^p(*D)$ le sous faisceau du faisceau des p -formes méromorphes ayant des poles seulement sur D . On pose $\Omega^p(*) := \bigcup_{D \in \text{Div}(X)} \Omega^p(*D)$.

1.1 DÉFINITION [3, p. 454]. Une p -forme différentielle de deuxième espèce est donnée par une p -forme φ méromorphe fermée sur X telle que pour un diviseur D de X , φ est holomorphe sur $X \setminus D$ et sa classe de cohomologie est dans l'image de $H^p(X, \mathbf{C}) \rightarrow H^p(X \setminus D, \mathbf{C})$. Dans [3, p. 458] on considère la suite exacte de Gysin

$$0 \rightarrow H^1(X, \mathbf{C}) \xrightarrow{i_1} H^1(\Omega(*)) \xrightarrow{R} \left(\bigoplus_{D \in \text{Div}(X)} \mathbf{C}_D \right) \xrightarrow{\gamma} H^2(X, \mathbf{C}) \xrightarrow{i_2} H^2(\Omega(*)) \rightarrow G$$

où R est le résidu de Poincaré et γ est l'application de Gysin. On en déduit que

$$B_2 - \rho = \dim \frac{H^2(X, \mathbf{C})}{\left\{ \begin{array}{l} \text{classes de Chern} \\ \text{des fibres} \\ \text{holomorphes} \end{array} \right\}} = \dim \frac{\{2\text{-formes de 2}^\circ \text{ espèce sur } X\}}{\left\{ \begin{array}{l} d\eta/\eta: 1\text{-forme} \\ \text{méromorphe} \end{array} \right\}}.$$

2. Classes de formes différentielles 1-adiques de deuxième espèce. On note $\mathcal{O}_X^*$ le faisceau de groupes multiplicatifs des fonctions holomorphes sur X sans zéros et μ_n le faisceau des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité qui est localement isomorphe au faisceau constant $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. On munit X de sa topologie étale, on obtient une suite exacte de Kummer $0 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathcal{O}_{X_{\text{et}}}^* \xrightarrow{\delta_n} \mathcal{O}_{X_{\text{et}}}^* \rightarrow 0$ d'où une suite exacte de cohomologie étale:

$$(1) \quad \begin{aligned} H^1(X_{\text{et}}, \mathcal{O}_X^*) &\xrightarrow{\delta_n} H^1(X_{\text{et}}, \mathcal{O}_X^*) \rightarrow H^2(X_{\text{et}}, \mu_n) \\ &\rightarrow H^2(X_{\text{et}}, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{\delta_n} H^2(X_{\text{et}}, \mathcal{O}_X^*). \end{aligned}$$

2.1 REMARQUE. On sait que $H^1(X_{\text{et}}, \mathcal{O}_X^*) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X^*) = \text{Pic}(X)$ [5, p. 80], et par le théorème de comparaison de Grothendieck [2, Théorème 4.4, p. 14]. On a

$H^2(X, \mu_n) = H^2(X_{\text{et}}, \mu_n)$, on en déduit de (1) la suite exacte

$$0 \rightarrow \frac{\text{Pic}(X)}{\text{Pic}(X)^n} \rightarrow H^2(X, \mu_n) \rightarrow H^2(X_{\text{et}}, \mathcal{O}_X^*)_n \rightarrow 0$$

où

$$\text{Pic}(X)^n = \text{Image}\{\text{Pic}(X) \xrightarrow{\delta_n} \text{Pic}(X)\}$$

et

$$H^2(X_{\text{et}}, \mathcal{O}_X^*)_n = \text{Ker}\{H^2(X_{\text{et}}, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{\delta_n} H^2(X_{\text{et}}, \mathcal{O}_X^*)\}.$$

Soit encore

$$0 \rightarrow \text{Pic}(X) \otimes \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \rightarrow H^2(X, \mu_n) \rightarrow H^2(X_{\text{et}}, \mathcal{O}_X^*)_n \rightarrow 0.$$

Soit l un nombre premier et m un entier supérieur à un on a donc

$$0 \rightarrow \text{Pic}(X) \otimes \mathbf{Z}/l^m\mathbf{Z} \rightarrow H^2(X, \mu_{l^m}) \rightarrow H^2(X_{\text{et}}, \mathcal{O}_X^*)_{l^m} \rightarrow 0.$$

Par passage à la limite inductive sur m on obtient (notations de Grothendieck [5, p. 80])

$$(2) \quad 0 \rightarrow \text{Pic}(X) \otimes \frac{Q_l}{\mathbf{Z}_l} \rightarrow H^2(X, \mu_{l^\infty}) \rightarrow H^2(X_{\text{et}}, \mathcal{O}_X^*)_{(l)} \rightarrow 0.$$

2.2 DÉFINITION. Soit l un nombre premier, on appelle classe de 2-forme différentielle l -adique sur X de deuxième espèce un élément de la partie libre de $H^2(X_{\text{et}}, \mathcal{O}_X^*)_{(l)}$ (considéré comme $\mathbf{Z}_l$ -module).

2.3 LEMME [5, p. 83]. *Si X est une surface lisse et propre sur $\mathbf{C}$ alors la dimension $B_{2,l} - \rho_l$ de la partie libre de $H^2(X_{\text{et}}, \mathcal{O}_X^*)_{(l)}$ ne dépend pas de l et est égale à $B_2 - \rho$.*

2.4 COROLLAIRE. *Toute classe de 2-forme de deuxième espèce sur X définit une classe de 2-forme l -adique de deuxième espèce et réciproquement.*

2.5 PROPOSITION. *Soit X une surface algébrique complète fibrée sur une courbe simple Γ , $\Pi: X \rightarrow \Gamma$ admettant une section, les fibres de Π étant géométriquement connexes, admettant seulement des noeuds comme singularités.*

Soit l un nombre premier, il existe un isomorphisme entre le module des classes de 2-formes l -adiques de deuxième espèce et la partie libre de $H^1(\Gamma_{\text{et}}, i_* J)_{(l)}$ (considérée comme module sur $\mathbf{Z}_l$) J étant la Jacobienne de la fibre générique de X et i est l'injection du point générique de Γ dans Γ .

Cette proposition est une conséquence de [1, pp. 128, 130].

2.6 CONSÉQUENCES. 1. Soit X une surface comme dans 2.5. Nous obtenons une description des 2-formes de deuxième espèce en terme d'espaces homogènes: Soit ω une classe de 2-formes de deuxième espèce, d'après le Corollaire 2.4, on associe à ω une unique classe de 2-formes ω_l l -adique de deuxième espèce. D'après la Proposition 2.5 à ω_l on associe un élément de la partie libre de $H^1(\Gamma_{\text{et}}, i_* J)_{(l)}$.

2. Soit X une surface lisse et propre sur $\mathbf{C}$ vérifiant les conditions d'Artin de la Proposition 2.5. Toute classe de 2-forme différentielle de deuxième espèce peut être interprétée comme un élément du sous-groupe $\text{III}^1(\mathbf{C}(\Gamma), J)_{(l)}$ du groupe de

Tate-Schafarevitch: Soit $C(\Gamma)$ le corps des fonctions de Γ et J la Jacobienne de la fibre générique de X . On a

$$0 \rightarrow H^1(\Gamma, i_* J) \rightarrow H^1(C(\Gamma), J) \rightarrow \prod_v H^1(C(\Gamma)_v, J)$$

où $C(\Gamma)_v$ est le localisé de $C(\Gamma)$ (Ogg [6]) qui donne $H^1(\Gamma, i_* J) \simeq \text{III}^1(C(\Gamma), J)$ où

$$\text{III}^1(C(\Gamma), J) = \ker \left\{ H^1(C(\Gamma), J) \rightarrow \prod_v H^1(C(\Gamma)_v, J) \right\}.$$

Si ω est une classe de 2-forme de deuxième espèce alors, pour l un nombre premier, ω_l la classe de 2-forme l -adique de deuxième espèce correspondant à ω s'interprète comme un élément de $\text{III}^1(C(\Gamma), J)_{(l)}$.

3. Soit X une surface comme dans 2.5 et D un diviseur de X , alors $H^*(X \setminus D, \mathbb{C})$ possède une structure de Hodge mixte [4, Théorème 5.1, p. 72] dont la filtration de poids contient le paquet

$$W_2\{H^2(X \setminus D, \mathbb{C})\} = \text{Image}\{H^2(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^2(X \setminus D, \mathbb{C})\}.$$

$W_2\{H^2(X \setminus D, \mathbb{C})\}$ est l'espace des classes des 2-formes de deuxième espèce sur X holomorphes sur $X \setminus D$. D'après la conséquence précédente $W_2\{H^2(X \setminus D, \mathbb{C})\}$ est isomorphe à un sous-groupe du groupe de Tate-Schafarevitch $\text{III}^1(C(\Gamma), J)$.

Question. Y-a-t-il un lien direct entre les espaces homogènes au dessus de Γ sous l'action de $i_* J$ et les fibres vectoriels associés aux diviseurs des 2-formes différentielles de deuxième espèce?

REFERENCES

1. M. Artin, *Grothendieck topologies*, Harvard Univ.
2. M. Artin and A. Grothendieck, *Cohomologie étale des schémas*, I.H.E.S. Séminaire Géométrie Algébrique 1963, fascicule 2, IHES, Paris, 1963/64.
3. Ph. Griffiths and J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley, New York, 1978.
4. Ph. Griffiths and W. Schmid, *Recent developments in Hodge theory, a discussion of techniques and results in discrete subgroups of Lie groups and applications to moduli*, Oxford Univ. Press, London, 1975, pp. 31–124.
5. A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer*. II, Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas, Masson, Paris; North-Holland, Amsterdam, 1968.
6. P. Ogg, *Cohomology of abelian varieties over function fields*, Ann. of Math. (2) **76** (1962), 185–212.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, BIZERTE, TUNISIA, AFRICA