POINTS DE CONTINUITÉ D'UNE FONCTION SÉPARÉMENT CONTINUE. II

G. DEBS

ABSTRACT. We continue our previous investigations on the existence of joint continuity points for a separately continuous function defined on the product of a Baire space and a compact space.

0. Introduction. Ce travail est un complément de [2]. Nous y continuons l'étude des points de continuité d'une fonction $f: X \times Y \rightarrow \mathbf{R}$ séparément continue définie sur le produit d'un espace de Baire X et d'un espace compact Y , et la recherche de résultats du type Namioka: c'est-à-dire d'un résiduel G de X tel que f soit continue en tout point de $G \times Y$. Nous ne reviendrons pas ici sur l'origine et les applications de ce problème.

Les résultats connus jusqu'ici (Namioka, Christensen, Saint Raymond, Deville, Talagrand) étaient obtenus en faisant des hypothèses supplémentaires soit sur l'espace de Baire X , soit sur l'espace compact Y . Le but de ce travail est de montrer en fait le rôle crucial joué dans ce problème, par la complexité descriptive de l'inclusion $\{f(x, \cdot); x \in X\} \subset \mathcal{C}(Y)$ quand on plonge ces ensembles dans l'espace produit $\mathbf{R}^Y$; c'est-à-dire en quelque sorte, de la complexité de la relation qui prouverait que: "la partie $\{f(x, \cdot); x \in X\}$ de $\mathbf{R}^Y$ est constituée de fonctions continues." Notamment nous montrons le rôle joué par la propriété de Baire (P.B. dans la suite) dans l'étude de cette complexité.

1. Definitions. Soient A et B deux parties d'un ensemble E et soit Φ une classe de sous-ensembles de E ($\Phi \subset \mathcal{P}(E)$):

(a) On dira que A est *distingué* de B par Φ si

$$\forall x \in A, \forall y \in B, \exists F \in \Phi, x \in F \text{ et } y \notin F.$$

(Si Φ est stable par passage au complémentaire dans E , la relation précédente devient symétrique en A et B et on dira alors que A et B sont distingués par Φ ou que Φ distingue A de B).

(b) On dira que A est *déterminé* dans E par Φ si A est distingué de $E \setminus A$ par Φ .

(c) On dira que A est *dénombrablement distingué* de B par Φ (resp. dénombrablement déterminé par Φ) s'il existe une partie dénombrable Φ' de Φ telle que A soit distingué de B par Φ' (resp. déterminé par Φ').

(d) Dans tout espace topologique E on notera par $PB(E)$ la classe des parties de E qui possèdent la propriété de Baire.

Received by the editors September 23, 1985 and, in revised form, February 3, 1986.

1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 *Revision*). Primary 54C05, 54E52, 54H05, 90D05; Secondary 46E15.

Key words and phrases. Separate and joint continuity, Baire spaces, Baire property, topological games.

©1987 American Mathematical Society
 0002-9939/87 \$1.00 + \$.25 per page

2. Deux jeux topologiques. Nous rappelons que le jeu de Choquet $J(X)$ sur un espace topologique X est un jeu où deux joueurs α et β choisissent alternativement un ouvert non vide contenu dans l'ouvert choisi par l'autre joueur au coup précédent. C'est le joueur β qui commence. Au cours d'une partie dans $J(X)$ les joueurs α et β construisent ainsi respectivement deux suites décroissantes $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'ouverts non vides de X avec:

$$V_n \supset U_n \supset V_{n+1}.$$

Le joueur α gagne la partie si $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} U_n = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} V_n \neq \emptyset$ et le joueur β gagne la partie sinon. Nous rappelons qu'un jeu est dit favorable (resp. défavorable) pour l'un des joueurs si ce joueur possède (resp. ne possède pas) une stratégie gagnante. L'espace topologique X est de Baire si et seulement si $J(X)$ est β -défavorable (pour plus de détails voir [1, 4, ou 5]).

Une variante de ce jeu a été introduite par Christensen et Saint Raymond. Comme dans le jeu de Choquet, dans ce nouveau jeu que nous notons $J_p(X)$ on demande aux joueurs α et β de construire au cours d'une partie des ouverts U_n et V_n comme précédemment, mais on demande au joueur α de choisir à son $n^{\text{ème}}$ coup, en plus de l'ouvert U_n , un point $x_n \in X$. C'est toujours le joueur β qui commence. Le joueur α gagne la partie (V_n, U_n, x_n) si $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} U_n \cap \{\overline{x_p}; p \in \mathbf{N}\} \neq \emptyset$; le joueur β gagne la partie sinon. Tout espace β -défavorable pour J_p est de Namioka (Saint Raymond). Signalons que ce jeu est noté par G_σ dans [5].

La démonstration du théorème principal de ce travail repose sur une propriété élémentaire mais fondamentale concernant les stratégies dans les jeux J et J_p . Pour fixer les idées nous commençons par expliciter cette propriété dans un cas particulier.

Soit σ (resp. τ) une stratégie—non nécessairement gagnante—pour le joueur α (resp. β) dans $J(X)$. On peut alors définir une stratégie $\sigma \circ \tau$ pour le joueur β par:

$$\begin{cases} \sigma \circ \tau(\emptyset) = \sigma(\tau(\emptyset)), \\ \sigma \circ \tau(U_0, \dots, U_n) = \sigma(\tau(\emptyset), \tau(u_0), \dots, \tau(U_0, \dots, U_n)). \end{cases}$$

Il est facile mais fastidieux de vérifier que $\sigma \circ \tau$ définit bien une stratégie pour le joueur β qui est plus fine que τ , c'est-à-dire qu'elle est gagnante dès que τ est gagnante. On notera que la situation est dissymétrique pour les deux joueurs; et $\tau \circ \sigma$ n'a pas de sens en général (par exemple $\tau(\sigma(V))$ n'est défini que si $\sigma(V) \subset \tau(\emptyset)$). Par contre si σ et τ sont deux stratégies pour le joueur α alors on peut définir de manière similaire au cas précédent, une stratégie $\tau \circ \sigma$ pour le joueur α . On pourrait également préciser ces notions dans J_p . De même, et c'est le cas qui nous intéressera dans la suite, si σ est une stratégie pour α dans $J(X)$ et τ une stratégie pour β dans $J_p(X)$ les formules:

$$\begin{cases} \sigma \circ \tau(\emptyset) = \sigma(\tau(\emptyset)), \\ \sigma \circ \tau(\langle U_k, x_k \rangle_{0 \leq k \leq n}) = \sigma(\langle \tau(\langle (U_l, x_l) \rangle_{0 \leq l \leq k}) \rangle_{0 \leq k \leq n}), \end{cases}$$

définissent une stratégie pour β dans $J_p(X)$, qui est plus fine que τ .

On peut maintenant démontrer le théorème suivant.

3. THÉORÈME. *On considère dans un espace compact E deux sous-espaces $X \subset X'$ vérifiant*

(a) *X est dense dans E ,*

- (b) X est un espace de Baire,
 (c) X est dénombrablement distingué de $E \setminus X'$ par P.B. Alors X' est β -défavorable pour J_p .

La démonstration se fera en plusieurs étapes. Nous fixons d'abord quelques notations.

On notera par S l'ensemble des suites finies d'entiers; pour tout $s \in S$ on notera par $|s|$ la longueur de la suite s , c'est à dire le cardinal de son domaine, et par $\mu(s)$ la plus grande valeur prise par s . La relation d'extension des suites sera notée comme d'habitude par $<$. Pour s et t dans S , $s \frown t$ désignera la suite obtenue par concaténation de t à s . Enfin on considérera surtout le sous-arbre T de S constitué des suites strictement croissantes.

4. LEMMA. Soit E un ensemble muni d'une algèbre $\mathcal{A}$. On considère dans E deux parties X et Y dénombrablement distinguées par $\mathcal{A}$.

Alors il existe une famille $(A_s)_{s \in T}$ dans $\mathcal{A}$ vérifiant:

- (1) $A_s \cap A_t = \emptyset$, si $|s| = |t|$ et $s \neq t$,
- (2) $A_s \subset A_t$, si $s < t$,
- (3) $X \subset \bigcup_{|s|=n} A_s$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- (4) si δ est une branche infinie de T alors en posant $A_\delta = \bigcap_{s < \delta} A_s$ on a:

$$(A_\delta \cap X = \emptyset) \quad \text{ou} \quad (A_\delta \cap Y = \emptyset).$$

DÉMONSTRATION. Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{A}$ qui distingue X de Y ; on supposera de plus que $\{n: B_n = E\}$ est infini. Si $s = (n_1, \dots, n_k)$ est une suite strictement croissante non vide on posera

$$I(s) = \{n_1, \dots, n_k\}$$

$$J(s) = \{n \leq \mu(s): n \neq n_i \forall i, 1 \leq i \leq k\} = [0, \mu(s)] \setminus I(s).$$

On définit alors

$$A_s = \bigcap_{\substack{i \in I(s) \\ j \in J(s)}} B_i \cap B_j^c.$$

Les conditions (1) et (2) sont clairement vérifiées. Si $x \in X$, rangeons l'ensemble $I = \{n \in \mathbb{N}: x \in B_n\}$ en une suite strictement croissante infinie σ alors pour tout $s < \sigma$ on a que $x \in A_s$, ce que prouve (3). Enfin pour toute suite infinie strictement croissante δ et pour tous x', x'' dans A_δ on a:

$$(x' \in B_n) \leftrightarrow (x'' \in B_n),$$

ce qui démontre (4) puisque les B_n distinguent X de Y . $\square$

5. Remarque. Dans la suite on utilisera très souvent la propriété élémentaire suivante: Si X est un espace de Baire qui est dense dans un sur-espace E , alors pour toute partie M maigre de E l'ensemble $X \cap M$ est maigre dans X .

6. LEMME. Sous les hypothèses du Théorème 3, il existe une stratégie σ pour le joueur α dans $J(X')$ telle que pour toute partie compatible avec σ dans laquelle le joueur β a joué la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts de X' , on ait:

$$\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{V}_n \cap X = \emptyset \right) \quad \text{ou} \quad \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{V}_n \subset X' \right)$$

où $\bar{V}_n$ désigne l'adhérence dans E de V_n .

DÉMONSTRATION. Fixons d'abord pour toute partie maigre M de E , une suite $(F_n(M))_{n \in \mathbb{N}}$ de fermés rares de E telle que $M \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n(M)$. D'autre part, soit $(A_s)_{s \in T}$ la famille donnée par le Lemme 4, en prenant $Y = E \setminus X'$ et $\mathcal{A} = \text{PB}(E)$. Nous allons définir la stratégie σ inductivement.

Supposons qu'au premier coup le joueur β joue un ouvert V_0 de X' , et posons $V_0 = X' \cap W'_0$ où W'_0 est un ouvert de E ; comme $V_0 \cap X = W'_0 \cap X$ est un ouvert non vide de X , il découle de la condition (3) du Lemme 4 qu'il existe $s_0 = \langle n_0 \rangle \in T$ tel que $X \cap W'_0 \cap A_{s_0}$ soit non maigre dans X et par suite que $W'_0 \cap A_{s_0}$ soit non maigre dans E ; alors par la propriété de Baire de A_{s_0} on peut trouver un ouvert W_0 de E tel que $\emptyset \neq \overline{W}_0 \subset W'_0$ et $W_0 \setminus A_{s_0}$ soit maigre dans E . Le joueur α répond alors $U_0 = X' \cap W_0$. Alors pour tout ouvert non vide $W \subset W_0$ on aura que $W \setminus A_{s_0}$ est maigre dans E et par suite que $W \cap A_{s_0} \cap X$ est non maigre dans X , et on peut alors recommencer le raisonnement précédent pour construire de proche en proche des suites $s_n \in T$ et des ouverts non vides W_n de E tels que:

- (a) $|s_n| = n + 1$,
- (b) $s_n \succ s_{n-1}$,
- (c) $M_n = \overline{W}_n \setminus A_{s_n}$ est maigre dans E ,
- (d) $\overline{W}_n \cap (\bigcap_{p, k < n} F_p(M_k)) = \emptyset$,
- (e) $X' \cap \overline{W}_n \subset V_n \subset W_{n-1}$.

On définit alors $\sigma(V_0, \dots, V_n) = W_n \cap X'$, qui convient. En effet pour toute partie compatible avec σ , il existe d'après (b) une branche δ de T tel que $\delta|_n = s_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; alors d'après (d) et (e) aura:

$$\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{V}_n \right) \subset \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{W}_n \right) \subset A_\delta = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{s_n}$$

et la conclusion découle du Lemme 4, en remarquant que d'après (e) on a que $X' \cap (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{V}_n) = X' \cap (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n)$. $\square$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3. Soit τ une stratégie quelconque pour β dans $J_p(X')$. Il s'agit de montrer que τ n'est pas gagnante. D'après les remarques du §2 il suffit de montrer que la stratégie $\tau' = \sigma \circ \tau$ n'est pas gagnante, où σ est la stratégie pour α dans $J(X')$ donnée par le lemme précédent.

D'après la définition même de $\sigma \circ \tau$, pour toute partie dans $J_p(X')$ compatible avec τ' dans laquelle α joue la suite $(U'_n, x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite $(V'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$U'_{n+1} \subset V'_{n+1} = \tau(\langle U'_k, x_k \rangle_{0 \leq k \leq n}) \subset U'_n$$

constitue les coups d'une partie licite pour β dans $J(X')$ compatible avec σ . Donc d'après le lemme précédent on a

$$(8) \quad \begin{cases} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{U}'_n \cap X = \emptyset \\ \text{ou} \\ \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{U}'_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U'_n \subset X'. \end{cases}$$

Choisissons dans tout ouvert non vide U' et X' un point $\xi(U') \in U'$. Comme X est dense dans X' alors τ' , qui est une stratégie pour β dans $J_p(X')$, définit naturellement une stratégie τ'' pour β dans $J(X)$ par

$$\begin{cases} \tau''(\emptyset) = X \cap \tau'(\emptyset), \\ \tau''(\langle U'_k \rangle_{0 \leq k \leq n}) = X \cap \tau'(\langle U'_k, \xi(U'_k) \rangle_{0 \leq k \leq n}) \end{cases}$$

où U'_n désignent des ouverts de X' tels que

$$\begin{cases} U_n = X \cap U'_n, \\ U'_{n+1} \subset \tau'(\langle U'_k, \xi(U'_k) \rangle_{0 \leq k \leq n}). \end{cases}$$

L'espace X étant de Baire cette stratégie τ'' n'est pas gagnante pour β et il existe une partie telle que avec les notations précédentes on ait

$$(9) \quad X \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U'_n \neq \emptyset$$

où la suite $(U'_n, \xi(U'_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est constituée des coups joués par α au cours d'une partie dans $J_p(X')$ compatible avec τ' . Il découle alors de (8) et (9) que pour une telle partie on a nécessairement

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U'_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{U'_n} \subset X'.$$

Si x est une valeur d'adhérence quelconque de la suite $(\xi(U'_n))_{n \in \mathbb{N}}$ dans E , alors on a bien que

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U'_n \cap \overline{\{\xi(U'_p); p \in \mathbb{N}\}}$$

ce qui prouve que cette partie de $J_p(X')$ qui est compatible avec τ' , est gagnée par α et par suite que la stratégie τ' n'est pas gagnante. $\square$

Rappelons qu'un espace topologique X est dit *dénombrablement déterminé* (resp. *κ -analytique*) s'il est image surjective par une semi-continue supérieurement application multivoque $\Phi: P \rightarrow \kappa(X)$ d'un espace métrisable séparable (resp. polonais) à valeurs dans les parties compactes de X . Un espace complètement régulier X est dénombrablement déterminé si et seulement si il est (au sens de 2) dénombrablement déterminé par les parties compactes d'un compactifié quelconque de X (voir par exemple [6 ou 7]).

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate de [2, Proposition 12] et du théorème précédent.

7. COROLLAIRE. Soit X un espace de Baire complètement régulier.

(a) Si X est κ -analytique alors X est α -favorable pour J_p .

(b) Si X est dénombrablement déterminé alors X est β -défavorable pour J_p .

8. COROLLAIRE. Soient X un espace de Baire complètement régulier, Y un espace compact, et $f: X \times Y \rightarrow [0, 1]$ une fonction séparément continue sur $X \times Y$. On suppose qu'il existe une partie dénombrablement déterminée A de $[0, 1]^Y$ (muni de la topologie produit) telle que

$$\{f(x, \cdot); x \in X\} \subset A \subset \mathcal{C}(Y).$$

Alors il existe un résiduel G de X tel que f soit continue en tout point de $G \times Y$.

DÉMONSTRATION. On utilise le même artifice que dans [2, Théorème 7]: Soit $\tilde{X}$ le compactifié de Stone-Čech de X et notons par

$$\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow [0, 1]^Y$$

le prolongement continue de l'application continue de X dans $[0, 1]^Y$ définie par: $x \mapsto f(x, \cdot)$. En posant $X' = \tilde{f}^{-1}(A)$ alors $X \subset X' \subset \tilde{X} = E$ et les hypothèses du

Théorème 3 sont vérifiées; donc X' est un espace de Namioka. Considérons alors la fonction

$$f': X' \times Y \rightarrow [0, 1]$$

définie par $f'(x, y) = (\tilde{f}(x))(y)$; elle est continue en y d'après la définition de $\tilde{f}$, continue en x puisque $\tilde{f}(X') \subset A \subset \mathcal{C}(Y)$, et prolonge f . Si G' est un résiduel de X' tel que f' soit continue en tout point de $G' \times Y$ alors $G = G' \cap X$ est un résiduel de X qui vérifie la conclusion cherchée. $\square$

Le corollaire précédent étend le Théorème 7 de [2] puisque toute partie κ -analytique est dénombrablement déterminée. Il s'applique en particulier lorsque l'espace $\mathcal{C}(K)$ est lui-même dénombrablement déterminé (pour la topologie de la convergence simple); ces compacts ont été largement étudiés par M. Talagrand et L. Văşak. En particulier il est bien connu que l'espace $\mathcal{C}(K)$ peut être dénombrablement déterminé sans être κ -analytique (voir [2 ou 7]).

REFERENCES

1. J. P. R. Christensen, *Joint continuity of separately continuous functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **82** (1981), 455–461.
2. G. Debs, *Points de continuité d'une fonction séparément continue*, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), 167–176.
3. R. Deville, *Continuité séparée et jointe sur certains produits d'espaces topologiques*, Thèse de 3ème cycle, Paris, 1984.
4. J. C. Oxtoby, *The Banach-Mazur game and Baire Category Theorem*, Contributions to the Theory of Games, vol. III, Ann. of Math. Studies, no. 39, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1957, pp. 159–163.
5. J. Saint Raymond, *Jeux topologiques et espaces de Namioka*, Proc. Amer. Math. Soc. **87** (1983), 499–504.
6. M. Talagrand, *Espaces de Banach faiblement κ -analytiques*, Ann. of Math. (2) **110** (1979), 407–438.
7. L. Văşak, *On a generalization of weakly compactly generated Banach spaces*, Studia Math. **70** (1981), 11–19.

ÉQUIPE D'ANALYSE, U.A. N° 754, UNIVERSITÉ PARIS VI, 4, PLACE JUSSIEU, TOUR 46/0 - 4ÈME ÉTAGE, 75230 PARIS CEDEX 05, FRANCE