DÉFINISSABILITÉ AVEC PARAMÈTRES EXTÉRIEURS DANS $\mathbf{Q}_p$ ET $\mathbf{R}$

FRANÇOISE DELON

(Communicated by Thomas J. Jech)

ABSTRACT. Let N be an elementary extension of the field $\mathbf{Q}_p$ and A a definable subset of N^n . Then $A \cap \mathbf{Q}_p^n$ is definable in $\mathbf{Q}_p$.

Une structure M étant donnée, on dira qu'une partie de M^n est définissable avec paramètres extérieurs lorsqu'elle est la trace sur M^n d'une partie définissable de N^n , pour une extension élémentaire N de M . Une caractérisation de la stabilité est que, dans un modèle quelconque, les ensembles définissables ou définissables avec paramètres extérieurs sont les mêmes. Mais il peut se produire que certains modèles d'une théorie instable aient cette propriété. Lou van den Dries a en particulier montré que c'est le cas du corps $\mathbf{R}$ (résultat maintenant étendu par D. Marker et C. Steinhorn aux modèles complets au sens de Dedekind des théories 0-minimales [MS]). Van den Dries avait aussi demandé ce qu'il en est des corps $\mathbf{Q}_p$. On montre ici que ces corps ont la même propriété, ce qui est un élément de plus dans l'analogie entre corps des nombres réels et p -adiques (cf. [Mi2]). L'argument redonne aussi le résultat pour $\mathbf{R}$.

Soient $(K \subset L, v)$ des corps valués, $v\widehat{K}$ la clôture convexe de vK dans vL et w la valuation obtenue en composant v avec la projection $vL \rightarrow vL/v\widehat{K}$; w est triviale sur K , qui est donc isomorphe à son corps de restes modulo w . On considère les conditions:

1) le plongement canonique $K/w \rightarrow L/w$ est un isomorphisme; donc en fin de compte K est isomorphe à L/w par passage au reste;

2_n) la trace sur K^n d'une partie de L^n définissable dans (L, v) est définissable dans (K, v) .

Théorème. Supposons K et L henséliens de caractéristique nulle. Alors

a) pour tout entier $n > 0$, $1 \Rightarrow 2_n$;

b) si $K/v = L/v$ est de caractéristique nulle et $vL > vK = \mathbf{Z}$, ou bien si K est p -adiquement clos, avec $vK = \mathbf{Z}$ et $L > K$, alors $2_1 \Rightarrow 1$.

Received by the editors January 9, 1988.

1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 Revision). Primary 03C60; Secondary 11S75, 12D15, 12J20, 12J25, 12L12.

Key words and phrases. Definable subset, analogy between $\mathbf{R}$ and $\mathbf{Q}_p$.

© 1989 American Mathematical Society
0002-9939/89 \$1.00 + \$.25 per page

Dans la suite $\bar{x}$ désigne un multiplet de longueur finie non fixée. Lorsque cela ne prête pas à confusion, on écrira $\bar{x} \in K$ au lieu de $\bar{x} \in K^r$ si r est la longueur de $\bar{x}$.

Proposition 1. Soient $K \subset L$ une extension séparable, $P \in K[\bar{X}, Y_1, \dots, Y_n]$ et $l_1, \dots, l_n \in L$. Alors $A = \{\bar{x} \in K; P(\bar{x}, l_1, \dots, l_n) = 0\}$ est un fermé de Zariski de K .

Démonstration. L'extension $K \subset K(l_1, \dots, l_n)$ est séparable et admet donc une base de transcendance séparante. Cela permet de ne considérer que les cas où $\bar{l} = (l_1, \dots, l_{n-1})$ est algébriquement libre sur K et $l_n = c$ algébrique sur $K(\bar{l})$. Soit $\bar{Y} = (Y_1, \dots, Y_{n-1})$, $P_0 \in K[\bar{Y}, Z]$ tel que $P_0(\bar{l}, Z)$ soit un polynôme minimal de c sur $K(\bar{l})$ et $p \in K[\bar{Y}]$ le coefficient du terme de plus haut degré en Z de P_0 . D'après la division euclidienne dans $K[\bar{X}, \bar{Y}, Z]$, il existe un entier s et des polynômes Q et $R \in K[\bar{X}, \bar{Y}, Z]$ vérifiant

$$(I) \quad \begin{aligned} & d_Z(R) < d_Z(P_0) \\ & p^s(\bar{Y}) \cdot P(\bar{X}, \bar{Y}, Z) = P_0(\bar{Y}, Z) \cdot Q(\bar{X}, \bar{Y}, Z) + R(\bar{X}, \bar{Y}, Z). \end{aligned}$$

Pour $\bar{x} \in A$, on a $P(\bar{x}, \bar{l}, c) = P_0(\bar{l}, c) = 0$, donc $R(\bar{x}, \bar{l}, c) = 0$, ce qui d'après (I) impose que $R(\bar{x}, \bar{l}, Z)$ est le polynôme nul en Z ; si

$$R(\bar{X}, \bar{Y}, Z) = \sum_{i \in \mathbb{N}^{n-1}, j \in \mathbb{N}} r_{ij}(\bar{X}) \bar{Y}^i Z^j \text{ avec } r_{ij} \in K[\bar{X}],$$

on a $r_{ij}(\bar{x}) = 0$ pour tout i et j d'après ce qui précède et l'indépendance algébrique de $\bar{l}$ sur K . Réciproquement, si $\bar{x} \in K$ annule les r_{ij} , $\bar{x}$ est dans A . Ainsi A est l'ensemble des zéros communs des r_{ij} dans K . $\square$

Proposition 2. Soit $(K \subset L, v)$ tel que $v \upharpoonright K = 0$ et $K/v \simeq L/v$ pour l'injection canonique. Alors tout K -sous-espace vectoriel de dimension finie de L admet une base dont les éléments ont des valuations distinctes deux à deux.

Démonstration sans problème.

Définitions. 1. On appellera *séparée* une telle base.

2. On considérera la relation d'équivalence

$$x \sim_v y \text{ (ou plus simplement } x \sim y) \stackrel{\text{df.}}{\iff} v(x) = v(y) < v(x - y),$$

pour x et $y \neq 0$, et $x \sim 0 \iff x = 0$. Si $\{b_1, \dots, b_n\}$ est une base séparée sur K , et $k_1, \dots, k_n \in K$, alors $\sum k_i b_i \sim k_{i_0} b_{i_0}$, si $v(b_{i_0}) = \min\{v(b_i); i = 1, \dots, n \text{ et } k_i \neq 0\}$.

Proposition 3. Mêmes hypothèses: $(K \subset L, v)$ tels que $v \upharpoonright K = 0$ et $K/v \simeq L/v$. Soit A une partie de L^n stable par $\sim$ et telle que $A(z_1, \dots, z_n) \rightarrow \wedge \wedge z_d \neq 0$, $P_1, \dots, P_n \in L[\bar{X}]$ où $\bar{X} = (X_1, \dots, X_r)$, et $B = \{\bar{x} \in L^r; (P_1(\bar{x}), \dots, P_n(\bar{x})) \in A\}$. Alors B a même trace sur K^r qu'une partie de L^r définissable dans (L, v, A) et stable par $\sim$.

Démonstration. Soit L_0 le K -sous-espace vectoriel de L engendré par les coefficients des P_h , $h = 1, \dots, n$, et $\{b_1, \dots, b_m\}$ une base séparée de L_0 , avec

$v(b_1) < v(b_2) < \dots < v(b_m)$. On décompose $P_h = \sum P_{h,j} b_j$ avec $P_{h,j} \in K[\bar{X}]$, et

$$\begin{aligned} & \{\bar{x} \in K; (P_1(\bar{x}), \dots, P_n(\bar{x})) \in A\} \\ &= \left\{ \bar{x} \in K; \bigwedge_h P_{h,1}(\bar{x}) \neq 0 \wedge (P_{h,1}(\bar{x})b_1)_h \in A \right\} \\ &\cup \left\{ \bar{x} \in K; \bigwedge_{h \neq n-1} P_{h,1}(\bar{x}) \neq 0 \wedge P_{n,1}(\bar{x}) = 0 \right. \\ &\quad \left. \wedge (P_{1,1}(\bar{x})b_1, \dots, P_{n-1,1}(\bar{x})b_1, (P_n - P_{n-1} \cdot b_1)(\bar{x})) \in A \right\} \\ &\cup \dots \cup \left\{ \bar{x} \in K; \bigwedge_h P_{h,1}(\bar{x}) = 0 \wedge ((P_h - P_{h,1} \cdot b_1)(\bar{x}))_h \in A \right\}. \end{aligned}$$

En itérant cette décomposition pour $j = 2, \dots, m$, on se ramène à montrer la conclusion du théorème pour $B = \{\bar{x}; (Q_h(\bar{x})b_{j_h})_h \in A \wedge \text{Une condition de Zariski à coefficients dans } K, \text{ incluant } \bigwedge Q_h(\bar{x}) \neq 0\}$ où $Q_h \in K[\bar{X}]$. Ecrivons $\bigvee_e \bigwedge_f C_{ef}(\bar{x}) = 0 \wedge D_e(\bar{x}) \neq 0$ cette condition de Zariski, et considérons le prédicat

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{x}) &= \bigwedge_d (v(x_d) = 0 \vee x_d = 0) \bigwedge (Q_h(\bar{x})b_{j_h})_h \in A \\ &\quad \bigwedge_e \bigvee_f \bigwedge C_{ef}(\bar{x}) > 0 \wedge v(D_e(\bar{x})) = 0. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que φ et B ont même trace sur K et que φ est stable par $\sim$. $\square$

Corollaire 4. *Mêmes hypothèses. Si A est une partie de L^n définissable dans (L, v) , alors $A \cap K^n$ est combinaison booléenne d'ensembles $B \cap K^n$, où B est une partie de L^n , définissable dans (L, v) et d'une des formes suivantes*

- B est l'ensemble des zéros d'un polynôme de L ;
- ou bien B est stable par $\sim$.

Démonstration. D'après [D], (L, v) admet l'élimination des quantificateurs dans $\{0, 1, +, -, \cdot\} \cup \{\text{une famille de prédicats } R \text{ définissables et stables par } \sim\}$. Toute partie définissable de L s'obtient donc comme combinaison d'ensembles d'une des deux formes

$$\begin{aligned} & \{\bar{x}; P(\bar{x}) = 0\} \text{ pour } P \in L[\bar{x}]; \\ & \{\bar{x}; R(P_1(\bar{x}), \dots, P_n(\bar{x}))\}. \end{aligned}$$

On décompose ce dernier ensemble en

$$\begin{aligned} & \{\bar{x}; R(P_1(\bar{x}), \dots, P_n(\bar{x})) \wedge \bigwedge_h P_h(\bar{x}) \neq 0\} \\ & \cup \bigcup_{h_0=1}^n \left[\left\{ \bar{x}; R((1 - \delta_{h,h_0})P_h(\bar{x}))_h \wedge \bigwedge_{h \neq h_0} P_h(\bar{x}) \neq 0 \right\} \cap \{\bar{x}; P_{h_0}(\bar{x}) = 0\} \right] \\ & \cup \dots \cup \left[\{\bar{x}; R(\bar{0})\} \cap \bigcap_h \{\bar{x}; P_h(\bar{x}) = 0\} \right], \end{aligned}$$

et on applique la proposition 3 avec A successivement égal à

$$R(z_1, \dots, z_n) \wedge \bigwedge z_h \neq 0, R((1 - \delta_{h, h_0})z_h) \wedge \bigwedge_{h \neq h_0} z_h \neq 0, \text{ etc. } \dots \quad \square$$

Démonstration de a. Considérons la structure (L, w) définie comme suit: c'est le corps valué (L, w) mais avec une structure résiduelle enrichie $L/w = (L/w, v/w)$. Alors les deux structures (L, w) et (L, v, w) sont équivalentes du point de vue de la définissabilité: la définition de la valuation quotient v/w montre qu'elle est définissable à partir de (L, v, w) , réciproquement la définition de la valuation composée $w \times v/w$ et l'égalité $v = w \times v/w$ montrent que v est définissable à partir de (L, w) .

Remarquons que w est de caractéristique résiduelle nulle puisqu'elle est triviale sur K , et qu'elle est henselienne puisque v l'est. Le principe d'Ax-Kochen-Eršov va donc s'appliquer à $(K \subset L, w)$.

Soit A la trace sur K^n d'une partie de L^n définissable dans (L, v) , on veut montrer qu'elle est définissable dans (K, v) . D'après 4 on peut se restreindre au cas $A = B \cap K^n$ où B est, soit l'ensemble des zéros dans L^n d'un polynôme de L , soit définissable et stable par $\sim_w$. La proposition 1 nous dit que, dans le premier cas, A est définissable dans K . Etudions donc le cas où B est stable par $\sim_w$; on peut alors définir B/w comme suit; pour $\bar{\alpha} \in (L/w)^n$,

$$\bar{\alpha} \in B/w \text{ ssi } \exists \bar{x} \in L^n, \bar{\alpha} = \bar{x}/w \wedge \bar{x} \in B \text{ ssi } \forall \bar{x} \in L^n, \bar{\alpha} = \bar{x}/w \Rightarrow \bar{x} \in B;$$

si la paire $(K \subset L, v)$ vérifie 1, alors dans l'isomorphisme $f: K \simeq L/w$, $B \cap K$ s'envoie sur B/w . En appliquant [D], on voit que B/w , partie de L/w définissable dans (L, w) , est définissable dans $L/w = (L/w, v/w)$; en retraduisant par f^{-1} , A est définissable dans (K, v) . $\square$

Démonstration de b. Pour $(K \subset L, v)$ et $l \in K$, on définit $I(l, K) = \{v(k - l); k \in K\} \cap vK$; c'est un segment initial de vK à cause de l'inégalité ultramétrique. Lorsque $K/v = L/v$, deux cas peuvent se présenter

- ou bien $I(l, K) = \{v(k - l); k \in K\}$ et n'a pas de plus grand élément
- ou bien $\{v(l - k); k \in K\} = I(l, K) \cup \{g_0\}$ où, pour un $k_0 \in K$, $g_0 = v(k_0 - l) \notin vK$ et g_0 majore $I(l, K)$.

Si de plus $vL > vK \equiv \mathbb{Z}$, alors $I(l, K)$ est stable par successeur; cela découle,

- dans le premier cas, du fait que $I(l, K)$ n'a pas d'élément maximal,
- et dans le second, du fait que g_0 est dans une extension élémentaire de vK et doit donc définir une coupure consistante avec la théorie de vK .

Soit $(K \subset L, v)$ vérifiant les hypothèses de b . Prenons $l \in L$ vérifiant $I(l, K) \neq \emptyset$; alors $I(l, K)$ est un segment initial de vK non vide et stable par successeur. C'est la trace sur vK de $\{v(x - l); x \in L, x \neq l\}$; d'après 2₁, il doit être définissable dans (K, v) . Les hypothèses sur K ont été choisies pour que les théorèmes d'élimination des quantificateurs s'appliquent et qu'on sache qu'il n'y a pas de partie de vK qui soit définissable dans (K, v) sans l'être dans vK . Donc $I(l, K)$ est définissable dans vK ; puisqu'il est non vide,

sans élément maximal et que vK est un $\mathbf{Z}$ -groupe, c'est vK tout entier. En conséquence si $x \in A_w$, x/w est limite (au sens topologique habituel et non plus seulement au sens de la valuation) sur K/w , ou encore (K, v) est dense dans $(L/w, v/w)$.

L'inclusion $(K, v) \subset (L/w, v/w)$ est stricte ssi il existe $a \in L - K$ vérifiant $I(a, K) = (v\hat{K} =)vK$. Supposons qu'il existe un tel a et considérons $A = \{x \in K; n \text{ divise } v(x - a)\}$. D'après [D] si K/v est de caractéristique nulle, ou [Mil] si K est p -adiquement clos, si A est définissable dans K , c'est par une formule $\forall \wedge A_{ij}$, où chaque A_{ij} est de la forme:

- $R(\overline{P}(x))^\pm$, avec R ouvert-fermé sur " $x \neq 0$ ",

-ou bien $P(x) = 0$,

-ou bien $P(x) \neq 0$, avec $P \in K[X]$.

Puisque $K < L$, a n'est racine d'aucun P , et, par continuité de la fonction $X \rightarrow P(X)$, $R(\overline{P}(x))^\pm$ est ouvert-fermé. Donc sur un voisinage de a , chaque A_{ij} se comporte de façon constante, et A aussi. Mais du fait de la forme de A , cela est sûrement faux. Donc $K = L/w$. $\square$

Remarque. La preuve précédente montre $2_1 \Rightarrow K = L$ pour toute paire dense où le petit corps a un théorème d'élimination et où vK n'est pas divisible. Par contre on peut vérifier qu'une paire dense de corps algébriquement clos vérifie toujours 2_1 . Enfin $2_2 \Rightarrow K = L$ pour une paire dense quelconque.

Corollaire. *Supposons (K, v) henselien, $vK \equiv \mathbf{Z}$ et K/v de caractéristique nulle, ou bien K p -adiquement clos. Considérons les propriétés:*

3_n) *pour toute extension élémentaire $(L, v) > (K, v)$ vérifiant $L/v = K/v$, la trace sur K^n d'une partie de L^n définissable dans (L, v) est définissable dans (K, v) ;*

4) *$vK = \mathbf{Z}$ et (K, v) est complet.*

Alors on a pour tout entier $n > 0$, $3_n \iff 4$.

Démonstration. Soient (K, v) vérifiant 3_1 , I une coupure $\neq -\infty$ sur vK , $G > vK$ mettant un point g dans I , c'est-à-dire $I = \{i \in vK; i < g\}$, et $(L, v) > (K, v)$ vérifiant $vL = G$ et $L/v = K/v$, ce qui est possible pour la catégorie de corps valués considérés. Alors I est une coupure de vK non vide et définissable dans (L, v) , donc dans (K, v) , donc dans vK , et puisque $vK \equiv \mathbf{Z}$, I est $+\infty$. Or $\mathbf{Z}$ est le seul $\mathbf{Z}$ -groupe ayant l'infini comme seule coupure, donc $vK = \mathbf{Z}$. Appliquons maintenant 3_1 en prenant pour L le complété topologique $\hat{K}$ de (K, v) ; la valuation w associée à la paire $(K \subset \hat{K}, v)$ est la valuation triviale, et donc (1) devient $K = \hat{K}$.

La réciproque est claire: si $(L \supseteq K, v)$ vérifie $L/v = K/v$ et si $vK = \mathbf{Z}$, alors l'extension $(K/w \subset L/w, v/w)$ est immédiate; si de plus K est complet, alors $K/w = L/w$ CQFD. $\square$

Corollaire. *Pour tout n $(\mathbf{Q}_p, v_p)$ vérifie (3_n) et c'est le seul de sa classe élémentaire à le faire.*

Démonstration. La condition $L/v = K/v$ devient vide puisqu'elle est remplie par tout $((L, v) > (K, v))$. $\square$

Corollaire. Soient $K < L \equiv \mathbf{R}$, u la valuation sur L d'anneau la clôture convexe de K dans L , et les propriétés:

- (1') $K \simeq L/u$;
- (2'_n) la trace sur K^n d'un ensemble définissable de L^n est définissable dans K .

Alors on a pour tout entier $n > 0$, $1' \iff 2'_n$.

Démonstration. $1' \Rightarrow 2'_n$. On applique le théorème avec $v = w = u$: $1 = 1' \Rightarrow 2_n$ et $2_n \Rightarrow 2'_n$ car v est triviale sur K .

$2'_n \Rightarrow 1'$. Par définition de u , K/u est cofinal dans L/u qui ne peut donc remplir que des coupures non définissables sur K/u . $\square$

Corollaire. Le corps $\mathbf{R}$ est tel que, pour tout entier $n > 0$ et pour tout $L > \mathbf{R}$, la trace sur $\mathbf{R}^n$ d'un ensemble définissable de L^n est définissable dans $\mathbf{R}$, et c'est le seul corps réel clos à avoir cette propriété.

BIBLIOGRAPHIE

- [D] F. Delon, *Quelques propriétés des corps valués en théorie des modèles*, thèse d'état, Paris VII, 1982.
- [Dr] L. van den Dries, *Tarski's problem and Pfaffian functions*, in Logic Colloquium '84, Paris, Wilkie and Wilmers (ed.), North-Holland, Amsterdam 1986.
- [Mi1] A. Macintyre, *On definable subsets of p -adic fields*, JSL **41** (1976), 605–610.
- [Mi2] —, *Twenty years of p -adic model theory*, in Logic Colloquium '84, cité supra.
- [MS] D. Marker et C. Steinhorn, *Definable types in 0-minimal theories*, preprint.

UER DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE PARIS VII, 75251 PARIS CÉDEX, FRANCE