QUASI-CONTINUITÉ, CONTINUITÉ SÉPARÉE, ET TOPOLOGIE EXTRÉMALE

JEAN-PIERRE TROALLIC

(Communicated by Dennis Burke)

ABSTRACT. Let E be a Banach space, $X_1, \dots, X_n$ strongly countably complete regular spaces and $\Phi: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow E$ a function. We prove, particularly by means of techniques borrowed from J. P. R. Christensen, that if Φ is separately continuous and quasi-continuous when E is equipped with the extremal topology, then Φ is jointly continuous at each point of a dense G_δ subset of $X_1 \times \dots \times X_n$ when E is equipped with the norm topology. Various properties—new or already known—are obtained by using this result.

I. INTRODUCTION

Soient X un espace topologique, $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach réel et $\Phi: X \rightarrow E$ une application. Soit A le G_δ de X constitué par les points de continuité de $\Phi: X \rightarrow (E, \|\cdot\|)$. Il est connu que $\overline{A} = X$ dans chacun des deux cas suivants:

— X est un espace régulier fortement dénombrablement complet et $\Phi: X \rightarrow (E, \sigma(E, \text{ext}))$ est une application continue (cf. en 2.1 ci-dessus la définition de la topologie extrémale $\sigma(E, \text{ext})$ sur E). Ce résultat de C. Stegall [15] généralise un théorème bien connu de I. Namioka [11]. (Le résultat de I. Namioka est le cas particulier de celui de C. Stegall où $(E, \|\cdot\|)$ est l'espace de Banach, pour la norme uniforme, des fonctions réelles continues sur un compact. La topologie extrémale n'est dans ce cas pas autre chose que la topologie de la convergence simple).

— X est un espace produit $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ avec X_1 espace régulier fortement dénombrablement complet et $X_2, \dots, X_n$ espaces compacts, $(E, \|\cdot\|)$ est l'espace de Banach, pour la norme uniforme, des fonctions réelles continues sur un espace compact Y et Φ est séparément continue sur $X_1 \times \dots \times X_n$ quand on munit E de la topologie de la convergence simple dans Y . Ce difficile résultat de M. Talagrand [16] (qui répond à une question soulevée dans [4] par J. P. R.

Received by the editors December 30, 1988 and, in revised form, May 1, 1989.

1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 Revision). Primary 54C05, 46B99, 26B05; Secondary 54E52.

Key words and phrases. Separate and joint continuity, quasicontinuity, extremal topology on a Banach space.

Christensen) généralise également, dans une autre direction, le théorème de I. Namioka.

Dans le présent travail, nous obtenons le résultat suivant (qui est notre résultat de base): si $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ avec $X_1, \dots, X_n$ espaces réguliers fortement dénombrablement complets et si $\Phi: X_1 \times \cdots \times X_n \rightarrow (E, \sigma(E, \text{ext}))$ est une application séparément continue et quasi-continue, alors on a $\overline{A} = X$ (Théorème 3.3). Plusieurs applications du Théorème 3.3 sont données dans la section IV; la généralisation commune des résultats de C. Stegall et de M. Talagrand obtenue en 4.4 ci-dessus est en particulier une application de ce théorème.

La notion d'application quasi-continue joue un rôle essentiel dans ce travail. Rappelons ici ce que l'on appelle "une application quasi-continue": soient X et Y des espaces topologiques et $f: X \rightarrow Y$ une application. Soit $x \in X$. On dit que f est quasi-continue en x si pour tout voisinage V de x dans X et pour tout voisinage W de $f(x)$ dans Y , l'intérieur de $V \cap f^{-1}(W)$ dans X est non vide. Si l'application f est quasi-continue en tout point de X , on dit qu'elle est quasi-continue. La notion d'application quasi-continue fut introduite en 1932 par S. Kempisty [7] pour généraliser des résultats de H. Hahn et de R. Baire sur les applications séparément continues de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$. De nombreux résultats concernant la quasi-continuité d'applications définies sur des espaces produits plus généraux que $\mathbf{R}^n$ ont été obtenus depuis les travaux de S. Kempisty (cf. en particulier [2, 9, 10, 12, 13]); toutefois, les espaces considérés dans ces articles vérifient des conditions de "caractère dénombrable", ce qui n'est pas le cas ici.

II. TOPOLOGIE EXTRÉMALE

2.1. Définitions. (1) soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach réel et soit B la boule unité fermée du dual topologique E' de E (pour la norme usuelle sur E'). On appelle topologie extrême sur E la topologie sur E la moins fine rendant continus les éléments extrémaux de B . La topologie extrême sur E sera notée $\sigma(E, \text{ext } B)$ ou $\sigma(E, \text{ext})$. Cette topologie localement convexe sur E , bien sûr moins fine que la topologie faible $\sigma(E, E')$, est séparée. En effet, on sait que pour tout $y \in E$, on a $\|y\| = \sup\{\gamma(y) | \gamma \in B\}$; comme le convexe compact B de $(E', \sigma(E', E))$ est l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble $\text{ext } B$ de ses points extrémaux (théorème de Krein-Milman), on a aussi $\|y\| = \sup\{\gamma(y) | \gamma \in \text{ext } B\}$; il en résulte que $\text{ext } B$ sépare les points de E .

(2) On dit qu'une partie A d'un espace topologique X est relativement semi-compacte (ou encore relativement dénombrablement compacte) dans X si toute suite d'éléments de A admet dans X au moins une valeur d'adhérence.

Nous aurons besoin, dans la démonstration du Théorème 3.3, du résultat suivant de J. Bourgain et M. Talagrand [1] (cf. également [8] et [15]):

2.2. Théorème. Soit A une partie bornée d'un espace de Banach réel $(E, \|\cdot\|)$. Supposons que A soit une partie relativement semi-compacte de E pour la topologie extrême. Alors, A est une partie faiblement relativement compacte de E .

Nous aurons également besoin des propriétés élémentaires suivantes:

2.3. Proposition. Soient X un espace de Baire, $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach réel et $\Phi: X \rightarrow (E, \sigma(E, \text{ext}))$ une application quasi-continue. Alors:

- (1) Toute boule fermée de $(E, \|\cdot\|)$ est un fermé de E pour la topologie extrémale.
- (2) Tout ouvert non vide de X contient un ouvert non vide U de X tel que $\Phi(U)$ soit une partie bornée de $(E, \|\cdot\|)$.

Démonstration. (1) Soit $y \in E$ et soit $r > 0$. Pour tout $z \in E$, on a $\|z\| = \sup\{\gamma(z) \mid \gamma \in \text{ext } B\}$ où B désigne la boule unité fermée de E' (cf. 2.1 ci-dessus). On en déduit l'égalité:

$$\{z \mid z \in E, \|y - z\| \leq r\} = \cap_{\gamma \in \text{ext } B} \{z \mid z \in E, \gamma(y) - \gamma(z) \leq r\}.$$

La boule fermée de $(E, \|\cdot\|)$ de centre y et de rayon r est l'intersection d'une famille de fermés de $(E, \sigma(E, \text{ext}))$; c'est donc un fermé de $(E, \sigma(E, \text{ext}))$.

(2) Supposons X non vide et montrons que X contient un ouvert non vide sur lequel l'application $\Phi: X \rightarrow (E, \|\cdot\|)$ est bornée. (On obtient le cas général en appliquant ce résultat à un sous-espace ouvert non vide quelconque de X). Pour tout $n \in \mathbb{N}$ désignons par B_n la boule fermée de $(E, \|\cdot\|)$ de centre 0 et de rayon n . Il suffit de montrer que l'intérieur $\text{Int } \Phi^{-1}(B_n)$ de $\Phi^{-1}(B_n)$ dans X est non vide pour au moins un n de $\mathbb{N}$. Raisonnons par l'absurde, autrement dit supposons que l'on ait $\text{Int } \Phi^{-1}(B_n) = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$; pour tout ouvert non vide ω de X , on a $\omega \cap \Phi^{-1}(E - B_n) \neq \emptyset$ car $\text{Int } \Phi^{-1}(B_n) = \emptyset$; l'application $\Phi: X \rightarrow (E, \sigma(E, \text{ext}))$ étant quasi-continue (par hypothèse) et $E - B_n$ étant un ouvert de $(E, \sigma(E, \text{ext}))$ (cf. le (1) de 2.3 ci-dessus), on a $\omega \cap \text{Int } \Phi^{-1}(E - B_n) \neq \emptyset$; $\text{Int } \Phi^{-1}(E - B_n)$ est donc un ouvert dense de X . Comme X est un espace de Baire, $\cap_{n \in \mathbb{N}} \text{Int } \Phi^{-1}(E - B_n)$ est dense dans X et à fortiori, $\cap_{n \in \mathbb{N}} \Phi^{-1}(E - B_n)$ est non vide. Soit $y \in \cap_{n \in \mathbb{N}} \Phi^{-1}(E - B_n)$; on a $\|\Phi(y)\| > n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est absurde.

III. LE RÉSULTAT DE BASE

3.1. Espaces réguliers fortement dénombrablement complets. Un espace topologique X est dit "régulier fortement dénombrablement complet" s'il est régulier dans le sens usuel et s'il existe une suite $(\mathcal{A}_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de recouvrements ouverts de X telle que la condition suivante soit satisfaite: pour toute suite décroissante $(F_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de fermés non vides de X telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, F_p soit contenu dans au moins un élément de $\mathcal{A}_p$, on a $\cap_{p \in \mathbb{N}} F_p \neq \emptyset$. Désignons par $\mathcal{E}$ la classe des espaces réguliers fortement dénombrablement complets. Tout élément de $\mathcal{E}$ est un espace de Baire; le produit d'une suite finie d'éléments de $\mathcal{E}$ est un espace de Baire qui n'appartient pas toujours à $\mathcal{E}$; les espaces localement compacts et les espaces métriques complets appartiennent à $\mathcal{E}$; plus généralement, tous les espaces Čech-complets appartiennent à $\mathcal{E}$ (cf. [5, 6]).

Soient X un élément de $\mathcal{C}$, $\mathcal{U}^*$ l'ensemble des ouverts non vides de X et $\mathcal{P} = \{(U, x) | U \in \mathcal{U}^* \text{ et } x \in U\}$. Alors, on a la propriété suivante (J. P. R. Christensen [3]):

Il existe une application $s: \mathcal{U}^* \rightarrow \mathcal{U}^*$ telle que $s(U) \subset U$ pour tout $U \in \mathcal{U}^*$ et telle que la condition suivante soit satisfaite: pour toute suite $((U_p, x_p))_{p \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{P}$ vérifiant $U_{p+1} \subset s(U_p)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\{x_p | p \in \mathbb{N}\}$ est une partie relativement semi-compacte de X et $\overline{\{x_p | p \in \mathbb{N}\}} \cap (\cap_{p \in \mathbb{N}} U_p) \neq \emptyset$. (Une telle application s sera appelée ici une stratégie sur X). Cette propriété, introduite par J. P. R. Christensen dans [3] (Théorème 1) pour démontrer le théorème de I. Namioka, est utilisée en 3.3 ci-dessus dans des conditions comparables. Notons toutefois que la condition de semi-compactité relative de $\{x_p | p \in \mathbb{N}\}$ n'est pas essentielle dans la démonstration du Théorème 1 de [3] (cf. [14]), alors qu'elle l'est dans celle du Théorème 3.3.

L'existence de s est simple à établir [3]: pour toute partie A de X , notons $n(A)$ la borne supérieure de l'ensemble des $k \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $p \in \{0, \dots, k\}$, A soit incluse dans l'un au moins des éléments de $\mathcal{A}_p$ (la suite $(\mathcal{A}_p)_{p \in \mathbb{N}}$ étant définie comme ci-dessus avec en outre $\mathcal{A}_0 = \{x\}$); on vérifie aisément qu'il suffit de choisir pour $s(U)$ un ouvert non vide V de X tel que $\overline{V} \subset U$ et $n(\overline{V}) \geq n(\overline{U}) + 1$.

3.2. Notation et définition. Soient $X_1, \dots, X_n, Z$ des espaces topologiques et une application $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Z$. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ de l'espace topologique produit $X_1 \times \dots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \dots \times X_n$, notons f_x l'application de X_i dans Z définie par $f_x(y) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n)$ pour tout $y \in X_i$. On dira que f est séparément continue si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et tout élément x de $X_1 \times \dots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \dots \times X_n$, l'application f_x est continue.

Le théorème suivant est le résultat de base de ce travail:

3.3. Théorème. Soient $X_1, \dots, X_n$ des espaces réguliers fortement dénombrablement complets, $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach réel et $\Phi: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow (E, \sigma(E, \text{ext}))$ une application séparément continue et quasi-continue. Alors, le G_δ A de $X_1 \times \dots \times X_n$ constitué par les points de continuité de $\Phi: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow (E, \|\cdot\|)$ est dense dans $X_1 \times \dots \times X_n$.

Démonstration. Supposons que A ne soit pas dense dans l'espace de Baire $X = X_1 \times \dots \times X_n$; il existe alors un ouvert non vide U de X et un réel $r > 0$ tels que pour tout $x \in U$, l'oscillation de $\Phi: X \rightarrow (E, \|\cdot\|)$ en x soit supérieure ou égale à r (en effet, on a $A = \cap_{p \in \mathbb{N}} G_p$ où pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, G_p désigne l'ouvert de X constitué par les $x \in X$ tels que l'oscillation de $\Phi: X \rightarrow (E, \|\cdot\|)$ en x soit strictement inférieure à $1/p$). On suppose $\Phi(U)$ bornée dans $(E, \|\cdot\|)$ (cf. 2.3 ci-dessus).

(1) Soit H une partie finie de X . Désignons par $\text{co } \Phi(H)$ l'enveloppe convexe de $\Phi(H)$ dans E et par $\text{co}_r \Phi(H)$ l'ensemble des $y \in E$ tels que

$$\inf\{\|y - z\| | z \in \text{co } \Phi(H)\} < r/3.$$

Soit V un ouvert non vide de X inclus dans U ; montrons que l'on a $\text{Int}(V - \Phi^{-1}[\text{co}_r \Phi(H)]) \neq \emptyset$. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, autrement dit, supposons que l'on ait $V \subset \Phi^{-1}[\text{co}_r \Phi(H)]$ et mettons en évidence une contradiction. Désignons par $(B_1, \dots, B_m)$ une suite finie de boules fermées de $(E, \|\cdot\|)$ de rayon $5r/12$ telle que $\text{co}_r \Phi(H) \subset \bigcup_{i=1}^m B_i$ (une telle suite existe car $\text{co} \Phi(H)$ est un sous-espace compact de $(E, \|\cdot\|)$); on a $V \subset \bigcup_{i=1}^m \Phi^{-1}(B_i)$, donc il existe $j \in \{1, \dots, m\}$ tel que $V \cap \text{Int} \Phi^{-1}(B_j) \neq \emptyset$. L'ouvert non vide $V \cap \text{Int} \Phi^{-1}(B_j)$ de X n'est pas inclus dans $\Phi^{-1}(B_j)$ car en tout point de cet ouvert, l'oscillation de $\Phi: X \rightarrow (E, \|\cdot\|)$ est supérieure ou égale à r ; on en déduit que $\text{Int} \Phi^{-1}(B_j)$ et $\Phi^{-1}(E - B_j)$ ont une intersection non vide. La quasi-continuité de $\Phi: X \rightarrow (E, \sigma(E, \text{ext}))$ et le fait que $E - B_j$ soit un ouvert de $(E, \sigma(E, \text{ext}))$ (cf. 2.3 ci-dessus) impliquent alors l'existence d'un ouvert non vide ω de X inclus à la fois dans $\text{Int} \Phi^{-1}(B_j)$ et dans $\Phi^{-1}(E - B_j) = X - \Phi^{-1}(B_j)$, ce qui est absurde.

(2) Soient $\mathcal{U}_i^*$ l'ensemble des ouverts non vides de X_i , $\mathcal{P}_i = \{(U_i, x_i) | U_i \in \mathcal{U}_i^* \text{ et } x_i \in U_i\}$ et s_i une stratégie sur X_i . Désignons par $\mathcal{P}$ l'ensemble des éléments $((U_1, x_1), \dots, (U_n, x_n))$ de $\mathcal{P}_1 \times \dots \times \mathcal{P}_n$ tels que $\overline{U}_1 \times \dots \times \overline{U}_n \subset U$ ($\mathcal{P}$ est bien sûr non vide). On définit par récurrence une suite d'éléments de $\mathcal{P}$ de la manière suivante: $((U_{01}, x_{01}), \dots, (U_{0n}, x_{0n}))$ est arbitrairement choisi dans $\mathcal{P}$; $((U_{k1}, x_{k1}), \dots, (U_{kn}, x_{kn}))$ étant donnés dans $\mathcal{P}$ pour $k = 0, \dots, p$, on choisit $((U_{(p+1)1}, x_{(p+1)1}), \dots, (U_{(p+1)n}, x_{(p+1)n}))$ dans $\mathcal{P}$ tel que $U_{(p+1)i} \subset s_i(U_{pi})$ pour $i = 1, \dots, n$ et tel que

$$(U_{(p+1)1} \times \dots \times U_{(p+1)n}) \cap \Phi^{-1}[\text{co}_r \Phi(H_p)] = \emptyset$$

où

$$H_p = \{x_{k1} | 0 \leq k \leq p\} \times \dots \times \{x_{kn} | 0 \leq k \leq p\}.$$

Un tel choix est possible d'après le (1); en effet, l'ouvert non vide $V = s_1(U_{p1}) \times \dots \times s_n(U_{pn})$ de X est inclus dans $U_{p1} \times \dots \times U_{pn}$ qui est lui-même inclus dans U .

(3) Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, posons $S_i = \{x_{pi} | p \in \mathbb{N}\}$; montrons que l'on a

$$\Phi(\overline{S_1} \times \dots \times \overline{S_n}) \subset \overline{\Phi(S_1 \times \dots \times S_n)}^{\sigma(E, E')}.$$

Soit y un point de $S_1 \times \dots \times S_{i-1} \times \overline{S_{i+1}} \times \dots \times \overline{S_n}$. L'ensemble S_i est une partie relativement semi-compacte de X_i car la suite $((U_{pi}, x_{pi}))_{p \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{P}_i$ vérifie la condition $U_{(p+1)i} \subset s_i(U_{pi})$ pour tout $p \in \mathbb{N}$; $\Phi_y(S_i)$ est

donc une partie relativement semi-compacte de $(E, \sigma(E, \text{ext}))$ car $\Phi_y: X_i \rightarrow (E, \sigma(E, \text{ext}))$ est une application continue; $\Phi_y(S_i)$ étant de plus une partie bornée de $(E, \|\cdot\|)$, il résulte du Théorème 2.2 que $\Phi_y(S_i)$ est une partie relativement compacte de $(E, \sigma(E, E'))$. On en déduit que l'on a $\Phi_y(\overline{S}_i) \subset \overline{\Phi_y(S_i)}^{\sigma(E, E')}$, ceci pour $i = 1, \dots, n$. En s'appuyant sur ces inclusions, on voit, en raisonnant par récurrence sur $i \in \{1, \dots, n\}$, que l'on a

$$\Phi(\overline{S}_1 \times \dots \times \overline{S}_n) \subset \overline{\Phi(S_1 \times \dots \times S_i \times \overline{S}_{i+1} \times \dots \times \overline{S}_n)}^{\sigma(E, E')}$$

pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. On conclut en prenant $i = n$.

(4) La suite $((U_{pi}, x_{pi}))_{p \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{P}_i$ vérifie la condition $U_{(p+1)i} \subset S_i(U_{pi})$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, donc on a $\overline{S}_i \cap (\cap_{p \in \mathbb{N}} U_{pi}) \neq \emptyset$ ($i = 1, \dots, n$). Soit u_i un point de $\overline{S}_i \cap (\cap_{p \in \mathbb{N}} U_{pi})$ pour $i = 1, \dots, n$. Posons $u = (u_1, \dots, u_n)$. Alors, $u \in \overline{S}_1 \times \dots \times \overline{S}_n$, donc $\phi(u) \in \overline{\Phi(S_1 \times \dots \times S_n)}^{\sigma(E, E')}$ (cf. le (3) de cette démonstration). On a $S_1 \times \dots \times S_n = \cup_{p \in \mathbb{N}} H_p$ (vérification immédiate), donc $\Phi(u) \in \overline{\cup_{p \in \mathbb{N}} \Phi(H_p)}^{\sigma(E, E')}$; à fortiori, $\Phi(u)$ appartient à l'adhérence faible de l'enveloppe convexe $\text{co}[\cup_{p \in \mathbb{N}} \Phi(H_p)]$ de $\cup_{p \in \mathbb{N}} \Phi(H_p)$ dans E . L'adhérence faible de $\text{co}[\cup_{p \in \mathbb{N}} \Phi(H_p)]$ dans E coïncide avec son adhérence forte (théorème de Mazur); d'autre part, on a $\text{co}[\cup_{p \in \mathbb{N}} \Phi(H_p)] = \cup_{p \in \mathbb{N}} \text{co} \Phi(H_p)$ (car la suite $(H_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de parties de X est croissante); il existe par conséquent $q \in \mathbb{N}$ tel que $\Phi(u) \in \text{co}_r(H_q)$, c'est-à-dire tel que $u \in \Phi^{-1}[\text{co}_r(H_q)]$. Compte-tenu du (2), u n'appartient pas à $U_{(q+1)1} \times \dots \times U_{(q+1)n}$, ce qui est absurde car u appartient à $(\cap_{p \in \mathbb{N}} U_{p1}) \times \dots \times (\cap_{p \in \mathbb{N}} U_{pn})$ qui est égal à $\cap_{p \in \mathbb{N}} (U_{p1} \times \dots \times U_{pn})$.

3.4. Remarque. Si dans 3.3, on suppose que $n = 1$, on retrouve, bien sûr, le résultat de C. Stegall.

IV. APPLICATIONS DU THÉORÈME 3.3

Dans certains cas, la continuité séparée d'une fonction de plusieurs variables implique sa quasi-continuité. Par exemple, on a le théorème suivant (qui est un résultat connu; cf. [2] ou [10]):

4.1. Théorème. Soient X_1 un espace topologique, $X_2, \dots, X_n$ des espaces topologiques vérifiant le premier axiome de dénombrabilité, Z un espace topologique régulier et $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Z$ une application séparément continue. Supposons que l'espace produit $X_1 \times \dots \times X_{n-1}$ soit un espace de Baire. Alors, f est quasi-continue.

Compte-tenu de cette propriété, on obtient, par application de 3.3, le résultat suivant:

4.2. Théorème. Soient X_1 un espace régulier fortement dénombrablement complet quelconque, $X_2, \dots, X_n$ des espaces réguliers fortement dénombrablement complets vérifiant le premier axiome de dénombrabilité, $(E, \|\cdot\|)$ un espace de

Banach réel et $\Phi: X_1 \times \cdots \times X_n \rightarrow (E, \sigma(E, \text{ext}))$ une application séparément continue. Alors, le $G_\delta A$ de $X_1 \times \cdots \times X_n$ constitué par les points de continuité de $\Phi: X_1 \times \cdots \times X_n \rightarrow (E, \|\cdot\|)$ est dense dans $X_1 \times \cdots \times X_n$.

Le résultat que nous allons maintenant établir est du même type que celui rappelé en Théorème 4.1, mais contrairement à ce théorème il concerne des espaces topologiques qui ne vérifient pas nécessairement le premier axiome de dénombrabilité (ni aucune autre condition de "caractère dénombrable"). Sa démonstration (beaucoup plus difficile que celle de 4.1) s'appuie essentiellement sur le Théorème 3.3.

4.3. Théorème. *Soient X_1 un espace régulier fortement dénombrablement complet, $X_2, \dots, X_n$ des espaces localement compacts, Z un espace complètement régulier et $f: X_1 \times \cdots \times X_n \rightarrow Z$ une application séparément continue. Alors, f est quasi-continue.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n . Si $n = 1$, la propriété est évidente. Supposons le résultat établi pour $1, \dots, n-1$ ($n \geq 2$); montrons qu'il est alors vrai pour n . On peut, bien sûr, supposer que l'espace X_n est compact. Soient $a = (a_1, \dots, a_n)$ un élément de $X_1 \times \cdots \times X_n$, V un voisinage de a dans $X_1 \times \cdots \times X_n$ et W un voisinage de $f(a)$ dans Z ; nous devons montrer que $\text{Int}(V \cap f^{-1}(W)) \neq \emptyset$. On peut supposer que V est de la forme $V_1 \times \cdots \times V_n$ avec V_i ouvert de X_i ($i = 1, \dots, n$). Soit $\gamma: Z \rightarrow \mathbf{R}$ une application continue égale à 1 en $f(a)$, nulle en tout point de $Z - W$ et telle que $0 \leq \gamma(z) \leq 1$ pour tout $z \in Z$. Soit $\mathcal{C}(X_n)$ l'espace de Banach réel obtenu en munissant l'espace des applications continues de X_n dans $\mathbf{R}$ de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_u$. L'application $\Phi: X_1 \times \cdots \times X_{n-1} \rightarrow \mathcal{C}(X_n)$ définie par $\Phi(x) = \gamma \circ f_x$ est séparément continue quand on munit $\mathcal{C}(X_n)$ de la topologie extrémale (en effet, la topologie extrémale coïncide ici avec la topologie de la convergence simple); compte-tenu de l'hypothèse de récurrence, elle est également quasi-continue. Il résulte donc du Théorème 3.3 que le $G_\delta A$ de $X_1 \times \cdots \times X_{n-1}$ constitué par les points de continuité de $\Phi: X_1 \times \cdots \times X_{n-1} \rightarrow (\mathcal{C}(X_n), \|\cdot\|_u)$ est dense dans $X_1 \times \cdots \times X_{n-1}$. On en déduit que $\gamma \circ f$ est continue en tout point de $A \times X_n$ (vérification aisée). L'application $\gamma \circ f_{a_n}: X_1 \times \cdots \times X_{n-1} \rightarrow \mathbf{R}$ est séparément continue; elle est donc quasi-continue (cf. l'hypothèse de récurrence); il existe par conséquent un ouvert non vide ω_i de X_i ($i = 1, \dots, n-1$) tel que $\omega_1 \times \cdots \times \omega_{n-1} \subset (V_1 \times \cdots \times V_{n-1}) \cap (\gamma \circ f_{a_n})^{-1}(]0, +\infty[)$ (en effet, le point $(a_1, \dots, a_{n-1})$ appartient à cette intersection). Soit $(b_1, \dots, b_{n-1}) \in (\omega_1 \times \cdots \times \omega_{n-1}) \cap A$; l'application $\gamma \circ f$ est continue en $(b_1, \dots, b_{n-1}, a_n)$, donc il existe un ouvert ω'_i de X_i ($i = 1, \dots, n$) tel que $\omega'_1 \times \cdots \times \omega'_n$ contienne $(b_1, \dots, b_{n-1}, a_n)$ et tel que $(\gamma \circ f)(\omega'_1 \times \cdots \times \omega'_n) \subset]0, +\infty[$. L'ouvert $(V_1 \cap \omega'_1) \times \cdots \times (V_n \cap \omega'_n)$ de $X_1 \times \cdots \times X_n$ est non vide (il contient $(b_1, \dots, b_{n-1}, a_n)$) et il est inclus dans $(V_1 \times \cdots \times V_n) \cap f^{-1}(W)$. Par conséquent f est quasi-continue en $(a_1, \dots, a_n)$.

Si f est une fonction réelle quasi-continue définie sur un espace de Baire X , on sait que le G_δ de X constitué par les points de continuité de f est dense dans X [9]; le Théorème 4.3 implique donc en particulier l'existence de points de continuité pour toute fonction réelle séparément continue définie sur un produit fini d'espaces localement compacts (ce qui répond déjà à la question posée dans [4] par J. P. R. Christensen). En combinant les énoncés 3.3 et 4.3, on obtient en fait le résultat beaucoup plus général suivant:

4.4. Théorème. Soient X_1 un espace régulier fortement dénombrablement complet, $X_2, \dots, X_n$ des espaces localement compacts, $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach réel et $\Phi: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow (E, \sigma(E, \text{ext}))$ une application séparément continue. Alors, le $G_\delta A$ de $X_1 \times \dots \times X_n$ constitué par les points de continuité de $\Phi: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow (E, \|\cdot\|)$ est dense dans $X_1 \times \dots \times X_n$.

4.5. Remarque. Dans [16], M. Talagrand donne une démonstration directe du théorème suivant:

Soient X_1 un espace $K - \beta$ - défavorable, $X_2, \dots, X_n$ des espaces compacts et f une application séparément continue de $X_1 \times \dots \times X_n$ dans $\mathbf{R}$. Alors, il existe un $G_\delta A$ de $X_1 \times \dots \times X_{n-1}$ tel que f soit continue en tout point de $A \times X_n$. (La classe des espaces topologiques $K - \beta$ - défavorables est plus générale encore que celle des espaces réguliers fortement dénombrablement complets). Ce résultat peut être retrouvé par application de 4.4 (du moins quand X_1 est un espace régulier fortement dénombrablement complet). En effet, soit $\mathcal{E}(X_n)$ l'espace de Banach réel obtenu en munissant l'espace des applications continues de X_n dans $\mathbf{R}$ de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_u$. L'application $\Phi: X_1 \times \dots \times X_{n-1} \rightarrow \mathcal{E}(X_n)$ définie par $\Phi(x) = f_x$ est séparément continue quand on munit $\mathcal{E}(X_n)$ de la topologie extrémale (qui coïncide ici avec la topologie de la convergence simple). D'après le Théorème 4.4, le $G_\delta A$ de $X_1 \times \dots \times X_{n-1}$ constitué par les points de continuité de $\Phi: X_1 \times \dots \times X_{n-1} \rightarrow (\mathcal{E}(X_n), \|\cdot\|_u)$ est dense dans $X_1 \times \dots \times X_{n-1}$. On vérifie aisément que f est continue en tout point de $A \times X_n$.

REFERENCES

1. J. Bourgain et M. Talagrand, *Compacité extrémale*, Proc. Amer. Math. Soc. **80** (1980), 68-70.
2. J. C. Breckenridge and T. Nishiura, *Partial continuity, quasicontinuity, and Baire spaces*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica **4** (1976), 191-203.
3. J. P. R. Christensen, *Joint continuity of separately continuous functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **82** (1981), 455-461.
4. —, *Non-linear automatic continuity*, Sémin. d'Initiation à l'Analyse 22ème Année, Publ. de l'Université P. et M. Curie (1982-1983), No. 59, exposé 11, 2 p.
5. Z. Frolik, *Generalizations of the G_δ -property of complete metric spaces*, Czechoslovak Math. J. **10** (1960), 359-379.
6. —, *Baire spaces and some generalizations of complete metric spaces*, Czechoslovak Math. J. **11** (1961), 237-238.
7. S. Kempisty, *Sur les fonctions quasi-continues*, Fund. Math. **19** (1932), 184-197.

8. S. S. Kurana, *Pointwise compactness on extreme points*, Proc. Amer. Math. Soc. **83** (1981), 347–348.
9. S. Marcus, *Sur les fonctions quasi-continues au sens Kempisty*, Colloq. Math. **8** (1961), 45–53.
10. N.F.G. Martin, *Quasi-continuous functions on product spaces*, Duke Math. J. **28** (1961), 39–44.
11. I. Namioka, *Separate and joint continuity*, Pacific J. Math. **51** (1974), 515–531.
12. T. Neubrunn, *A generalized continuity and product spaces*, Math. Slovaca **26** (1976), 97–99.
13. Z. Piotrowsky, *Quasi-continuity and product spaces*, Proc. Internat. Conf. Geom. Top. Warsaw 1978, pp. 349–352.
14. J. Saint Raymond, *Jeux topologiques et espaces de Namioka*, Proc. Amer. Math. Soc. **87** (1984), 499–504.
15. C. Stegall, *Generalizations of a theorem of Namioka*, Proc. Amer. Math. Soc. **102** (1988), 559–564.
16. M. Talagrand, *Espaces de Baire et espaces de Namioka*, Math. Ann. **270** (1985), 159–164.

FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES, UNIVERSITÉ DU HAVRE 25, RUE PHILIPPE LEBON
F-76600 LE HAVRE, FRANCE