EXISTENCE D'APPLICATIONS HARMONIQUES TORDUES À VALEURS DANS LES VARIÉTÉS À COURBURE NÉGATIVE

FRANÇOIS LABOURIE

(Communicated by Jonathan M. Rosenberg)

ABSTRACT. We generalize a theorem of Corlette on existence of twisted harmonic maps into a manifold of non-positive curvature.

Ce papier fait suite à une suite d'articles [D, C], étudiant les applications harmoniques tordues. Le problème est le suivant:

On se donne une variété N , dont le revêtement universel est $\bar{N}$, une variété M simplement connexe à courbure négative ou nulle, et une représentation ρ de $\pi_1(N)$ dans le groupe des isométries de M . Une application tordue par ρ est alors une application de $\bar{N}$ dans M ρ -équivariante, ce qui peut s'interpréter comme une section du M -fibré plat de base N et associé naturellement à ρ . Il s'agit maintenant d'obtenir une condition sur $\text{Im}(\rho)$ permettant d'assurer l'existence d'une application harmonique tordue par ρ . Par exemple, $\text{Im}(\rho)$ cocompact suffit selon les résultats célèbres de Eells et Sampson [ES].

Le résultat principal de Corlette répond à cette question dans le cas où M est un espace riemannien symétrique de type noncompact:

Théorème 0.1 (Corlette). *Il existe une application harmonique tordue par ρ à valeur dans G/K si et seulement si $\text{Im}(\rho)$ est un sous-groupe réductif de G .*

Corlette utilise ce résultat comme un point de départ de sa théorie de la super-rigidité. Dans ce même article, il s'interroge sur une possible généralisation de ce résultat et une démonstration plus liée à la géométrie des variétés à courbure négative. Nous nous proposons ici d'en donner une extension, modulo une condition sur la cible M , à laquelle on demande d'être *sans demies-bandes plates* (1.1). Cette condition, quoique restrictive, est satisfaite par exemple dans le cas des variétés analytiques réelles ou des variétés à courbure strictement négative. Moyennant une définition géométrique de la condition de réductivité (1.3), nous obtenons la généralisation suivante du théorème de Corlette:

Théorème 0.2. *Si M est sans demies-bandes plates, il existe une application harmonique tordue par ρ , si et seulement si $\text{Im}(\rho)$ est un sous-groupe réductif des isométries de M .*

Received by the editors October 31, 1989 and, in revised form, April 18, 1990.

1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 Revision). Primary 58E20; Secondary 58D25, 53C20, 53C35.

Remarquons, que la condition de réductivité reste suffisante si l'on supprime l'hypothèse "sans demies-bandes plates" (3.4).

La démonstration de Corlette repose sur l'étude d'une équation d'évolution sur la connexion induite sur un fibré associé. La nôtre réutilise les résultats de [ES], et la géométrie des variétés à courbure négative ou nulle (sphère à l'infini, horosphères et flots horosphériques), telle qu'elle est étudiée dans [E0] et [BGS] par exemple.

1. DÉFINITIONS

Les variétés à courbure négative ou nulle qui nous intéressent sont celles qui satisfont au critère suivant:

1.1. Bandes plates. Une variété simplement connexe à courbure négative ou nulle est dite *sans demies-bandes plates*, si tout champ de Jacobi, défini le long d'une géodésique, dont la norme est constante pour les temps supérieurs à un temps donné, a une norme constante pour tout temps.

1.2. Remarques. (i) Cette propriété est la version infinitésimale de la propriété suivante: toute demie-bande plate peut être étendue en une bande plate entière.

(ii) Les variétés à courbure strictement négative, les variétés analytiques réelles et en particulier par les espaces symétriques sont sans demies-bandes plates.

Nous allons finir de donner les définitions nécessaires à l'énoncé de notre résultat en définissant un

1.3. Groupe réductif. Un sous-groupe G du groupe des isométries d'une variété simplement connexe M à courbure négative ou nulle est *réductif* s'il existe un convexe fermé C de M , fixé globalement par G , tel que

- (1) le convexe C est isométrique à $C_1 \times E$, où E est euclidien,
- (2) G se décompose en $G = G_1 \times G_2$, G_1 agissant isométriquement sur C_1 et G_2 sur E .
- (3) G_1 ne fixe pas de point à l'infini de C_1 .

1.4. Remarques. (i) Dans le cas où M est analytique réelle, on peut remplacer le mot convexe, par l'expression totalement géodésique et complet (ce qui inclut les points...);

(ii) Dans le cas où M est à courbure strictement négative, un sous-groupe est réductif exactement dans l'un des cas suivants:

- (1) il ne fixe pas de point à l'infini de M ,
- (2) il fixe globalement une géodésique.

Autrement dit, dans ce cas, un groupe est non réductif si et seulement si il fixe un unique point à l'infini.

2. DANS UN SENS

Dans cette section, nous allons démontrer, en utilisant les notations de l'introduction, que s'il existe une application harmonique f , tordue par ρ , de $\bar{N}$ dans M , alors $G = \text{Im}(\rho)$ est un sous-groupe réductif des isométries de M .

Soit donc p le plus grand entier tel qu'il existe un convexe fermé C de M , fixé globalement par G , vérifiant

- (1) C est isométrique à $C_1 \times E$ où E est euclidien de dimension p (On identifiera C_1 à un convexe de M);
- (2) G se décompose en $G = G_1 \times G_2$, G_1 agissant isométriquement sur C_1 et G_2 sur E .

Nous voulons montrer que G_1 ne fixe pas de point à l'infini de C_1 .

Démontrons tout d'abord le

Lemme. Soit π la projection sur le convexe C_1 , et ρ_1 la représentation de $\pi_1(N)$ induite par ρ et la projection de G sur G_1 , alors $\pi \circ f$ est une application harmonique de $\bar{N}$ dans C_1 , tordue par ρ_1 .

Preuve. Nous allons tout d'abord montrer que si π_0 est la projection convexe sur C , alors $g_0 = \pi_0 \circ f$ est harmonique. Remarquons premièrement que, la fonction distance à un convexe étant convexe en courbure négative [BGS], sa restriction à $f(\bar{N})$ est constante. Autrement dit f est à valeur dans l'hypersurface S_{t_0} bord du convexe

$$C_{t_0} = \{m \in M \mid d(m, C) \leq t_0\}.$$

Notons $g_t = \pi_t \circ f$, où π_t est la projection sur C_t et remarquons que ces applications sont toutes tordues par ρ .

Soit u un vecteur tangent à $\bar{N}$ en x et $v_t = Dg_t(u)$, par construction v_t est un champ de Jacobi le long de la géodésique $g_t(x)$.

M étant à courbure négative et la projection sur un convexe étant contractante, nous en déduisons que la norme de v_t est convexe et croissante. Par ailleurs, f étant harmonique, nous en déduisons que cette fonction à une dérivée nulle en $t = t_0$ et donc qu'elle est constante.

Les vecteurs $Dg_t(u)$ sont donc des champ de Jacobi parallèles, ce qui entraîne que le champ, défini le long de la géodésique $g_t(x)$, des vecteurs de tension des g_t est parallèle et donc constamment nul, puisque f est harmonique.

Dès lors g_t est harmonique pour tout t .

Maintenant, il est clair que la projection $g = \pi \circ f$ est harmonique et tordue par ρ_1 . $\square$

Terminons notre preuve en raisonnant par l'absurde. Supposons que G_1 fixe un point à l'infini sur C_1 et soit ϕ_t le flot géodésique associé à ce point à l'infini. Par construction, il est invariant par G_1 , et donc les applications $g_t = \phi_t \circ g$ sont tordues par ρ_1 .

Notons à nouveau $v_t = Dg_t(u)$, où u est un vecteur tangent à $\bar{N}$. Comme dans le lemme précédent, v_t est un champ de Jacobi dont la norme est une fonction convexe et décroissante. Or à nouveau comme g est harmonique nous en déduisons que la dérivée de cette norme est nulle en $t = 0$.

Ceci entraîne que cette norme est constante pour tout temps positif, et donc que, M étant sans demies-bandes plates, cette norme est constante pour tout temps.

Dès lors si x et y deux points de $\bar{N}$, les géodésiques $g_t(x)$ et $g_t(y)$ sont parallèles. Nous en déduisons que l'ensemble F des géodésiques parallèles à $g_t(x)$ est stable par G_1 . Or d'après [G], cet ensemble est isométrique à $C_2 \times \mathbf{R}$, où C_2 est un convexe de M . Par ailleurs G_1 commute avec les translations sur le facteur euclidien et tout ceci entraîne donc que la décomposition initiale associée à la réduction de G peut se poursuivre et donc que p n'est pas le plus grand entier possible.

Ceci nous fournit notre contradiction.

3. DANS L'AUTRE SENS

Nous allons maintenant démontrer que si $\text{Im}(\rho)$ est réductif, il existe une application harmonique tordue par ρ de $\bar{N}$ dans M .

Ce résultat découlera bien évidemment des deux lemmes suivants, qui tout deux partent de la même idée que celle de la démonstration de Donaldson dans [D].

Lemme A. *Soit C un convexe fermé d'une variété à courbure négative, si $\text{Im}(\rho)$ preserve C et ne fixe pas de points à l'infini de C , alors il existe une application harmonique tordue par ρ .*

Lemme B. *Si M est plate, alors il existe une application harmonique tordue par ρ .*

3.1. *Remarque.* Le point de départ de ces deux lemmes, est l'utilisation, comme dans [ES] et [D], de l'équation d'évolution:

$$(*) \quad \partial f_t / \partial t = -d_{\nabla}^*(Df_t),$$

où d_{∇}^* désigne l'adjoint de la dérivation extérieure des 1-formes de $\bar{N}$ à valeurs dans $f^*(TM)$, associée aux connexions de Levi-Civita de M et N .

Partant d'une application f_0 de $\bar{N}$ dans M tordue par ρ (qui existe toujours puisque M est contractile), Donaldson remarque que la méthode d'Eells et Sampson s'applique sans plus de travail, et que l'on en déduit l'existence d'une solution de (*) tordue par ρ , pour tout temps t appartenant à $[0, \infty[$. De plus $|Df_t|$ est bornée uniformément pour tout temps.

Enfin, si f_t converge uniformément vers une application f_{∞} , celle-ci est harmonique.

Cette remarque initiale va nous permettre de démontrer aisément nos lemmes.

3.2. *Preuve du Lemme A.* Comme le convexe C est contractile, nous pouvons supposer que f_0 est à valeurs dans C . Remarquons que la solution f_t de (*) est alors à valeurs dans C pour tout temps.

En effet, la fonction distance d_C à C est convexe. Ceci entraîne que, si g_t est la fonction $f^*(d_C)$, elle satisfait à

$$\partial g_t / \partial t \leq -\Delta g_t.$$

Dès lors,

$$\frac{d}{dt} \int_N g_t ds \leq 0.$$

Enfin puisque g_t est positive et g_0 est nulle, nous en déduisons que g_t est toujours nulle.

Raisonnons maintenant par l'absurde, s'il n'existe pas d'application harmonique, notre remarque initiale entraîne que si x_0 est un point de $\bar{N}$, il existe une suite (t_n) tendant vers l'infini telle que $(f_{t_n}(x_0))$ tende vers un point y de la sphère à l'infini de M .

Si maintenant $g = \rho(h)$ est un élément de $\text{Im}(\rho)$, puisque f_t est uniformément lipschitzienne, nous avons

$$d(g(f_{t_n}(x_0)), f_{t_n}(x_0)) = d(f_{t_n}(h(x_0)), f_{t_n}(x_0))$$

uniformément bornée.

Ceci entraîne que $g(y) = y$ et la contradiction.

3.3. *Preuve du Lemme B.* Dans le cas où M est euclidienne, les points à l'infini s'identifient aux directions. Identifions M à $\mathbb{R}^n$, et décomposons

$$M = E \oplus E^\perp,$$

où E est l'espace des translations qui commutent à $\text{Im}(\rho)$.

A nouveau, nous partons d'une application f_0 à valeurs dans M et tordue par ρ . Soit x_0 un point de $\bar{N}$, f_t la solution de (*). Soit enfin, (t_n) une suite de réels tendant vers l'infini et (u_n) une suite de vecteurs de E , telles que la suite de points

$$z_n = f_{t_n}(x_0) + u_n$$

appartienne à $E^\perp$ et converge, éventuellement vers un point à l'infini.

Raisonnons à nouveau par l'absurde. S'il n'existe pas d'application harmonique, notre remarque initiale entraîne, comme précédemment, que (z_n) tend vers un point de la sphère à l'infini de $E^\perp$.

Ce point à l'infini détermine une direction dont un vecteur directeur est, disons, v . Comme précédemment, on montre que le flot géodésique, c'est à dire ici la translation, associé à v commute avec le groupe.

Et nous avons la contradiction car alors v appartient à E . $\square$

3.4. *Remarques.* Nous n'avons utilisé nulle part dans cette partie de la démonstration notre hypothèse supplémentaire sur M ce qui nous permet de remarquer que la condition de réductivité est suffisante dans tous les cas (à courbure négative ou nulle) pour assurer l'existence d'une application harmonique.

BIBLIOGRAPHY

- [BGS] W. Ballman, M. Gromov, and V. Schroeder, *Manifolds of non-positive curvature*, Progress in Math., vol. 61, Birkhäuser, Boston, 1985.
- [C] K. Corlette, *Flat G -bundles with canonical metrics*, J. Differential Geom. **28** (1988), 361–382.
- [D] S. K. Donaldson, *Twisted harmonic maps and the self-duality equations*, Proc. London Math. Soc. **55** (1987), 127–131.
- [EO] P. Eberlein and B. O'Neill, *Visibility manifolds*, Pacific J. Math. **46** (1976), 43–110.
- [ES] J. Eells and J. H. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. **86** (1964), 109–160.

CENTRE DE MATHÉMATIQUES, ECOLE POLYTECHNIQUE, F-91128 PALAISEAU (CEDEX), FRANCE