INVERSES GENERALISES D'OPERATEURS NON BORNES

J-PH. LABROUSSE

(Communicated by Palle E. T. Jorgensen)

ABSTRACT. This paper is devoted to the definition and the study of the generalized inverses of unbounded densely defined closed operators in Banach and Hilbert spaces. In this latter case an identity is established that links the orthogonal projection on the graph of an operator to the orthogonal projection on the graph of its Moore-Penrose inverse.

INTRODUCTION

La notion d'inverse généralisé d'un opérateur linéaire introduite depuis quelques décennies est désormais régulièrement utilisée en analyse fonctionnelle (voir par exemple [4]). Cependant dans le cadre des opérateurs non bornés cette notion présente des difficultés particulières et il nous a paru souhaitable d'en donner une définition précise et d'en établir les premières propriétés.

Soit $\mathbf{B}$ un espace de Banach complexe et notons $C(\mathbf{B})$ l'ensemble des opérateurs fermés à domaine dense dans $\mathbf{B}$ et à valeurs dans $\mathbf{B}$. Si $A \in C(\mathbf{B})$ on notera $D(A)$ son domaine, $N(A)$ son noyau et $R(A)$ son image. $L(\mathbf{B})$ dénotera le sous-ensemble des éléments bornés de $C(\mathbf{B})$. Nous utiliserons le corollaire suivant du lemme de Neubauer:

Corollaire 0.1. Soit $A, B \in C(\mathbf{B})$. Alors si $R(A) + N(B)$ est fermé et si $R(A) \cap N(B) = \{0\}$, $R(A)$ est fermé (cf. [2, Proposition 2.11]).

1. LE CAS DES ESPACES DE BANACH

Définition 1.1. Soit $A \in C(\mathbf{B})$. Alors $B \in C(\mathbf{B})$ est un *inverse généralisé* de A si

$$\begin{aligned} R(A) &\subset D(B), & R(B) &\subset D(A), \\ \forall u \in D(A), & Au = AB Au, \\ \forall v \in D(B), & Bv = BAB v; \end{aligned}$$

ce qui sera noté $A(\text{inv})B$.

Remarque 1.2. La relation ainsi définie est symétrique, c'est à dire que $A(\text{inv})B \Leftrightarrow B(\text{inv})A$.

Received by the editors September 20, 1990 and, in revised form, November 12, 1990.

1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 Revision). Primary 47.

Key words and phrases. Generalized inverse, Moore Penrose inverse, unbounded operators.

Lemme 1.3. Soit $A, B \in C(\mathbf{B})$ avec $A(\text{inv})B$. Alors

- (a) AB est une projection de $D(B)$ sur $R(A)$, de noyau $N(B)$;
- (b) BA est une projection de $D(A)$ sur $R(B)$, de noyau $N(A)$.

Démonstration. En vue de la symétrie entre A et B , il suffit d'établir (a). Or $D(AB) = D(B)$ et si $v \in D(B)$, $AB(ABv) = (ABA)Bv = ABv$. En outre: $R(AB) \subset R(A)$ et $N(B) \subset N(AB)$. Si $v \in R(A)$ alors $\exists u \in D(A)$ tel que $v = Au = ABAu \in R(AB)$. Donc: $R(A) = R(AB)$ et si $v \in N(AB)$ alors $ABv = 0$. D'où $Bv = BABv = 0$ et par conséquent $v \in N(B)$. Donc $N(AB) = N(B)$ et (a) est démontré.

Remarque 1.4. Soit $A, B \in C(\mathbf{B})$ avec $A(\text{inv})B$. Alors $D(B) = N(B) \oplus R(A)$ et $D(A) = N(A) \oplus R(B)$.

Lemme 1.5. Soit $A, B \in C(\mathbf{B})$ avec $A(\text{inv})B$. Alors AB , considéré comme un opérateur de $\mathbf{B}$ dans lui-même, est fermable si et seulement si $\overline{R(A)} \cap N(B) = \{0\}$. Alors $D(\overline{AB}) = \overline{R(A)} \oplus N(B)$; $R(\overline{AB}) = \overline{R(A)}$; $N(\overline{AB}) = N(B)$ et $\overline{AB}$ est une projection de $D(\overline{AB})$ sur $R(\overline{AB})$, de noyau $N(B)$.

Démonstration. Si. Soit $\{v_n\} \subset D(AB) = D(B)$ telle que $v_n \rightarrow 0$, $ABv_n \rightarrow w$. Alors $w \in \overline{R(A)}$. Comme $u_n = (I - AB)v_n \in N(B)$ et $u_n \rightarrow -w$ on voit que $w \in N(B)$. Donc $w \in \overline{R(A)} \cap N(B) \Rightarrow w = 0$.

Seulement si. Soit $v \in \overline{R(A)} \cap N(B)$. Alors il existe une suite $\{u_n\} \subset D(A)$ telle que $Au_n \rightarrow v$, et comme $v \in N(B) \subset D(B)$, si $w_n = Au_n - v$ on a: $\{w_n\} \subset D(B)$ et $ABw_n = ABAu_n - ABv = Au_n$; d'où: $w_n \rightarrow 0$ et $ABw_n \rightarrow v$. Donc $v = 0$. Supposons maintenant AB fermable, notons $\overline{AB}$ sa fermeture et soit $u \in \overline{R(A)} + N(B)$. Alors $u = v + w$ avec $w \in N(B)$ et il existe une suite $\{x_n\} \subset D(A)$ telle que $Ax_n \rightarrow v$. Posons $u_n = Ax_n + w$. Alors $\{u_n\} \subset D(B)$, et $ABu_n = Ax_n$. Donc $u_n \rightarrow u$, $ABu_n \rightarrow v$, d'où $u \in D(\overline{AB})$ et $v = \overline{AB}u$. Alors $\overline{R(A)} + N(B) \subset D(\overline{AB})$, $\overline{R(A)} \subset R(\overline{AB})$, $N(B) \subset N(\overline{AB})$. Réciproquement, soit $u \in D(\overline{AB})$ et $v = \overline{AB}u$. Alors il existe une suite $\{u_n\} \subset D(B)$ telle que: $u_n \rightarrow u$, $ABu_n \rightarrow v$ d'où $v \in \overline{R(A)}$ et comme $u_n = (I - AB)u_n + ABu_n \rightarrow u$ alors $(I - AB)u_n \rightarrow w = u - v \in N(B)$ d'où $u \in \overline{R(A)} + N(B)$. Donc $D(\overline{AB}) \subset \overline{R(A)} + N(B)$; $R(\overline{AB}) \subset \overline{R(A)}$; $N(\overline{AB}) \subset N(B)$. Alors $D(\overline{AB}) = \overline{R(A)} + N(B)$; $R(\overline{AB}) = \overline{R(A)}$; $N(\overline{AB}) = N(B)$ et on voit immédiatement que $(\overline{AB})^2 = \overline{AB}$.

Corollaire 1.6. Soit $A, B \in C(\mathbf{B})$ avec $A(\text{inv})B$. Alors AB , considéré comme un opérateur de $\mathbf{B}$ dans lui-même, est fermé si et seulement si $R(A)$ est fermé.

Corollaire 1.7. Soit $A, B \in C(\mathbf{B})$ avec $A(\text{inv})B$. Alors $AB \in L(\mathbf{B})$ si et seulement si $R(A) \oplus N(B) = \mathbf{B}$.

Définition 1.8. Soit $A, B \in C(\mathbf{B})$ avec $A(\text{inv})B$. On dira que B est un inverse généralisé strict de A (ce qui sera noté $A(\text{INV})B$) si $\overline{R(A)} \oplus N(B) = \overline{R(B)} \oplus N(A) = \mathbf{B}$.

Remarque 1.9. (a) $A(\text{INV})B \Leftrightarrow B(\text{INV})A$;

(b) Si $A, B \in C(\mathbf{B})$ et $A(\text{INV})B$ alors

$P = \overline{AB}$ est une projection de $\mathbf{B}$ sur $\overline{R(A)}$, de noyau $N(B)$ et

$Q = \overline{BA}$ est une projection de $\mathbf{B}$ sur $\overline{R(B)}$, de noyau $N(A)$.

Lemme 1.10. Soit $A, B \in C(\mathbf{B})$ avec $A(\text{INV})B$. Alors B est borné si et seulement si $R(A)$ est fermé.

Démonstration. Si. $R(A)$ fermé $\Rightarrow D(B) = R(A) \oplus N(B) = \mathbf{B}$ d'où B est borné (en utilisant le théorème du graphe fermé).

Seulement si. B borné $\Rightarrow \mathbf{B} = R(A) \oplus N(B) \Rightarrow R(A)$ est fermé (en utilisant le Corollaire 0.1).

Remarque 1.11. Si $A, B \in L(\mathbf{B})$ et $A(\text{inv})B$ alors $A(\text{INV})B$.

Lemme 1.12. Soit $A \in C(\mathbf{B})$, P une projection de $\mathbf{B}$ sur $\overline{R(A)}$ et $I - Q$ une projection de $\mathbf{B}$ sur $N(A)$. Alors il existe un unique $B \in C(\mathbf{B})$ tel que

- (1) $A(\text{INV})B$;
- (2) $\overline{AB} = P$; and
- (3) $\overline{BA} = Q$.

Alors $R(B) = R(Q) \cap D(A)$ et $R(A) = R(P) \cap D(B)$.

Démonstration. Unicité. Remarquons tout d'abord que si B et B' vérifient (1) (2) et (3) on a: $N(B) = N(P) = N(B')$ (Lemme 1.5 et Définition 1.8), d'où $D(B) = R(A) \oplus N(B) = D(B')$. Soit maintenant $v \in D(B) = D(B')$; alors $\exists u \in D(A)$, $\exists w \in N(B)$ tels que $v = Au + w$, d'où $Bv = BAu = Qu$; $B'u = B'Au = Qu \Rightarrow B = B'$.

Existence. Posons $D(B) = R(A) + N(P)$. Nous voyons que la somme est directe car $R(A) \subset R(P)$ d'où $R(A) \cap N(P) = \{0\}$. Alors $\overline{D(B)} \supset \overline{R(A)} + N(P) = \mathbf{B}$ d'où $R(A) \subset D(B)$ et $D(B)$ est dense dans $\mathbf{B}$. Remarquons que. $\forall v \in \mathbf{B}$, $Pv \in R(A) \Leftrightarrow v \in D(B)$. En effet, si $Pv \in R(A)$ alors comme $v = (I - P)v + Pv$ on a $v \in N(P) + R(A) = D(B)$. Réciproquement, si $v \in D(B)$, $\exists u \in D(A)$, $\exists w \in N(P)$ tels que $v = Au + w$ et comme $Pv = PAu = Au$, on voit que $Pv \in R(A)$. Si $v \in D(B)$, $v = Au + w$, posons $Bv = Qu$. Alors $N(B) = N(P)$, $QB = B$ et si $v \in D(B)$, $ABv = Au = Pv$. Montrons que B est bien défini. Si $v = Au' + w$, alors $Qu' = Q(u' - u) + Qu$ et comme $u' - u \in N(A)$, on a $Q(u' - u) = 0$ d'où $Qu' = Qu$. En outre B est fermé. En effet, soit $\{v_n\} \subset D(B)$ telle que $v_n \rightarrow v$, $Bv_n \rightarrow w$. Si $v_n = Au_n + w_n$ alors $Bv_n = Qu_n \rightarrow w$ et comme $ABv_n = AQu_n = Au_n = Pv_n \rightarrow Pv$, on déduit du fait que A est fermé que $w \in D(A)$ et que $Pv = Aw \in R(A)$. Alors $v \in D(B)$ et $Bv = Qw = w$, donc B est fermé. La linéarité de B est évidente. Donc $B \in C(\mathbf{B})$. En outre $R(B) = R(Q|_{D(A)}) \subset D(A)$ car si $u \in D(A)$, $Qu = u - (I - Q)u \in D(A)$. Si $u \in D(A)$, $ABAu = AQu = Au - A(I - Q)u = Au$. Si $v \in D(B)$, $BABv = QBv = Bv$ d'où $A(\text{inv})B$. Finalement, on a vu que si $v \in D(B)$, $ABv = Pv$ et comme $D(B)$ est dense alors $\overline{AB} = P$. Si $u \in D(A)$, $BAu = Qu$ et comme $D(A)$ est dense alors $\overline{BA} = Q$. Donc AB et BA sont fermables et d'après le Lemme 1.5 $\overline{R(A)} \oplus N(B) = \overline{R(B)} \oplus N(A) = \mathbf{B}$ d'où $A(\text{INV})B$. Enfin il est évident à partir de ce qui précède que $R(B) \subset R(Q) \cap D(A)$ et $R(A) \subset R(P) \cap D(B)$. Soit $u \in R(Q) \cap D(A)$. Alors $\exists v$ tel que $u = Qv$ et comme $v = (I - Q)v + u$, $v \in D(A)$ et par conséquent $u = BAv \in R(B)$ d'où $R(B) = R(Q) \cap D(A)$. $R(A) = R(P) \cap D(B)$ se démontre de la même façon.

Remarque 1.13. Il est faux, en général, que $\forall A \in C(\mathbf{B})$ il existe un $B \in C(\mathbf{B})$ tel que $A(\text{inv})B$.

2. LE CAS DES ESPACES DE HILBERT

Soit maintenant $\mathbf{B} = \mathbf{H}$, un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ et si $A \in C(\mathbf{H})$ notons A^* son adjoint.

Lemme 2.1. Soit $A, B \in C(\mathbf{H})$ avec $A(\text{INV})B$. Alors $A^*(\text{INV})B^*$ et

$$(1) \quad D(B^*) \cap \overline{R(A^*)} = R(A^*); \quad D(A^*) \cap \overline{R(B^*)} = R(B^*).$$

Démonstration. Montrons d'abord que $D(B^*) = R(A^*) \oplus N(B^*)$. Soit $u \in D(A)$. Alors $\exists v \in D(B)$ et $\exists w \in N(A)$ tels que $u = Bv + w$. Si $x \in D(B^*) \cap \overline{R(A^*)}$, $\forall v \in D(B)$, $(x, Bv) = (x^*, v)$ d'où $x^* \perp N(B)$. Par conséquent $(x, u) = (x, Bv) = (x^*, (I - AB)v) + (x^*, ABv) = (x^*, ABv) = (x^*, Au)$. Comme ceci est vrai $\forall u \in D(A)$ on en déduit que $x^* \in D(A^*)$ et que $x = A^*x^*$ et par conséquent que $x \in R(A^*)$ d'où $R(A^*) \supset D(B^*) \cap \overline{R(A^*)}$. Or $\overline{R(A^*)} \oplus N(B^*) = \mathbf{H}$. Donc $D(B^*) = D(B^*) \cap \overline{R(A^*)} \oplus N(B^*)P$, d'où nous déduisons que $D(B^*) \subset R(A^*) + N(B^*)$. Réciproquement soit $x \in R(A^*) + N(B^*)$ et soit $P = \overline{AB}$. Alors $\exists y \in D(A^*)$ et $\exists w \in N(B^*)$ tels que $x = A^*y + w = A^*P^*y + w$ puisque $R(I - P^*) = N(P^*) = R(P)^\perp = R(A)^\perp = N(A^*)$. Alors $\forall v \in D(B)$, $(x, Bv) = (A^*P^*y, Bv) + (w, Bv) = (P^*y, ABv) = (P^*, (AB - I)v) + (P^*y, v) = (P^*y, v)$. Donc $x \in D(B^*)$, $D(B^*) = R(A^*) + N(B^*)$ et $B^*x = P^*y$. Or $N(B^*) = R(B)^\perp = R(Q)^\perp = N(Q^*)$. Donc $D(B^*) = R(A^*) + N(Q^*)$ et on voit que B^* est précisément l'inverse généralisé de A^* construit à partir des projections Q^* sur $\overline{R(A^*)}$ et $I - P^*$ sur $N(A^*)$ selon la méthode du Lemme 1.12. Il est facile de voir que B^* est en fait un inverse généralisé strict de A^* .

Définition 2.2. Soit $A \in C(\mathbf{H})$, P la projection orthogonale de $\mathbf{H}$ sur $\overline{R(A)}$ et Q la projection orthogonale de $\mathbf{H}$ sur $\overline{R(A)^*}$. Alors l'inverse généralisé strict B de A déterminé à partir de P et de Q selon les modalités du lemme précédent est appelé l'inverse de Moore-Penrose de A , ce qui se notera $A(\text{IMP})B$. Il est facile de voir que l'inverse de Moore-Penrose d'un opérateur est unique, ce qui permet d'écrire également $A = \text{IMP}(B)$. On a alors $B = \text{IMP}(A)$.

Remarque 2.3. $\forall A, B \in C(\mathbf{H})$ tels que $A(\text{IMP})B$ on trouve à partir de (1):

$$(2) \quad R(B^*) = \overline{R(A)} \cap D(A^*); \quad R(A^*) = \overline{R(B)} \cap D(B^*).$$

Définition 2.4. Si $A \in C(\mathbf{H})$, posons $R_A = (I + A^*A)^{-1}$. Alors $(AR_A)^* = A^*R_A^*$ (cf. [1, Lemma 3.13]).

Lemme 2.5. Soit $A, B \in C(\mathbf{H})$ avec $A(\text{IMP})B$. Alors

- (a) $AR_A = B^*R_{B^*}$;
- (b) $I - R_A = R_{B^*} - P_{N(B^*)}$.

Démonstration. (a) Soit $u \in \mathbf{H}$. Alors $AA^*R_A^2u = AR_A A^*R_Au \in \overline{R(A)} \cap D(A^*) = R(B^*)$ d'où

$$(3) \quad B^*A^*AA^*R_A^2u = AA^*R_A^2u.$$

Par ailleurs $A^*R_A^2u \in \overline{R(A^*)} \cap D(A) = R(B)$. Donc $A^*R_A^2u = BAA^*R_A^2u \in R(A^*) \subset D(B^*)$ d'où

$$(4) \quad B^*A^*R_A^2u = B^*BAA^*R_A^2u.$$

En sommant (3) et (4) on trouve

$$B^*A^*(I + AA^*)R_A^2u = (I + B^*B)AA^*R_A^2u$$

ou encore $B^*A^*R_{A^*}u = (I + B^*B)AA^*R_{A^*}^2u$ et finalement $R_B B^*A^*R_{A^*}u = AA^*R_{A^*}^2u$ ou $(B^*R_{B^*} - AR_A)A^*R_{A^*}u = 0$. Donc $(B^*R_{B^*} - AR_A)|_{R(A^*)} = 0 \Rightarrow (B^*R_{B^*} - AR_A)|_{N(A)^\perp} = 0$. Comme $N(B^*) = N(A)$ il en résulte que $(B^*R_{B^*} - AR_A)|_{N(A)} = 0$ et par conséquent $B^*R_{B^*} = AR_A$.

(b) $I - R_A = A^*AR_A = A^*B^*R_{B^*} = (I - P_{N(B^*)})R_{B^*} = [R_{B^*}(I - P_{N(B^*)})]^* = (R_{B^*} - P_{N(B^*)})^* = R_{B^*} - P_{N(B^*)}$.

Corollaire 2.6. *Sous les mêmes conditions, par symétrie entre A et B on a:*

(c) $A^*R_{A^*} = BR_B$

(d) $I - R_{A^*} = R_B - P_{N(B)} \Leftrightarrow I - R_B = R_{A^*} - P_{N(A^*)}$.

Définition 2.7. Soit $G(A) = [(u, Au)|u \in D(A)]$ le graphe de A . La projection orthogonale sur $G(A)$ dans $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$ est donnée par (cf. [5; 1, Lemma 3.14])

$$P_{G(A)} = \begin{pmatrix} R_A & A^*R_{A^*} \\ AR_A & I - R_{A^*} \end{pmatrix}.$$

Corollaire 2.8. *Soit $A, B \in C(\mathbf{H})$ avec $A(\text{IMP})B$. Alors*

$$P_{G(A)} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} P_{G(B)} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{N(B^*)} & 0 \\ 0 & -P_{N(B)} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Il suffit de remplacer les coefficients dans la formule de $P_{G(A)}$ par leur valeur tirée du Lemma 2.5 et du Corollaire 2.6.

Remarque 2.9. Soit F_A la projection orthogonale sur $G(A) \setminus (N(A) \times \{0\})$ dans $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$, donnée par

$$F_A = \begin{pmatrix} R_A - P_{N(A)} & A^*R_{A^*} \\ AR_A & I - R_{A^*} \end{pmatrix}.$$

Alors il est facile de voir que $f(A, B) = \|F_A - F_B\|$ est une métrique sur $C(\mathbf{H})$ et le dernier corollaire entraîne que $f(A, B) = f(\text{IMP}(A), \text{IMP}(B))$. Cette identité permet notamment de caractériser les opérateurs de $C(\mathbf{H})$ qui sont des points de continuité pour l'application $A \mapsto \text{IMP}(A)$ de $C(\mathbf{H})$ dans lui-même (cf. [3]).

REFERENCES

1. H. O. Cordes and J-Ph. Labrousse, *The invariance of the index in the metric space of closed operators*, J. Math. Mech. **12** (1963), 693–720.
2. J-Ph. Labrousse, *Les opérateurs quasi-Fredholm: une généralisation des opérateurs semi-Fredholm*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **XXIX** (1980), 161–258.
3. J-Ph. Labrousse and M. M'Bekhta, *Les opérateurs points de continuité pour la conorme et l'inverse de Moore-Penrose* (à paraître).
4. Z. Nashed, *Generalized inverses and applications*, Academic Press, New York, 1976.
5. M. H. Stone, *On unbounded operators in a Hilbert space*, J. Math. Indian Soc. **15** (1951), 155–192.