SUR LA STRUCTURE DES COMPOSANTES CONNEXES SEMI-FREDHOLM DE $B(H)$

M. MBEKHTA

(Communicated by Palle E. T. Jorgensen)

RÉSUMÉ. Dans ce travail, nous montrons que dans $B(H)$ les composantes connexes semi-Fredholm ont la même frontière et, d'autre part que $B(H)$ s'écrit comme la réunion de cette frontière commune (Δ) et de l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm. Nous remarquons que Δ est un ensemble de première catégorie, stable pour les perturbations compactes.

Par ailleurs, nous montrons que l'intérieur de $\overline{B(H)}$, l'ensemble des opérateurs "réguliers", est exactement l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm et que la frontière de $\overline{B(H)}$ est également Δ .

INTRODUCTION

Soit H un espace de Hilbert séparable et $B(H)$ l'algèbre des opérateurs bornés de H dans lui-même. Pour $T \in B(H)$, notons T^* , $N(T)$ et $R(T)$ respectivement l'adjoint, le noyau et l'image de T .

T est dit semi-Fredholm si $R(T)$ est fermé et $\min(\dim N(T), \dim N(T^*)) < \infty$.

Notons, pour $T \in B(H)$, $\text{ind}(T)$, l'indice de T , définit par

$$\text{ind}(T) = \dim N(T) - \dim N(T^*)$$

et si $\dim N(T) = \dim N(T^*) = \infty$ alors $\text{ind}(T) = 0$.

Soit $I_n = \{T \in B(H); \text{ind}(T) = n\}$ avec $n \in \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Soit $\mathcal{F} = \{T \in B(H); T \text{ semi-Fredholm}\}$, alors il est bien connu que $\mathcal{F}$ est un ouvert de $B(H)$ et que si on note $F_n = \{T \in \mathcal{F}; \text{ind}(T) = n\}$ alors F_n est ouvert et connexe pour tout $n \in \overline{\mathbb{Z}}$.

Dans la première partie de ce travail, nous utilisons les résultats de Bouldin [1] et Izumino et Kato [4] sur l'adhérence de l'ensemble des opérateurs inversibles pour montrer que les composantes connexes semi-Fredholm (F_n) ont la même frontière et que $B(H)$ s'écrit comme la réunion de cette frontière commune (Δ) et de $\mathcal{F}$ (Corollaire 1.4). Ceci montre qu'on peut imaginer $B(H)$ "comme" un cahier aux bords soudés et dont les feuilles seraient les composantes connexes semi-Fredholm. Nous remarquons aussi que Δ est un ensemble de première catégorie, stable pour les perturbations compactes.

Received by the editors January 29, 1991 and, in revised form, March 28, 1991.

1991 *Mathematics Subject Classification*. Primary 47A53, 47A55, 47B05.

Key words and phrases. Opérateur semi-Fredholm, régulier, frontière des composantes connexes semi-Fredholm.

La deuxième partie de ce travail donne une réponse à une question posée par Harte (dans une communication privée). T est dite "régulier" au sens de [3] si il existe $T' \in B(H)$ tel que $TT'T = T$. Nous montrons alors (Théorème 2.2) que l'intérieur de $\overline{B}(H)$, l'ensemble des opérateurs "réguliers" est exactement $\mathcal{F}$ et que la frontière de $\overline{B}(H)$ est également Δ .

1. SUR LA STRUCTURE DES COMPOSANTES CONNEXES SEMI-FREDHOLM DE $\overline{B}(H)$

Tout d'abord quelques notations:

$$m_e(T) = \inf\{\sigma_e(T^*T)^{1/2}\}$$

où $\sigma_e(T)$ est le spectre essentiel de T défini par $\sigma_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; T - \lambda I \text{ n'est pas Fredholm}\}$. Pour un ensemble X de $B(H)$, on notera $\overline{X}$, $\text{int } X$, et ∂X respectivement l'adhérence, l'intérieur, et la frontière de X .

G désigne l'ensemble des opérateurs inversibles de $B(H)$.

Lemme 1.1 [1, Théorème 2]. (1) $m_e(T) > 0 \Leftrightarrow R(T)$ fermé et $\dim N(T) < \infty$;
(2) $m_e(T^*) > 0 \Leftrightarrow \mathcal{R}(T)$ fermé et $\dim N(T^*) < \infty$.

Théorème 1.2 [4, Théorème 4.1]. $\forall n \in \overline{\mathbb{Z}}$

- (1) si $T \in I_n$ alors $\text{dist}(T, F_n) = 0$;
- (2) si $T \notin I_n$ alors $\text{dist}(T, F_n) = \max\{m_e(T), m_e(T^*)\}$.

Théorème 1.3. $T \notin \overline{F}_j \Leftrightarrow T \in \bigcup_{k \neq j} F_k$.

Démonstration. ($\Rightarrow$) Si $T \notin \overline{F}_j$ alors $\text{dist}(T, F_j) > 0$ et $T \notin I_j$. D'après le Théorème 1.2(2), $\text{dist}(T, F_j) = \max\{m_e(T), m_e(T^*)\}$ d'où $m_e(T) > 0$ ou $m_e(T^*) > 0$, le Lemme 1.1 implique que $T \in \bigcup_{k \neq j} F_k$.

($\Leftarrow$) Si $T \in \bigcup_{k \neq j} F_k$ alors il existe $k \neq j$ tel que $T \in F_k$. Puisque F_k est ouvert, on voit que $\text{dist}(T, F_j) > 0$ et, par conséquent, $T \notin \overline{F}_j$. $\square$

Corollaire 1.4. La frontière de $\overline{F}_j$ ($\partial \overline{F}_j$) ne dépend pas de j et si on note $\Delta = \partial \overline{F}_j$ alors $\Delta = \partial F_j$ et

$$B(H) = \Delta \cup \left[\bigcup_k F_k \right].$$

Démonstration. Montrons d'abord que $\text{int } \overline{F}_j = F_j$ pour tout j . L'inclusion " $F_j \subseteq \text{int } \overline{F}_j$ " étant évident, il suffit de montrer l'autre inclusion.

En effet, pour $j = 0$, le résultat se déduit de [4, Corollaire 2.2(1)]. Soit $j \neq 0$ et $T \in \text{int } \overline{F}_j$, d'après le théorème précédent, $T \notin \bigcup_{k \neq j} F_k$ donc si T est semi-Fredholm alors $T \in F_j$. Supposons que T n'est pas semi-Fredholm alors $m_e(T) = m_e(T^*) = 0$ d'où $T \in \partial \overline{G} = \partial F_0$ (voir [4, Théorème 2.1 et Corollaire 2.2(2)]).

Donc $T \in \text{int } \overline{F}_j \cap \partial F_0$ ce que entraîne que $\overline{F}_j \cap F_0 \neq \emptyset$ contradiction (continuité de l'indice).

Remarquons maintenant, que d'après le théorème précédent, on a $\forall j, B(H) = \overline{F}_j \cup [\bigcup_{k \neq j} F_k]$ d'où $B(H) = \partial \overline{F}_j \cup F_j \cup [\bigcup_{k \neq j} F_k]$ (puisque $\text{int } \overline{F}_j = F_j$) donc $B(H) = \partial \overline{F}_j \cup [\bigcup_k F_k] = \partial F_j \cup [\bigcup_k F_k]$ et comme $\forall k \neq j, \partial \overline{F}_j \cap F_k = \emptyset$

(continuité de l'indice), on en déduit que $\partial \bar{F}_j = \partial F_j$ ne dépend pas de j et, par conséquent, si on note $\Delta = \partial \bar{F}_j$ alors $B(H) = \Delta \cup [\bigcup_k F_k]$ et le corollaire est démontré. $\square$

Corollaire 1.5. Soit $T \in B(H)$ avec $R(T)$ fermé, $j \in \bar{\mathbb{Z}}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes

- (1) $T \in \partial \bar{G}$;
- (2) $T \in \partial \bar{F}_j = \partial F_j$;
- (3) $\dim N(T) = \dim N(T^*) = \infty$.

Démonstration. Conséquence directe du corollaire précédent. $\square$

Remarque. (1) Δ est un fermé avec intérieur vide (i.e. de première catégorie);
 (2) Δ est stable pour les perturbations compactes ($\Delta + \mathcal{K}(H) = \Delta$, où $\Delta + \mathcal{K}(H) = \{T + S; T \in \Delta \text{ et } S \text{ compact}\}$). en effet si $T \in \Delta$ et S compact et si $T + S \notin \Delta$ alors il est facile de voir que $T \in \mathcal{F}$, contradiction.

2. CARACTÉRISATION DE L'INTÉRIEUR DES OPÉRATEURS "RÉGULIERS"

Notons $\bar{B}(H)$, l'ensemble des opérateurs "réguliers" au sens de [3], par définition

$$\bar{B}(H) = \{T \in B(H); \exists T' \in B(H) \text{ tel que } TT'T = T\},$$

T' est appelé inverse généralisé de T . On remarquera, qu'on peut normaliser T' , par $T'' = T'TT'$, alors $TT''T = T$ et $T''TT'' = T''$.

Tout d'abord, on a le lemme suivant

Lemme 2.1. Soit $T \in \bar{B}(H)$ alors $T \in B(H) \Leftrightarrow R(T)$ fermé.

Démonstration. ($\Rightarrow$) Supposons que $TT'T = T$, alors TT' est une projection sur $R(T)$, continue. Donc $R(T)$ est fermé.

($\Leftarrow$) Si $R(T)$ est fermé, alors la restriction de T , $\hat{T} : N(T)^\perp \rightarrow R(T)$ est inversible.

Posons:

$$T' = \begin{cases} \hat{T}^{-1} & \text{sur } R(T), \\ 0 & \text{sur } R(T)^\perp \end{cases}$$

alors T' est un opérateur fermé et a pour domaine $R(T) \oplus R(T)^\perp = H$. Donc $T' \in B(H)$. Et, il est facile de voir que $TT'T = T$. $\square$

Remarque. $\mathcal{F} \subseteq \bar{B}(H)$.

Théorème 2.2. $\text{int } \bar{B}(H) = \mathcal{F}$.

Démonstration. D'après la remarque précédent et puisque $\mathcal{F}$ est ouvert, il suffit de montrer que $\text{int } \bar{B}(H) \subseteq \mathcal{F}$. Soit $T \in \text{int } \bar{B}(H)$. Supposons que $\dim N(T) = \dim N(T^*) = \infty$ et soit $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ une suite orthonormale d'éléments de $N(T)$ et $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ une suite orthonormale d'éléments de $N(T^*)$.

Posons $H_1 = \text{c.l.m.}\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ et $H_2 = \text{c.l.m.}\{f_1, f_2, \dots, f_n, \dots\}$ (avec la possibilité, $H_1 = N(T)$ et $H_2 = N(T^*)$).

Soit S_0 l'application de H_1 dans H_2 définie par $S_0 e_i = \frac{1}{i} f_i$ et

$$Su = \begin{cases} S_0 u & \text{si } u \in H_1, \\ 0 & \text{si } u \in H_1^\perp \end{cases}$$

alors $\forall \varepsilon > 0$, $R(T + \varepsilon S)$ n'est pas fermé et, par conséquent (Lemme 2.1), $T + \varepsilon S \notin \overline{B}(H)$ et $\|T - (T + \varepsilon S)\| = \|\varepsilon S\| \leq \varepsilon$, contradiction car $T \in \text{int } \overline{B}(H)$. $\square$

Corollaire 2.3. Soit $T \in \text{int } \overline{B}(H)$ alors $\exists \delta > 0$ et $T'_\lambda : \{|\lambda| < \delta\} \rightarrow B(H)$ méromorphe tel que

$$(T - \lambda)T'_\lambda(T - \lambda) = T - \lambda \quad \text{pour tout } |\lambda| < \delta.$$

Démonstration. D'après le théorème précédent, si $T \in \text{int } \overline{B}(H)$ alors T est semi-Fredholm, d'où en utilisant [5, Théorème 4], on en déduit qu'il existe M , N deux sous-espaces fermés de H , invariants par T tels que $T|_N$ est nilpotent de degré $d \in \mathbb{N}$ fini et si on note $T_0 = T|_M$ alors $\forall n \geq 0$, $N(T_0^n) \subseteq R(T_0)$, $R(T_0)$ étant fermé. Par conséquent [6, Théorème 2.6] implique qu'il existe $\delta > 0$ et $B_\lambda : \{|\lambda| < \delta\} \rightarrow B(M)$ analytique tel que $(T_0 - \lambda)B_\lambda(T_0 - \lambda) = T_0 - \lambda$ pour tout $|\lambda| < \delta$.

Si $N = \{0\}$ (i.e., $M = H$) alors $T = T_0$, on pose $T'_\lambda = B_\lambda$. Sinon, $T|_N$ nilpotent de degré d implique que $\forall \lambda \neq 0$, $(T|_N - \lambda)$ est inversible dans $B(N)$.

Posons $T'_\lambda = B_\lambda \oplus (T|_N - \lambda)^{-1}$ pour $0 < |\lambda| < \delta$ et T'_0 un inverse généralisé de T ($T \in \overline{B}(H)$), alors T'_λ ainsi défini est analytique dans $0 < |\lambda| < \delta$ avec $\lambda = 0$ comme pôle d'ordre d (puisque $T|_N$ est nilpotent de degré d) et il est clair que $(T - \lambda)T'_\lambda(T - \lambda) = T_\lambda$ pour tout $|\lambda| < \delta$. $\square$

Corollaire 2.4. $\partial \overline{B}(H) = \Delta$.

Démonstration. Soit $\mathcal{M} = \{T \in B(H); T \text{ inversible à gauche ou à droite}\}$. Il est clair que $\mathcal{M} \subseteq \overline{B}(H)$. D'après [2, Problème 140], $\mathcal{M}$ est dense dans $B(H)$ et donc $\overline{B}(H)$ est dense dans $B(H)$ et, par conséquent, $\partial \overline{B}(H) = B(H) \setminus \text{int } \overline{B}(H) = B(H) \setminus \mathcal{F} = \Delta$ (voir Corollaire 1.4). $\square$

RÉFÉRENCES

1. R. Bouldin, *The essential minimum modulus*, Indiana Univ. Math. J. **30** (1981), 513–517.
2. P. R. Halmos, *A Hilbert space problem book*, 2ème éd., Van Nostrand, Princeton, NJ, 1980.
3. R. E. Harte, *Invertibility and singularity*, Marcel Dekker, New York, 1988.
4. S. Izumino and Y. Kato, *The closure of invertible operators on Hilbert space*, Acta. Sci. Math. **49** (1985), 321–327.
5. T. Kato, *Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators*, J. Analyse Math. **6** (1958), 261–322.
6. M. Mbekhta, *Généralisation de la décomposition de Kato aux opérateurs paranormaux et spectraux*, Glasgow Math. J. **29** (1987), 159–175.

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS, U. F. R. DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, U.R.A C.N.R.S. 751, 59655-VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX, FRANCE