LE CALCUL FONCTIONNEL DANS L'ESPACE DE BESOV CRITIQUE

G. BOURDAUD

(Communicated by Palle E. T. Jorgensen)

RÉSUMÉ. Si F une fonction de la variable complexe qui opère, par composition à gauche, sur l'espace de Besov $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ ou sur l'espace de Triebel-Lizorkin $F_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$, où $0 < s < 1$, $s = n/p$, $1 \leq q \leq +\infty$ ($q > 1$, dans le cas de l'espace de Besov), alors F est globalement lipschitzienne. Ce résultat achève la description du calcul fonctionnel dans $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ et dans $F_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$, pour $0 < s < 1$.

ABSTRACT. Let F be a complex variable function which acts, via left composition, on the Besov space $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ or the Triebel-Lizorkin space $F_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$, where $0 < s < 1$, $s = n/p$, $1 \leq q \leq +\infty$ ($q > 1$, in the Besov case); then F is globally lipschitz. This theorem—added to previous results on the noncritical case—provides a complete characterization of the functional calculus on $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ and $F_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$, for $0 < s < 1$.

Dans un travail récent, en collaboration avec Dalila Kateb [BK2], nous avons décrit le calcul fonctionnel dans les espaces de Besov $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ et de Triebel-Lizorkin $F_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$, pour $0 < s < 1$ et $s \neq n/p$. Nous présentons ici l'extension de ces résultats au cas critique $s = n/p$.

Théorème 1. Soient $n < p < +\infty$ et $1 < q \leq +\infty$. Pour une fonction F de $\mathbb{C}$, dans $\mathbb{C}$, les propriétés suivantes sont équivalentes:

- (i) F opère, par composition à gauche, sur $B_p^{n/p,q}(\mathbb{R}^n)$;
- (ii) il existe un $r \in]1, q]$ tel que, pour tout $f \in B_p^{n/p,r}(\mathbb{R}^n)$, on ait $F \circ f \in B_p^{n/p,\infty}(\mathbb{R}^n)$;
- (iii) F est globalement lipschitzienne et $F(0) = 0$.

Théorème 2. Soient $n < p < +\infty$ et $1 \leq q \leq +\infty$. Pour une fonction F de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, les propriétés suivantes sont équivalentes:

- (i) F opère, par composition à gauche, sur $F_p^{n/p,q}(\mathbb{R}^n)$;
- (ii) pour tout $f \in F_p^{n/p,1}(\mathbb{R}^n)$, on a $F \circ f \in B_p^{n/p,\infty}(\mathbb{R}^n)$;
- (iii) F est globalement lipschitzienne et $F(0) = 0$.

Received by the editors February 22, 1991.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 46E35, 47H30, Secondary 67HGG.

©1992 American Mathematical Society
0002-9939/92 \$1.00 + \$.25 per page

Notons que les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) résultent aussitôt des plongements

$$B_p^{n/p, r}(\mathbb{R}^n) \subset B_p^{n/p, q}(\mathbb{R}^n) \subset B_p^{n/p, \infty}(\mathbb{R}^n) \quad (r \leq q),$$

$$F_p^{n/p, 1}(\mathbb{R}^n) \subset F_p^{n/p, q}(\mathbb{R}^n) \subset B_p^{n/p, \infty}(\mathbb{R}^n)$$

(voir, par exemple, [T]); quant aux implications (iii) $\Rightarrow$ (i), ce sont des conséquences immédiates des caractérisations des espaces de Besov et de Triebel-Lizorkin à l'aide de divers "modules de continuité" [T].

Lemme. *Il existe une suite $(\theta_\nu)_{\nu \geq 1}$ de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, portées par le cube unité $Q = [-1/2, +1/2]^n$, telles que:*

- (i) $\theta_\nu(x) = 1$ sur le cube $2^{-\nu}Q$;
- (ii) pour tout $p \in [1, +\infty[$ et tout $q \in]1, +\infty]$, la suite $(\theta_\nu)_{\nu \geq 1}$ converge vers 0 en norme $B_p^{n/p, q}(\mathbb{R}^n)$;
- (iii) pour tout $p \in]1, +\infty[$ et tout $q \in [1, +\infty]$, la suite $(\theta_\nu)_{\nu \geq 1}$ converge vers 0 en norme $F_p^{n/p, q}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve du lemme. Nous utiliserons la décomposition atomique des espaces de Besov et de Triebel-Lizorkin, telle qu'elle est développée par Frazier et Jawerth.

Donnons-nous une fonction $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi(x) = 1$ sur Q et $\varphi(x) = 0$ hors de $2Q$ et posons

$$\theta_\nu(x) = \nu^{-1} \sum_{1 \leq j \leq \nu} \varphi(2^j x);$$

on a aussitôt $\theta_\nu(x) = 0$ hors de Q et $\theta_\nu(x) = 1$ sur $2^{-\nu}Q$.

Pour estimer les normes des θ_ν , on observe que, pour une certaine constante $\varepsilon = \varepsilon(\varphi, n, p, q) > 0$, les fonctions $x \rightarrow \varepsilon \varphi(2^j x)$ sont des atomes, normalisés dans $B_p^{n/p, q}(\mathbb{R}^n)$ et dans $F_p^{n/p, q}(\mathbb{R}^n)$, portés respectivement par les cubes dyadiques $2^{-j+1}Q$; on applique alors le Théorème 3.1 de [FJ1] et le Théorème 5.3 de [FJ2]; on obtient

$$\|\theta_\nu\|_{B_p^{n/p, q}} \leq C(n, p, q, \varepsilon) \nu^{(1/q)-1};$$

de même

$$\|\theta_\nu\|_{F_p^{n/p, 1}} \leq C(n, p, \varepsilon) \nu^{-1} \left\| \sum_{1 \leq j \leq \nu} 2^{jn/p} \chi_j \right\|_p,$$

où χ_j désigne la fonction caractéristique du cube $2^{-j}Q$. Pour estimer la norme L^p qui apparaît au second membre, on pose

$$S_m = 2^{-m}Q \setminus 2^{-m-1}Q \quad (m = 1, \dots, \nu - 1),$$

$$S_\nu = 2^{-\nu}Q;$$

la fonction $\sum_{1 \leq j \leq \nu} 2^{jn/p} \chi_j$ valant constamment $\sum_{1 \leq j \leq m} 2^{jn/p}$ sur S_m , on obtient

$$\|\theta_\nu\|_{F_p^{n/p, 1}} \leq C' \nu^{-1} \left(\sum_{1 \leq m \leq \nu} |S_m| 2^{mn} \right)^{1/p} \leq C'' \nu^{(1/p)-1} \quad (\text{CQFD}).$$

Venons-en à la preuve des Théorèmes 1 et 2. Soit F une fonction telle que, pour tout $f \in B_p^{n/p, r}$ (resp. $f \in F_p^{n/p, 1}$), on ait $F \circ f \in B_p^{n/p, \infty}$; on sait [BK1]

qu'il existe alors des constantes $\delta > 0$ et $M > 0$ telles que, pour toute fonction f portée par Q , l'inégalité $\|f\| \leq \delta$ entraîne $\|F \circ f\|_{B_p^{n/p, \infty}} \leq M$ (ici et dans la suite $\| - \|$ désigne la norme dans $B_p^{n/p, r}$ ou dans $F_p^{n/p, 1}$).

Il s'agit de trouver des constantes $K > 0$ et $\sigma > 0$ telles que

$$|F(b) - F(a)| \leq K|b - a|,$$

pour tous nombres complexes a et b tels que $0 < |a - b| \leq \sigma$; pour cela, on introduit la fonction

$$f(x) = (b - a) \sum_{|k_j| \leq N} \varphi(3((x/\lambda) - k)) + a\theta_\nu(x)$$

(la somme $\sum_{|k_j| \leq N \dots}$ est étendue aux $k \in \mathbb{Z}^n$ tels que $|k_j| \leq N$, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$; le nombre $\lambda \in]0, 1]$ et les entiers positifs N et ν seront fixés dans un instant). Le lemme nous autorise à choisir ν tel que

$$|a| \|\theta_\nu\| \leq \delta/2.$$

On a par ailleurs (voir le Lemme 1 de [BK2])

$$\left\| \sum_{|k_j| \leq N} \varphi(3((\cdot/\lambda) - k)) \right\| \leq AN^{n/p},$$

où la constante A dépend de n, r, p , et φ ; on est donc conduit à choisir l'entier $N \geq 1$ tel que

$$\delta(3A|b - a|)^{-1} \leq N^{n/p} \leq \delta(2A|b - a|)^{-1},$$

encadrement réalisable si $\delta/|b - a|$ est assez grand, autrement dit dès que $|b - a| \leq \sigma(n, r, p, \varphi, \delta)$.

Enfin, il convient que les cubes $\lambda(Q + k)$ soient tous inclus dans le cube $2^{-\nu}Q$; pour cela, il suffit de choisir λ de telle façon que λN soit petit devant $2^{-\nu}$.

Ainsi la fonction f est portée par le cube unité et l'on a $\|f\| \leq \delta$.

Désignons par Q^+ le cube $[0, 1/2]^n$ et posons $h = (1/3, 0, \dots, 0)$; pour tout $x \in (1/3)Q^+$, on a $x + h \in Q$ alors que $x + h$ n'appartient pas à l'intérieur de $(2/3)Q$; cela entraîne

$$F(f(x + \lambda h)) - F(f(x)) = F(a) - F(b)$$

sur le cube $\lambda((1/3)Q^+ + k)$; on a donc

$$\begin{aligned} M^p &\geq \{\|F \circ f\|_{B_p^{n/p, \infty}}\}^p \\ &\geq 3^n \lambda^{-n} \sum_{|k_j| \leq N} \int_{\lambda((1/3)Q^+ + k)} |F(f(x + \lambda h)) - F(f(x))|^p dx \\ &\geq 3^n \lambda^{-n} (2N + 1)^n |F(b) - F(a)|^p \text{vol}\{\lambda((1/3)Q^+ + k)\} \\ &\geq CN^n |F(b) - F(a)|^p, \end{aligned}$$

avec $C = C(n) > 0$; d'où enfin

$$|F(b) - F(a)| \leq MC^{-1/p} N^{-n/p} \leq 3AMC^{-1/p} \delta^{-1} |b - a| \quad (\text{CQFD}).$$

BIBLIOGRAPHIE

- [BK1] G. Bourdaud et D. Kateb, *Fonctions qui opèrent sur certains espaces de Besov*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **40** (1990), 153–162.
- [BK2] —, *Fonctions qui opèrent sur les espaces de Besov*, Proc. Amer. Math. Soc. **112** (1991), 1067–1076.
- [FJ1] M. Frazier et B. Jawerth, *Decomposition of Besov spaces*, Indiana Univ. Math. J. **84** (1985), 777–799.
- [FJ2] —, *A discrete transform and applications to distribution spaces*, J. Funct. Anal. **93** (1990), 34–170.
- [T] H. Triebel, *Theory of function spaces*, Birkhauser, Basel, Boston, and Stuttgart, 1983.

UNIVERSITÉ PARIS VII, C.N.R.S. U. A. 212, TOUR 45–55-5 ° ÉTAGE, 2, PLACE JUSSIEU, 75251
PARIS CEDEX 05, FRANCE