UN PHENOMENE D'EXPLOSION DU SPECTRE

M. HOUIMDI

(Communicated by Palle E. T. Jorgensen)

RÉSUMÉ. Dans cet article on donne un exemple d'opérateur shift à poids quasi-nilpotent, tel que l'algèbre fermée pour la topologie faible des opérateurs, engendrée par ce shift, contient un élément dont le spectre non réduit à un point. Cet exemple constitue une réponse affirmative à la question 6 soulevée par A. L. Shields dans *Weighted shift operators and analytic function theory*, Topics in Operator Theory (C. Pearcy, ed.), Math. Surveys Monographs, vol. 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1974, pp. 49–128.

1. INTRODUCTION

Soit H un espace de Hilbert séparable complexe de dimension infinie. On dit qu'un opérateur linéaire borné T sur H est un shift unilatéral à poids, s'il existe une base orthonormée $(e_n)_n$ de H , et il existe une suite $(a_n)_n$ de nombres complexes telles que pour tout entier n on a $Te_n = a_n \cdot e_{n+1}$. La suite des poids de notre exemple sera construite à partir d'une suite qui a été définie dans [1] et dont on va rappeler ici la définition ainsi que certaines propriétés.

Notation. Pour tout entier $p \geq 1$, on pose $j_p = 2^p$, et on considère une subdivision de l'intervalle $J_p = [j_p \cdot j_{p+1}[$ en intervalles de longueurs toutes égales à $j_{[p/2]}$ (où $[p/2]$ désigne la partie entière de $p/2$). Puis on désigne par E_p l'ensemble des extrémités des intervalles obtenus. On constate alors que pour tout entier n de E_p on a ou bien $n = j_p$ ou bien $n = j_p + j_{p_1} + \cdots + j_{p_r}$, avec $p > p_1 > \cdots > p_r \geq [p/2]$. Dans [1], une suite $(\eta(n))_n$ a été construite par récurrence de la manière suivante:

(i) $\eta(0) = 0$ et $\eta(1) = 1$.

(ii) Pour $p \geq 1$ on suppose η construite sur $[0, j_p[$, et on choisit $\eta(j_p)$ tel que

$$\eta(j_p) \geq 7 \cdot \eta(j_p - 1) + j_{2p+1} \cdot \log(2p + 1).$$

(iii) Si $n \in E_p$, avec $n = j_p + j_{p_1} + \cdots + j_{p_r}$, où $p > p_1 > \cdots > p_r \geq [p/2]$, on pose

$$\eta(n) = \eta(j_p) + \eta(j_{p_1}) + \cdots + \eta(j_{p_r}).$$

(iv) Pour $n \in J_p \setminus E_p$, on suppose η construite pour tout entier $m < n$, et on pose

$$\eta(n) = \log p + \max\{\eta(m_1) + \eta(n_1)/n = m_1 + n_1\}.$$

Received by the editors February 21, 1991 and, in revised form, June 10, 1991.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 47A10.

2. PROPRIÉTÉS DE LA SUITE $\eta(n)$

Les propriétés qu'on va citer dans le lemme suivant sont établies dans [1].

Lemme 2.1. Posons $\omega(n) = \exp(-\eta(n))$ et

$$\alpha(n) = \begin{cases} 1/p\omega(j_p) & \text{si } n = j_p, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Alors on a les propriétés suivantes:

- (i) ω est strictement décroissante.
- (ii) Pour tout $n, m \geq 0$ on a $\omega(n+m) \leq \omega(n)\omega(m)$ et $\omega(n+m) \leq \omega(n)\omega(m)/p$ dans chacune des situations suivantes:
 - (a) $n+m \in J_p \setminus E_p$,
 - (b) $n+m \in E_p$, avec $n < j_p$ et $m < j_p$,
 - (c) $n+m \in E_p$, avec $n > j_p$, $n \notin E_p$, et $m < j_{[p/2]}$.
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(n+1)/\omega(n) = 0$.
- (iv) $\sup_{n \geq 1} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha(j)\omega(n+j)/\omega(n) < \infty$.

Lemme 2.2.

$$\sup_{n \geq 0} \sum_{j=0}^n \frac{\alpha(j)\omega(n)}{\omega(n-j)} < \infty.$$

Preuve. Supposons $n \geq 4$ et soit $q \geq 2$ tel que $n \in J_q$. On a donc

$$\sum_{j=0}^n \frac{\alpha(j)\omega(n)}{\omega(n-j)} = \sum_{p=1}^q \frac{\omega(n)}{p\omega(j_p)\omega(n-j_p)}.$$

1er cas. $n \in E_q$, donc on a ou bien $n = j_q$, ou bien $j \neq j_q$. Si $n = j_q$, alors pour $p = 1, 2, \dots, [q/2] - 1$, on a $j_p < j_q$ et $j_p - j_q < j_q$. Donc d'après (ii)(b) du lemme 2.1, on a

$$\frac{\omega(n)}{p\omega(j_p)\omega(n-j_p)} \leq \frac{1}{qp} \leq \frac{1}{p^2},$$

pour $p = 1, 2, \dots, [q/2] - 1$. Donc

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^q \frac{\omega(n)}{p\omega(j_p)\omega(n-j_p)} &= \sum_{p=1}^{[q/2]-1} \frac{\omega(n)}{p\omega(j_p)\omega(n-j_p)} + \sum_{p=[q/2]}^q \frac{\omega(n)}{p\omega(j_p)\omega(n-j_p)} \\ &\leq \sum_{p=1}^{[q/2]-1} \frac{1}{p^2} + \sum_{p=[q/2]}^q \frac{1}{p} \\ &\leq \sum_{p=1}^{[q/2]-1} \frac{1}{p^2} + \frac{q - [q/2] + 1}{[q/2]} \\ &\leq \sum_{p=1}^{[q/2]-1} \frac{1}{p^2} + \frac{q+3}{q-1} \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} + 4. \end{aligned}$$

Si $n \neq j_q$, alors pour $p = 1, 2, \dots, [q/2] - 1$ on a $j_p < j_{[q/2]}$, $n - j_p \notin E_q$, et $n - j_p > j_q$. Donc d'après (ii)(c) du lemme 2.1, on a

$$\frac{\omega(n)}{p\omega(j_p)\omega(n-j_p)} \leq \frac{1}{qp} \leq \frac{1}{p^2}, \quad p = 1, 2, \dots, \left[\frac{q}{2}\right] - 1.$$

Donc de même on voit que

$$\sum_{p=1}^q \frac{\omega(n)}{p\omega(j_p)\omega(n-j_p)} \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} + 4.$$

2ème cas. $n \notin E_q$, donc $n \in J_q \setminus E_q$, donc d'après (ii)(a) du lemme 2.1, on a

$$\frac{\omega(n)}{p\omega(j_p)\omega(n-j_p)} \leq \frac{1}{qp} \leq \frac{1}{p^2}, \quad p = 1, 2, \dots, q.$$

Donc

$$\sum_{p=1}^q \frac{\omega(n)}{p\omega(j_p)\omega(n-j_p)} \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}.$$

D'où

$$\sup_{n \geq 4} \sum_{j=0}^n \frac{\alpha(j)\omega(n)}{\omega(n-j)} \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} + 4 < \infty.$$

Donc

$$\sup_{n \geq 0} \sum_{j=0}^n \frac{\alpha(j)\omega(n)}{\omega(n-j)} < \infty.$$

3. LE THÉORÈME PRINCIPAL

Théorème 3.1. Soient H un espace de Hilbert séparable complexe de dimension infinie, $(e_n)_{n \geq 0}$ une base orthonormale de H , et T le shift unilatéral à poids défini sur H par $Te_n = \omega(n+1)e_{n+1}/\omega(n)$. On considère la série formelle $S = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha(j)T^j$, alors on a

- (i) T est un opérateur quasinilpotent compact.
- (ii) S définit un opérateur linéaire borné sur H .
- (iii) Le rayon spectral de S , $r(S)$ est $\geq 1/4\sqrt{e}$.

Preuve. (i) On a $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(n+1)/\omega(n) = 0$, donc T est un opérateur compact (voir [2, p. 84]). Or d'après [5] le spectre d'un shift unilatéral à poids, dont les poids sont tous non nuls, est un disque centré à l'origine, donc le spectre de T est réduit à $\{0\}$, et par suite T est quasinilpotent.

(ii) D'après [3], pour que S soit borné, il suffit de montrer que pour tout x de H , on a $\|Sx\| < \infty$. Soit $x \in \sum_{n=0}^{\infty} x(n)e_n$ un élément de H . Donc

$$x = x(0)e_0 + x_1$$

où $x_1 = \sum_{n=0}^{\infty} x_1(n)e_n$, avec

$$x_1(n) = \begin{cases} x(n) & \text{si } n \neq 0, \\ 0 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

On a $\|Sx\| \leq |x(0)| \|Se_0\| + \|Sx_1\|$ où

$$Se_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha(j)T^j e_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha(j)\omega(j)e_j.$$

Donc

$$\begin{aligned}\|Se_0\|^2 &= \sum_{j=0}^{\infty} \alpha(j)^2 \omega(j)^2 = \sum_{p=01}^{\infty} \frac{1}{p^2} < \infty, \\ Sx_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} x_1(n) Se_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_1(n) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \alpha(j) \frac{\omega(n+j)}{\omega(n)} e_{n+j} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n x_1(n-j) \frac{\alpha(j)\omega(n)}{\omega(n-j)} \right) e_n.\end{aligned}$$

Donc on a

$$\begin{aligned}\|Sx_1\|^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{j=0}^n x_1(n-j) \frac{\alpha(j)\omega(n)}{\omega(n-j)} \right|^2 \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n |x_1(n-j)| \frac{\alpha(j)\omega(n)}{\omega(n-j)} \right)^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n \left(|x_1(n-j)|^2 \frac{\alpha(j)\omega(n)}{\omega(n-j)} \right)^{1/2} \left(\frac{\alpha(j)\omega(n)}{\omega(n-j)} \right)^{1/2} \right)^2.\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\begin{aligned}\|Sx_1\| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n \frac{\alpha(j)\omega(n)}{\omega(n-j)} \right) \left(\sum_{j=0}^n |x_1(n-j)|^2 \frac{\alpha(j)\omega(n)}{\omega(n-j)} \right) \\ &\leq K_1 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n |x_1(n-j)|^2 \frac{\alpha(j)\omega(n)}{\omega(n-j)}\end{aligned}$$

($K_1 = \sup_{n \geq 0} \sum_{j=0}^n \alpha(j)\omega(n)/\omega(n-j)$). Donc

$$\begin{aligned}\|Sx_1\|^2 &\leq K_1 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |x_1(n)|^2 \frac{\alpha(j)\omega(n)}{\omega(n-j)} \\ &\leq K_1 \sum_{n=1}^{\infty} |x_1(n)|^2 \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha(j)\omega(n)}{\omega(n-j)} \right) \leq K_1 \cdot K_2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_1(n)|^2\end{aligned}$$

(où $K_2 = \sup_{n \geq 0} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha(j)\omega(n+j)/\omega(n)$). D'où $\|Sx_1\|^2 \leq K_1 \cdot K_2 \cdot \|x\|^2$.
Donc $\|Sx\| < \infty$. S définit alors un opérateur borné sur H .

(iii) Soit k un entier ≥ 2 . On a

$$S^k = \sum_{j=0}^{\infty} \beta(j) T^j$$

où $\beta(j) = \sum_{j_1+j_2+\dots+j_k=j} \alpha(j_1) \cdots \alpha(j_k)$. Donc pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$S^k \cdot e_n = \sum_{j=0}^{\infty} \beta(j) T^j \cdot e_n = \sum_{j=0}^{\infty} \beta(j) \frac{\omega(n+j)}{\omega(n)} e_{n+j}.$$

Donc $\|S^k e_n\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \beta(j)^2 \omega(n+j)^2 / \omega(n)^2$. On a $\|S^k\|^2 \geq \sup_{n \geq 0} \|S^k \cdot e_n\|^2$.
Donc

$$\|S^k\|^2 \geq \sup_{n \geq 0} \sum_{j=0}^{\infty} \beta(j)^2 \frac{\omega(n+j)^2}{\omega(n)^2} \geq \sup_{q \geq k} \sum_{j=0}^{\infty} \beta(j)^2 \frac{\omega(j_q+j)^2}{\omega(j_q)^2}.$$

Pour tout entier $q \geq k$, posons

$$S_q = \{j \in \mathbb{N} : j = j_{p_1} + \dots + j_{p_k} : p_1 > p_2 > \dots > p_k, \\ \text{et } q+1 \leq p_i \leq 2q, \text{ pour } 1 \leq i \leq k\}.$$

Donc

$$\|S^k\|^2 \geq \sup_{q \geq k} \sum_{j \in S_q} \beta(j)^2 \frac{\omega(j_q+j)^2}{\omega(j_q)^2}$$

pour $j \in S_q$, on a

$$\beta(j) = \sum_{j_1 + \dots + j_k = j} \alpha(j_1) \dots \alpha(j_k) \geq k! \alpha(j_{p_1}) \dots \alpha(j_{p_k})$$

et

$$\omega(j+j_q) = \omega(j_q + j_{p_1} + \dots + j_{p_k}) = \omega(j_q) \omega(j_{p_1}) \dots \omega(j_{p_k})$$

car $q < p_k < \dots < p_1 \leq 2q$ et par suite $j_q + j_{p_k} + \dots + j_{p_1} \in E_{p_1}$. Donc

$$\|S^k\|^2 \geq \sup_{q \geq k} \sum_{j \in S_q} (k!)^2 \alpha(j_{p_1})^2 \dots \alpha(j_{p_k})^2 \omega(j_{p_1})^2 \dots \omega(j_{p_k})^2 \\ \geq \sup_{q \geq k} \sum_{j \in S_q} \frac{(k!)^2}{(p_1 \dots p_k)^2}.$$

On a

$$\text{Card}(S_q) = \frac{q!}{k!(q-k)!} \quad \text{et} \quad p_i \leq 2q, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Donc

$$\|S^k\|^2 \geq \sup_{q \geq k} \frac{(k!)^2}{(2q)^{2k}} \cdot \frac{q!}{k!(q-k)!} \\ \geq \frac{k!}{4^k} \sup_{q \geq k} \left(\frac{q-k+1}{q^2} \right)^k \geq \frac{k!}{4^k} \cdot \frac{1}{4^k \cdot k^k}$$

(car $\sup_{q \geq k} (q-k+1)/q^2 = 1/4(k-1)$). Donc $\|S^k\|^2 \geq k!/16^k k^k$. Donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|S^k\|^{2/k} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k!)^{1/k}}{16k}.$$

Or $\lim_{k \rightarrow \infty} (k!)^{1/k}/k = 1/e$. Donc le rayon spectral de S , $r(S)$ est $\geq 1/4\sqrt{e}$ (car $r(S) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|S^k\|^{1/k}$).

Remarque 3.2. Soit $W(T)$ l'algèbre fermée pour la topologie faible des opérateurs, engendrée par T . Alors on voit facilement que $S \in W(T)$.

Corollaire 3.3. *Le spectre de S est infini non dénombrable.*

Preuve. On désigne par $\text{sp}(S)$ le spectre de S . On sait d'après [5] que $W(T)$ coïncide avec le commutant de T , donc d'après [4], le spectre de S dans $W(T)$ est le même que le spectre de S dans $\mathcal{L}(H)$. Or d'après [5], $W(T)$ s'identifie à une algèbre de Banach formée de séries formelles, notés $H^\infty(\omega)$. On constate alors que l'élément de $H^\infty(\omega)$ correspondant à S est $\varphi = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{\varphi}(j)z^j$ (où $\hat{\varphi}(j) = \alpha(j)$). On a alors $\hat{\varphi}(0) = 0$, donc φ n'est pas inversible dans $H^\infty(\omega)$, et par suite $0 \in \text{sp}(S)$. Mais le rayon spectral de S est > 0 , donc $\text{sp}(S)$ contient au moins deux points. $\text{sp}(S)$ est non dénombrable, car sinon $\text{sp}(S)$ serait non connexe, donc d'après [4], $W(A)$ contient un idempotent nontrivial. Ce qui est impossible car $W(A)$ est intègre.

BIBLIOGRAPHIE

1. W. G. Bade, H. G. Dales, and K. B. Laursen, *Multipliers of radical Banach algebras of power series*, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 49, no. 303, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984, pp. 1–84.
2. B. Beauzamy, *Introduction to operator theory and invariant subspaces*, North-Holland Math. Library, vol. 42, North-Holland, Amsterdam, 1988.
3. I. W. Cohen and N. Dunford, *Transformations on sequences spaces*, Duke Math. J. **3** (1937), 689–701.
4. H. Radjavi and P. Rosenthal, *Invariant subspaces*, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1973.
5. A. L. Shields, *Weighted shift operators and analytic function theory*, Topics in Operator Theory (C. Pearcy, ed.), Math. Surveys Monographs, vol. 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1974, pp. 49–128.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF BRUSSELS, 1050 BRUSSELS, BELGIUM