COEFFICIENTS DE FOURIER DE FONCTIONS À VARIATION BORNÉE

JIE WU

(Communicated by J. Marshall Ash)

ABSTRACT. Let $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ be a function of period 2π and of bounded variation on $[0, 2\pi]$ with the total variation $V(f)$. Its Fourier coefficients are denoted by $\hat{f}(n)$. In this short note, we give a very simple proof of the known result $|\hat{f}(n)| \leq V(f)/2\pi|n|$ ($n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$).

Soit $f(t)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, de période 2π , et à variation bornée sur $[0, 2\pi]$. On désigne respectivement par $V(f)$ et $\hat{f}(n)$ sa variation totale sur $[0, 2\pi]$ et ses coefficients de Fourier:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \quad (n \in \mathbb{Z}, n \neq 0).$$

A l'aide de la théorie de l'intégration de Riemann-Stieltjes, on peut facilement démontrer que

$$(1) \quad |\hat{f}(n)| \leq V(f)/2\pi|n| \quad (n \in \mathbb{Z}, n \neq 0),$$

et cette majoration est optimale (voir [2]). Il est intéressant de chercher une démonstration de (1) sans utiliser la notion de l'intégration de Riemann-Stieltjes. Dans cette direction, Taibleson [3] a démontré, par une méthode très élégante, que

$$(2) \quad |\hat{f}(n)| \leq V(f)/|n| \quad (n \in \mathbb{Z}, n \neq 0).$$

La démonstration de Taibleson est citée intégralement par Edwards dans son livre [1]. Pourtant (2) est moins précis que (1), d'un facteur multiplicatif $1/2\pi$. Edwards [1] a donné une démonstration élémentaire de (1), sans utiliser la notion de l'intégration de Riemann-Stieltjes, mais sa méthode est plus compliquée que celle de Taibleson. Dans cette note courte, nous modifions la méthode de Taibleson et donnons une démonstration très simple de (1).

Soient N , $n \in \mathbb{Z}$ avec $N > 0$, $n \neq 0$. On pose

$$a_k = 2\pi k/N|n| \quad (k = 0, 1, \dots, N|n|).$$

Received by the editors June 20, 1991.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 42A16.

Key words and phrases. Fourier coefficients.

Désignons par $V_k(f)$ la variation totale de f sur $[a_{k-1}, a_k]$. Nous écrivons d'abord une suite d'inégalités

$$\begin{aligned} 2\pi|\hat{f}(n)| &\leq \left| \sum_{k=1}^{N|n|} f(a_k) \int_{a_{k-1}}^{a_k} e^{-int} dt \right| + \left| \sum_{k=1}^{N|n|} \int_{a_{k-1}}^{a_k} (f(t) - f(a_k)) e^{-int} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|n|} \left| \sum_{k=1}^{N|n|} f(a_k) (e^{-ina_{k-1}} - e^{-ina_k}) \right| + \sum_{k=1}^{N|n|} V_k(f) (a_k - a_{k-1}). \end{aligned}$$

Ensuite, en remarquant les faits suivants

$$\begin{aligned} f(a_0) &= f(a_{N|n|}), \quad \sum_{k=1}^{N|n|} V_k(f) \leq V(f), \\ a_k - a_{k-1} &= \frac{2\pi}{N|n|} \quad (1 \leq k \leq N|n|), \end{aligned}$$

on peut déduire

$$\begin{aligned} 2\pi|\hat{f}(n)| &\leq \frac{1}{|n|} \left| \sum_{k=1}^{N|n|} (f(a_k) - f(a_{k-1})) e^{-ina_{k-1}} \right| + \frac{2\pi V(f)}{N|n|} \\ &\leq \left(1 + \frac{2\pi}{N} \right) \frac{V(f)}{|n|}. \end{aligned}$$

Finalement en faisant N tendre vers $+\infty$, nous obtenons

$$|\hat{f}(n)| \leq V(f)/2\pi|n| \quad (n \in \mathbb{Z}, n \neq 0),$$

comme souhaité.

BIBLIOGRAPHIE

1. R. E. Edwards, *Fourier Series*, Vol. 1, Springer-Verlag, New York and Heidelberg, 1979.
2. G. H. Hardy and W. Rogosinski, *Fourier series*, Cambridge Univ. Press, New York, 1965.
3. M. Taibleson, *Fourier coefficients of functions of bounded variation*, Proc. Amer. Math. Soc. **18** (1967), 766.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNITÉ ASSOCIÉE AU CNRS, URA 750, UNIVERSITÉ DE NANCY I, 54506 VANDŒUVRE-LÈS-NANCY, FRANCE
E-mail address: wujie@iecn.u-nancy.fr